

G24

K 21



10--2835
F 1W0 1' 3'000.000 3' 3282--01

Копія бібліографічного

аквизиційного зпису зьоби
визначення не може
книги до ліхну білір

Сьобов вьзвьвту
коньомфрмь лінсіок

H.O.N 1027

57р

В. Н. КАРГАШИНСКИЙ

624.04

К21

БИБЛИОТЕКА ВОРОН.
Инженерно-строительного института

О С Н О В Ы ДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА СООРУЖЕНИЙ

20745
78644

126444

124372



1960 г.

20745

Хронолог. кат № 78644

Систем. кат. | Отд. 624
 | № К-21.

Стоимость _____ Руб. _____ к.

Получ. 193 г. _____

К 21 422
187
Работа инж. В. Н. Карагинского „Основы динамического расчета сооружений“ одобрена Строительной программно-методической комиссией ГУУЗа НКТП как учебное пособие для строительных высших учебных заведений. (Протокол № 8 от 14 ноября 1937 г.)

Машин

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современные методы расчета статики сооружений отличаются простотой и наглядностью решений целого ряда практических задач. Это особенно ярко обнаруживается при решении задач по статике плоских систем. Появление таких методов расчета обязано быстрому развитию в последнее десятилетие теории сооружений. Путем наблюдений за работой сооружений и экспериментальных данных выявилась полная возможность перейти от установленных принципов к разработке удобных практических приемов вычислений. В подтверждение сказанного достаточно указать на тщательно разработанные практические приемы решений сложных многопольных и многоярусных рам.

Вопросы динамического характера, относящиеся к области сооружений, только за последнее время стали предметом творческой научной мысли. Методы динамических расчетов вообще и в применении к современному строительству в особенности далеко еще не достигли той наглядности и простоты, которая свойственна методам статики сооружений. Между тем, необходимость в разработке простых и наглядных приемов динамических расчетов сооружений становится совершенно очевидной.

Примеров воздействия динамической нагрузки на сооружения можно привести очень много. Но учет этих нагрузок в смысле воздействия на устойчивость и изношенность конструкций за редкими исключениями ограничивается введением в расчетные формулы поправочных коэффициентов. Такое положение дела было, например, до последнего времени с расчетом высоких сооружений с небольшой площадью основания. Учет инерции масс сооружения при колебаниях и возникающие в связи с этим деформации и дополнительные напряжения, как правило, в конструкторских бюро не делались.

Однако при нарастающих колебаниях могут получиться такие деформации и напряжения, которые значительно превос-

ходят определенные при статическом расчете и являются недопустимыми для устойчивости или прочности сооружения. Например, величина прогиба балки может быть при динамическом воздействии нагрузки в несколько раз больше, чем при статическом действии такой же нагрузки.

Наибольший эффект от динамической нагрузки имеет место, когда действующие на сооружение силы вызывают частоту колебаний, близко совпадающую с частотой свободных колебаний самого сооружения. Такими силами могут быть сейсмические и ветровые удары, силы, вызываемые движением частей машины на фундаменты и перекрытия, или подвижной нагрузкой на мостовые сооружения. Но и движение людей может вызвать недопустимые колебания в перекрытиях.

Необходимость в динамическом расчете может быть обусловлена характером действующей нагрузки или видом сооружения, его размером и назначением. При одной и той же нагрузке один вид конструкций может быть рассчитан по методам статическим, а другой требует проверки динамическим расчетом. Пример: статический расчет обычного балочного перекрытия и динамический расчет перекрытия в виде дерево-плиты.

Необходимость в динамическом расчете может быть вызвана не только вопросами устойчивости и прочности рассчитываемого сооружения, но и влиянием действующей нагрузки на другие устройства или на производство. Примеры: а) передача колебаний от фундамента машин на части здания, трещины в стенах, разрушение перемычек;

б) передача колебания от колонны на трансмиссии, вредная для работы последних;

в) неопасные для самого перекрытия, колебания его могут быть недопустимыми, так как вызывают неприятные ощущения у людей.

Точность весьма совершенных статических расчетов не может заменить динамический расчет в тех случаях, когда эффект динамичности нагрузки играет решающую роль.

Методы динамических расчетов сооружений находятся пока еще в начальной стадии развития, но область их применения должна расширяться, и методы эти совершенствоваться.

Поэтому нам казалось совершенно необходимым и своевременным издать хотя бы краткое пособие по основам динамических расчетов в разрезе того объема материала, который необходимо знать как минимум инженеру-строителю.

§ 1. Изучая теорию сопротивления материалов, мы принимаем внешние силы, или нагрузки, действующими статически. Это означает такое воздействие, когда возрастание нагрузки идет постепенно от нуля до своего конечного значения. В любой момент времени существует равновесие между внешними и внутренними силами. Это равновесие обуславливается отсутствием других сил, которые имеют место при быстром нагружении.

Наиболее ярким примером для понимания характера действия внешних сил на упругое тело является натяжение вагонной стяжки поезда. При плавном трогании поезда, когда пассажир не испытывает ощущения движения, мы практически имеем статическую нагрузку; при быстром трогании поезда, когда пассажир испытывает толчки, мы уже не имеем статической нагрузки, так как появилась новая сила — сила инерции поезда.

Появление этой силы обуславливается наличием ускорения поезда. Поэтому чем больше будет величина ускорения, тем больше будут силы инерции. При этом деформации упругой системы будут расти уже не постепенно, как в первом случае, а с относительно большими скоростями и ускорениями. Такого рода внешние силы будут относиться к динамическим нагрузкам. Примеров подобного рода нагрузок чрезвычайно много, в особенности при работах машин, где динамические нагрузки преобладают.

К динамическим нагрузкам относятся: все случаи сил инерции; внезапно приложенные нагрузки (мгновенно полное значение силы) и нагрузки, приложенные с ударом.

Динамический метод расчета в основном базируется на установленных принципах и положениях прикладной механики. Наибольшего своего развития он достиг в области машиностроения, где потребность учета динамических нагрузок возникла с быстрым развитием машиностроения. Современные машины обладают большими массами. Возвратно-движущиеся части машин подвергаются воздействиям сил инерции движущихся масс. Эти силы значительно превосходят статическую нагрузку, которую испытывают части машин. Таким образом, первая категория динамических сил — сил инерции — по преимуществу находит свое приложение при расчетах машин.

Что касается динамических расчетов сооружений, то эта область теории сооружений стала быстро развиваться только за последнее время, главным образом под влиянием больших успехов в машиностроении. Эта область оперирует по преимуществу с двумя последними категориями динамических нагрузок.

Мы будем изучать колебательные движения упругих систем, которые имеют место в системе под влиянием динамических нагрузок.

Изучение этого рода движения позволит нам определить деформации и усилия в сооружении, которое подвергается действию периодически изменяющейся нагрузки, а также определить деформации и напряжения в конструкции, которая подвергается действию внезапной нагрузки или разгрузки, ударов или движущегося груза. Кроме того, изучение колебательного движения позволит нам применить способы определения частоты и периода колебаний сооружений.

Для решения практических задач область динамических расчетов становится все шире и шире.

Мы имеем уже появление в технической литературе систематических курсов „Динамики сооружений“. Однако при современном положении наших знаний вопросы динамического расчета можно считать только поставленными, и в этой области мы далеко еще отстали от детально разработанных методов статике. Основное указание, которое теория способна дать конструктору, — избегать возможности совпадения частот возмущающих сил и свободных колебаний. Поэтому главное содержание излагаемого ниже материала будет посвящено краткому изучению методов определения частот свободных колебаний частей и целого сооружения и подробному разбору примеров из строительной практики.

I. Колебания упругих систем с одной степенью свободы

§ 2. Свободные поперечные колебания. Представим себе упругую систему, одна из точек которой A_1 является материальной, т. е. обладает сосредоточенной в себе массой, а все остальные точки массами не обладают. Допустим, что точка A_1 может перемещаться только по одной определенной прямолинейной траектории и что никаких внешних сил ни к точке A_1 , ни к другим точкам системы не приложено.

Если такая упругая система будет выведена из положения равновесия и предоставлена самой себе, то возникнут колебания, обусловленные действием силы инерции в точке A_1 . Такого рода колебания называются *свободными колебаниями упругой системы с одной степенью свободы*.

В качестве примера таких колебаний могут служить колебания невесомого и несжимаемого вертикального бруса, жестко закрепленного у основания и имеющего на верхнем конце сосредоточенный груз (черт. 1).

Введем обозначения:

m_1 — масса сосредоточенного груза P_1 ,

$v_1(x)$ — перемещение в некоторый момент времени верхнего конца бруса A_1 ;

$v(x)$ — перемещение в некоторый момент времени одной из точек A в пролете бруса;

y_1 — наибольшее отклонение от положения равновесия точки A_1 ;

y — то же точки A ;

δ_1 — коэффициент влияния, соответствующий точкам A_1 и A , т. е. перемещение точки A от горизонтальной силы, равной единице и приложенной в точке A_1 ;

Q_1 — сила инерции груза P_1 в точке A_1 .

Сила инерции Q_1 может рассматриваться на основании начала д'Аламбера, как внешняя сила, равная по величине произведению массы груза на ускорение точки A_1 . Направление этой силы противоположно направлению ускорения точки A_1 .

Следовательно,

$$Q_1 = m_1 \frac{d^2 v_1}{dt^2}$$

и перемещение точки A есть:

$$v = Q_1 \delta_1 = -\delta_1 m_1 \frac{d^2 v_1}{dt^2} \dots \dots \dots (1)$$

Перемещение точки A_1 в свою очередь равно:

$$v_1 = -\delta_{11} m_1 \frac{d^2 v_1}{dt^2}, \dots \dots \dots (2)$$

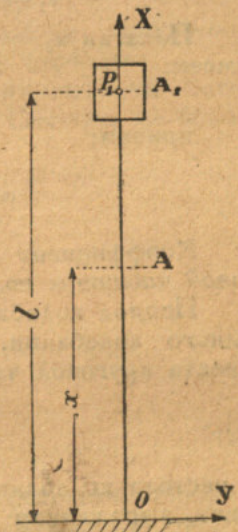
где δ_{11} есть перемещение точки A_1 от горизонтальной силы, равной единице и приложенной в этой же точке.

Из уравнения (2) имеем:

$$\frac{d^2 v_1}{dt^2} + \frac{1}{\delta_{11} m_1} v_1 = 0.$$

Вводя обозначение $\omega^2 = \frac{1}{\delta_{11} m_1}$, получим:

$$\frac{d^2 v_1}{dt^2} + \omega^2 v_1 = 0 \dots \dots \dots (3)$$



Черт. 1.

Равенство (3) есть линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Этому уравнению удовлетворяют два частных решения:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= a_1 \cos \omega t \\ v_1 &= b_1 \sin \omega t \end{aligned} \right\},$$

и где a_1 и b_1 — произвольные постоянные.

Общий интеграл уравнения (3) будет равен сумме частных решений:

$$v_1 = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t \dots \dots \dots (4)$$

Полагая $a_1 = y_1 \cos \alpha$ и $b_1 = -y_1 \sin \alpha$,
имеем:

$$v_1 = y_1 \cos(\omega t + \alpha), \dots \dots \dots (5)$$

причем:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m_1}} \dots \dots \dots (6)$$

Коэффициент ω будем называть коэффициентом круговой частоты колебаний.

Период колебаний τ , т. е. продолжительность времени одного колебания, выраженная в зависимости от коэффициента круговой частоты, определяется выражением:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \dots \dots \dots (7)$$

а частота колебаний, т. е. число колебаний в единицу времени, выражением:

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi} \dots \dots \dots (8)$$

Параметры y_1 и α определяют амплитуду и начальную фазу колебаний. Они определяются начальными условиями движения, т. е. прогибом точки A_1 и ее скоростью в начальный момент времени ($t=0$).

Из уравнений (1) и (2), путем деления одного на другое, находим:

$$v = \frac{\delta_1}{\delta_{11}} \cdot v_1, \dots \dots \dots (9)$$

или на основании уравнения (5):

$$v = y \cdot \cos(\omega t + \alpha), \dots \dots \dots (10)$$

где:

$$y = \frac{\delta_1}{\delta_{11}} y_1 \dots \dots \dots (11)$$

Уравнение (10) определяет перемещение любой точки в пролете бруса в функции времени. Оказывается, что все точки системы совершают колебания по простому гармоническому закону с одним и тем же периодом и с одной и той же фазой, т. е. все точки проходят одновременно положение равновесия.

Амплитуды колебаний для различных точек будут различные и определяются уравнением (11). Как видно, уравнение (11) есть уравнение упругой линии от статически приложенной в точке A_1 силы инерции, вызвавшей горизонтальное смещение точки A_1 , равное y_1 .

Уравнение (10) будем называть уравнением свободных гармонических колебаний с одной степенью свободы.

Следует подчеркнуть, что коэффициент частоты есть величина постоянная для данной системы. Отсюда, на основании уравнения (3), имеем:

$$\frac{d^2 v_1}{dt^2} = -\omega^2 v_1$$

и поэтому:

$$m_1 \frac{d^2 v_1}{dt^2} = -\omega^2 v_1 m_1,$$

или сила инерции в точке A_1 :

$$Q_1 = \omega^2 m_1 v_1 \dots \dots \dots (12)$$

Уравнение (12) определяет следующее основное свойство свободных гармонических колебаний: сила инерции в точке, несущей сосредоточенную массу, пропорциональна произведению перемещения точки на массу.

Уравнение (9) позволяет определить перемещения всех точек колеблющегося бруса в зависимости от перемещения точки A_1 . Следовательно, колебание системы с одной степенью свободы определяется одной координатой.

§ 3. Несвободные колебания. — Собственные колебания упругих систем. — Явление резонанса. Если к упругой системе, находящейся в колебательном движении под влиянием сил инерции, будут приложены какие-либо внешние силы, то колебания под влиянием совокупного действия этих сил могут быть названы несвободными.

В теории колебаний особенно важное значение имеют те случаи несвободных колебаний, когда на упругую систему действуют силы, изменяющиеся по какому-либо периодическому закону. Эти силы, как известно, носят название возмущающих сил.

Рассмотрим простейший вид таких колебаний, когда на упругую систему, рассмотренную в § 2, действует возмущающая сила N_1 , изменяющаяся по простому гармоническому закону (черт. 2):

$$N_1 = R_1 \cos(rt + \beta).$$

Перемещение точки A_1 в этом случае определяется уравнением:

$$v_1 = \delta_{11} \left[R_1 \cos(rt + \beta) - m_1 \frac{d^2 v_1}{dt^2} \right] \dots (13).$$

Полагая $R_1 = m_1 W_1$, имеем:

$$A_1 \left[P_1 + R_1 \cos(rt + \beta) \right] \frac{d^2 v_1}{dt^2} + \omega^2 v_1 = W_1 \cos(rt + \beta) \dots (13a).$$

Уравнение (13) есть неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Как известно, общий интеграл этого уравнения состоит из общего интеграла уравнения (13) без последнего члена и частного решения с последним членом. Общий интеграл уравнения (13) был найден и выражен уравнением (4). Частное решение будем искать в виде:

$$v_1 = C_1 \cos(rt + \beta), \dots (a)$$

где C_1 — некоторый постоянный коэффициент.

Подставив в уравнение (13) вместо v_1 выражение (a), имеем:

$$-C_1 r^2 \cos(rt + \beta) + C_1 \omega^2 \cos(rt + \beta) = W_1 \cos(rt + \beta).$$

Произведя сокращения, получаем:

$$C_1 = \frac{W_1}{\omega^2 - r^2}$$

Таким образом, общий интеграл уравнения (13) будет:

$$v_1 = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + \frac{W_1}{\omega^2 - r^2} \cos(rt + \beta) \dots (14)$$

Дифференцируя это уравнение, находим:

$$\frac{dv_1}{dt} = -\omega a_1 \sin \omega t + \omega b_1 \cos \omega t - \frac{r W_1}{\omega^2 - r^2} \sin(rt + \beta) \dots (14a).$$

Если теперь начальные условия таковы, что при $t = 0$ прогиб точки A_1 равен $v_1^{(0)}$, а скорость этой точки равна $\dot{v}_1^{(0)}$, то из уравнений (14) и (14a) будем иметь:

$$v_1^{(0)} = a_1 + \frac{W_1}{\omega^2 - r^2} \cos \beta.$$

$$\dot{v}_1^{(0)} = \omega b_1 - \frac{r W_1}{\omega^2 - r^2} \sin \beta.$$

Из этих двух уравнений определяем a_1 и b_1 :

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= v_1^{(0)} - \frac{W_1}{\omega^2 - r^2} \cos \beta \\ b_1 &= \frac{\dot{v}_1^{(0)}}{\omega} + \frac{r W_1}{\omega(\omega^2 - r^2)} \sin \beta \end{aligned} \right\} \dots (14b).$$

Полагая: $a_1 = y_1 \cos \alpha$ и $b_1 = -y_1 \sin \alpha$ и подставляя в уравнение (14), имеем:

$$v_1 = y_1 \cos \alpha \cdot \cos \omega t - y_1 \sin \alpha \cdot \sin \omega t + \frac{W_1}{\omega^2 - r^2} \cos(rt + \beta) \dots (15)$$

или:

$$v_1 = y_1 \cos(\omega t + \alpha) + \frac{W_1}{\omega^2 - r^2} \cos(rt + \beta) \dots (15a).$$

Здесь y_1 и α имеют уже определенное значение, которое можно получить, решив систему уравнений $a_1 = y_1 \cos \alpha$ и $b_1 = -y_1 \sin \alpha$ относительно y_1 и α . Решив, имеем:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2}; \\ \cos \alpha &= \frac{a_1}{y_1}; \quad \sin \alpha = -\frac{b_1}{y_1} \end{aligned} \right\} \dots (15b)$$

Первый член правой части уравнения (15a) выражает гармоническое колебание с частотой, равной частоте свободных колебаний системы¹⁾.

¹⁾ Напомним, что эта частота зависит от размеров и физических свойств системы и не зависит вовсе от частоты возмущающей силы.

Второй член правой части уравнения (15а) выражает колебание с частотой, равной частоте возмущающей силы.

Первые колебания называются *собственными* колебаниями системы, а вторые — *вынужденными*.

Итак, движение точки A_1 складывается из двух простых гармонических колебаний: собственного и вынужденного.

Перемещение любой точки бруса A определится по-прежнему уравнением (10):

$$v = \frac{\delta_1}{\delta_2} v_1$$

Подстановкой значения v_1 из уравнения (15а) будем иметь:

$$v = y \cdot \cos(\omega t + \alpha) + y' \cdot \cos(rt + \beta), \dots \dots \dots (16)$$

где:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{y_1}{\delta_{11}} \cdot \delta_1; \\ y' &= \frac{W}{\delta_{11}(\omega^2 - r^2)} \cdot \delta_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16a)$$

Первое из уравнений (16а) выражает уравнение упругой кривой от статически приложенной силы на конце бруса в точке A_1 , равной по величине силе инерции, вызвавшей горизонтальное смещение y_1 .

Второе из уравнений (16а) определяет уравнение упругой кривой от статически приложенной силы на конце бруса в точке A_1 , вызвавшей горизонтальное смещение y' .

Для примера положим, что для бруса, изображенного на *черт. 2*, начальные условия таковы, что при $t=0$ $v_1^{(0)} = 0$, $\dot{v}_1^{(0)} = 0$ и $\beta = 0$. Тогда коэффициент влияния δ_1 определится уравнением:

$$\delta_1 = \frac{P \cos(x^2 - x^3)}{2EJ(\cos^2 - \sin^2)}$$

$$\delta_1 = \frac{l^3}{6EJ} (3 - \xi) \xi^2,$$

т. е. уравнением упругой линии оси бруса от силы, равной единице и приложенной в верхнем конце бруса.

В точке A_1 , где ξ равно единице, значение δ_1 будет:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}$$

Подставляя значения δ_1 и δ_{11} в уравнение (16а), имеем:

$$y = \frac{\delta_1}{\delta_{11}} \cdot y_1 = \xi^2 (3 - \xi) \frac{y_1}{2};$$

$$y' = \xi^2 (3 - \xi) \frac{W}{\omega^2 - r^2}.$$

Отсюда, на основании уравнения (16), получаем:

$$v = \frac{1}{2} \xi^2 (3 - \xi) \left[y_1 \cos(\omega t + \alpha) + \frac{W_1}{\omega^2 - r^2} \cos rt \right]. \quad (16б)$$

Значения y_1 и α согласно уравнениям (16б) будут:

$$y_1 = \frac{W_1}{\omega^2 - r^2}$$

$$\sin \alpha = 0; \quad \cos \alpha = -1.$$

Отсюда:

$$\alpha = \pi.$$

Поэтому уравнение колебания бруса будет:

$$v = \frac{W_1}{2(\omega^2 - r^2)} \cdot \xi^2 (3 - \xi) (\cos rt - \cos \omega t) \dots \dots \dots (16в)$$

Из этого уравнения следует, что если частота возмущающей силы приближается к частоте собственных колебаний системы ($r = \omega$), то амплитуды как собственных, так и вынужденных колебаний становятся бесконечно большими. Это явление, как известно, носит название *состояния резонанса*, а частота колебаний возмущающей силы, равная частоте собственных колебаний системы, — *критической частоты*.

На опыте не наблюдается беспредельного возрастания амплитуды, вследствие наличия разного рода сопротивлений движению, которых мы не учитывали. Тем не менее все же при тех величинах сопротивлений, с которыми приходится иметь дело на практике, наблюдается резкое повышение амплитуды колебаний, когда частота возмущающей силы достигает критического значения. Необходимо отметить, что величины деформаций колеблющейся конструкции получаются настолько большими, что конструкция обыкновенно разрушается.

Поэтому расчет разного рода конструкций на резонанс представляет собою одну из самых важных задач теории колебаний в ее применении к техническим вопросам.

Очевидно, все выведенные уравнения будут справедливы для любой упругой системы с одной степенью свободы.

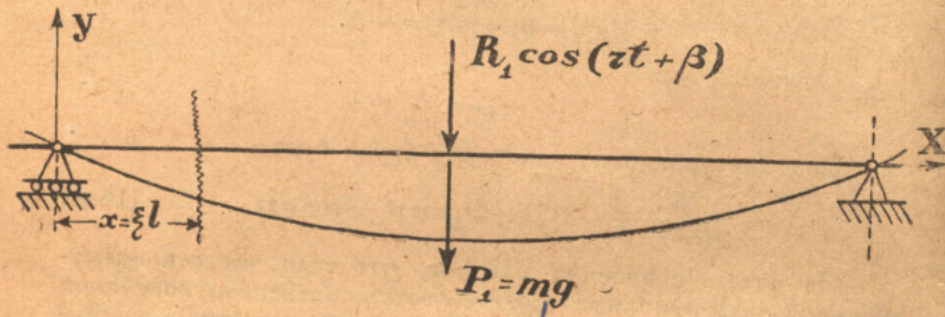
Пример. Рассмотрим колебание призматического бруса, свободно лежащего на двух опорах, несущего посередине груз и подвергающегося в этом месте действию периодической силы $R_1 \cos(rt + \beta)$. (Черт. 3).

Пусть брус нагружен только собственным весом. Масса бруса $m_1 = \rho l$ сосредоточена в его середине. Согласно уравнению (16) вертикальное перемещение любой точки оси изгибаемого бруса выразится так:

$$y(x) = y \cdot \cos(\omega t + \alpha) + y' \cos(rt + \beta) \dots (17)$$

Вновь подчеркнем, что искомое перемещение складывается из двух составляющих: перемещения при свободном и перемещения при вынужденном колебаниях балки.

Найдем все подлежащие определению в правой части уравнения (17) значения выражений.



Черт. 3.

Для левой половины балки при $\xi \leq \frac{1}{2}$ имеем:

$$y = \frac{y_1}{\delta_{11}} \delta_1;$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m_1}};$$

$$y' = \frac{W_1}{\delta_{11} (\omega^2 - r^2)} \delta_1;$$

α определяем по начальным условиям; $\cos(rt + \beta)$ дано по условию задачи. Уравнение упругой линии от силы, равной единице и приложенной по середине изгибаемого бруса:

$$\delta_1 = \frac{l^3}{16EJ} \xi_1^2 \left(1 - \frac{4}{3} \xi^2 \right)$$

Полагая $\xi = \frac{1}{2}$, имеем:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{48EJ},$$

$$y_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \dots (\text{см. уравнение 15в})$$

Начальные условия в этой задаче таковы, что при $t = 0$ прогиб середины бруса:

$$v_1^{(0)} = y_1^0 = \frac{P_1 l^3}{48EJ}, \text{ где } P_1 = m_1 g,$$

а скорость этой точки:

$$\dot{v}_1^{(0)} = 0.$$

Последнее равносильно принятию $\alpha = 0$. Следовательно, из уравнения (14 в) имеем:

$$a_1 = \frac{P_1 l^3}{48EJ} - \frac{W_1}{\omega^2 - r^2} \cdot \cos \beta.$$

Принимая же начальную фазу возмущающей силы $\beta = 0$, будем иметь:

$$a_1 = \frac{P_1 l^3}{48EJ} - \frac{W_1}{\omega^2 - r^2},$$

$$b_1 = 0.$$

И следовательно:

$$y_1 = a_1 = \frac{P_1 l^3}{48EJ} - \frac{W_1}{\omega^2 - r^2}$$

Далее:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m_1}} = \sqrt{\frac{48EJ}{m_1 l^3}},$$

где:

$$m_1 = \frac{P_1}{g}$$

И, наконец,

$$y' = \frac{W_1}{\delta_{11} (\omega^2 - r^2)} \delta_1 = \frac{W_1}{\omega^2 - r^2} 3\xi \left(1 - \frac{4}{3} \xi^2 \right);$$

$$W_1 = \frac{R_1}{m_1} = \frac{R_1 g}{P_1}$$

Следовательно, уравнение (17) для левой половины балки теперь будет иметь вид:

$$v(x) = 3\xi \left(1 - \frac{4}{3} \xi^2 \right) \left(\frac{P_1 l^3}{48EJ} - \frac{W_1}{\omega^2 - r^2} \right) \cos \omega t + \\ + \frac{W_1}{\omega^2 - r^2} \cdot 3\xi \left(1 - \frac{4}{3} \xi^2 \right) \cos rt,$$

или:

$$v(x) = 3\xi \left(1 - \frac{4}{3} \xi^2 \right) \left[\frac{P_1 l^3}{48EJ} \cos \omega t + \right. \\ \left. + \frac{W_1}{\omega^2 - r^2} (\cos rt - \cos \omega t) \right] \dots \dots \dots (18)$$

Для правой половины бруса надо заменить ξ на $(1-\xi)$.

$$v(x) = 3(1-\xi) \left(\frac{8}{3}\xi - \frac{4}{3}\xi^2 - \frac{1}{3} \right) \left[\frac{P_1 l^3}{48EJ} \cos \omega t + \right. \\ \left. + \frac{W_1}{\omega^2 - r^2} (\cos rt - \cos \omega t) \right] \dots \dots \dots (18a)$$

Уравнения (18) и (18a) позволяют при данных начальных условиях определить вертикальное перемещение любой точки оси балки в любой момент времени.

Коэффициент частоты колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{48EJ}{m_1 l^3}} = \frac{6,928}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}$$

Период колебаний:

$$\tau = 0,906 \sqrt{\frac{m_1 l^3}{EJ}} = 0,906 l^2 \sqrt{\frac{\mu}{EJ}}$$

Частота колебаний:

$$f = 1,104 \sqrt{\frac{EJ}{m_1 l^3}} = \frac{1,104}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}$$

§ 4. Энергетический метод. Решим ту же задачу о колебаниях упругой системы с одной степенью свободы, пользуясь принципом сохранения энергии.

Для того, чтобы в статическом состоянии сместить массу m на величину u , необходимо приложить силу, равную Cu , где C коэффициент влияния для сил, т. е. величина силы, приложенной в точке m и вызывающей смещение ее, равное единице. При бесконечно малом приращении du

этого смещения, сила Cu производит работу $Cydu$. Поэтому при смещении v вся произведенная работа будет:

$$\int_0^v Cydu = \frac{Cv^2}{2}$$

Эта работа накапливается системой в виде потенциальной энергии.

Если освободить массу от действия силы, т. е. предоставить массу самой себе, то она возвратится в равновесное положение, причем потенциальная энергия ее превратится в кинетическую энергию.

При скорости массы \dot{v} ее кинетическая энергия будет $\frac{m}{2} \dot{v}^2$. Если пренебречь сопротивлениями движению, то полная механическая энергия, т. е. сумма кинетической и потенциальной энергии во время движения будет постоянной:

$$\frac{C}{2} v^2(t) + \frac{m\dot{v}^2(t)}{2} = \frac{Cv^2(0)}{2} + \frac{m\dot{v}^2(0)}{2} \dots \dots \dots (18в)$$

Путем интегрирования уравнения (18в) можно получить уравнение движения. Однако этот метод будет интересовать нас лишь для определения частоты собственных колебаний системы.

Если система во время свободного колебания достигла наибольшего своего смещения, то ее кинетическая энергия обращается в нуль, так как скорости всех точек системы в этом положении равны нулю.

При прохождении через равновесное положение обращается в нуль потенциальная энергия системы, так как смещения всех точек системы при этом равны нулю. Так как суммарная энергия во время свободных колебаний остается постоянной, то потенциальная энергия, соответствующая наибольшему смещению системы, равна кинетической энергии, соответствующей моменту прохождения через положение равновесия.

Так как масса m совершает гармоническое колебание, $v_1 = y_1 \cos(\omega t + \alpha)$, то ее наибольшее смещение равно y_1 , а скорость ее, в момент прохождения через положение равновесия, равна $\pm y_1 \omega$.

Потенциальная энергия при наибольшем смещении будет равна:

$$A = \frac{C}{2} y_1^2.$$

20745-78644
12МЗ42/26474

а кинетическая энергия в момент прохождения через положение равновесия равна $\frac{m y_1^2 \omega^2}{2}$.

Обозначая величину $\frac{m y_1^2}{2} = T$, будем иметь:
 $\omega^2 T = A$,

откуда:

$$\omega = \sqrt{\frac{A}{T}} = \sqrt{\frac{C}{m}} \dots \dots \dots (18c)$$

Величина T называется *приведенной кинетической энергией*. Она представляет собою частное от деления величины кинетической энергии системы на квадрат круговой частоты. Формула (18c) позволяет быстро определять круговую частоту колебаний и имеет широкое применение.

Пример 1. Призматический брус, заделанный одним концом и несущий на другом свободном конце сосредоточенную массу, равную массе самого бруса (*черт. 1*).

В формуле $\omega = \sqrt{\frac{C}{m_1}}$ не известен только коэффициент C .

Статический прогиб на конце бруса определится:

$$y_1 = \frac{Pl^3}{3EJ}$$

При $y_1 = 1$, имеем $P = C$. Отсюда:

$$C = \frac{3EJ}{l^3} = \frac{1}{\delta_{11}}$$

Поэтому имеем:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m_1}} = \sqrt{\frac{3EJ}{m_1 l^3}}$$

что согласуется с ранее выведенной формулой (6).

Пример 2. Призматический брус, изображенный на *черт. 3*.

Опять, $\omega = \sqrt{\frac{C}{m}}$. Величина C определится также из уравнения:

$$y \frac{1}{2} = \frac{Pl^3}{48EJ}$$

При $y_1 = 1$, имеем $P = C$ и следовательно:
 $\frac{2}{2}$

$$C = \frac{48EJ}{l^3}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{48EJ}{ml^3}}$$

что совпадает с формулой (18б).

II. Колебания упругих систем с несколькими степенями свободы

§ 5. Свободные колебания. Как определено в § 2, свободные колебания с одной степенью свободы определяются одной координатой — перемещением точки, несущей сосредоточенную массу, т. е. перемещение любой точки упругой системы есть функция перемещения точки, несущей сосредоточенную массу. Если же свободные колебания упругой системы определяются не одной, а несколькими координатами, то такая система называется *системой с несколькими степенями свободы*.

Краткое ознакомление с колебаниями упругих систем с несколькими степенями свободы мы проведем на примере колебаний невесомого призматического бруса, свободно лежащего на двух опорах и несущего три равноотстоящих друг от друга и от опор груза равных масс m (*черт. 4*).

Вертикальное перемещение ¹⁾ любой точки, в частности, точки A , будет зависеть от перемещений точек A_1, A_2, A_3 и может быть получено путем суммирования воздействий на нее от каждой из трех точек в отдельности.

Следовательно, наша система имеет три степени свободы. Введем обозначения:

v_1, v_2, v_3 — перемещения (прогибы) во время колебания точек A_1, A_2 и A_3 ;

$v(x)$, а сокращенно v — перемещение во время колебаний произвольной точки A в пролете бруса;

δ_1 — коэффициент влияния, соответствующий точкам A_1 и A , т. е. перемещение точки A от вертикальной силы, равной единице и приложенной в точке A_1 ;

δ_2 — коэффициент влияния, соответствующий точкам A и A_2 и т. д.

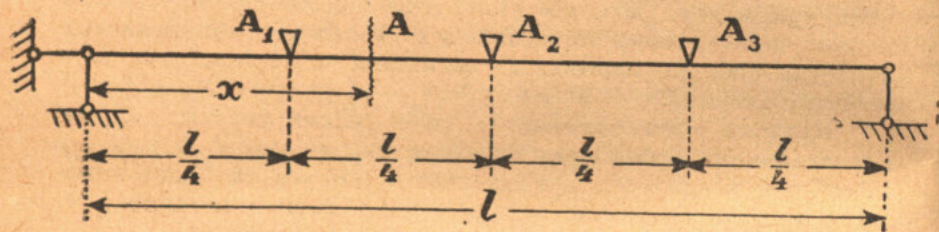
¹⁾ Напоминаем, что все дальнейшие выводы базируются на соблюдении закона независимости действия сил и, как его частное выражение, закона пропорциональности перемещений действующим на систему силам.

Если эту упругую систему вывести из положения равновесия, то возникнут колебания под влиянием следующих сил инерции:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= -m \frac{d^2 v_1}{dt^2} \\ Q_2 &= -m \frac{d^2 v_2}{dt^2} \\ Q_3 &= -m \frac{d^2 v_3}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

Тогда перемещение точки A определится уравнением:

$$v = \delta_1 Q_1 + \delta_2 Q_2 + \delta_3 Q_3 = -\delta_1 m \frac{d^2 v_1}{dt^2} - \delta_2 m \frac{d^2 v_2}{dt^2} - \delta_3 m \frac{d^2 v_3}{dt^2} \dots \dots \dots (20)$$



Черт. 4.

Это уравнение действительно для каждой из точек оси бруса. Применяя его для каждой из трех точек A_1 , A_2 и A_3 , получим систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} v_1 + \delta_{11} m \frac{d^2 v_1}{dt^2} + \delta_{21} m \frac{d^2 v_2}{dt^2} + \delta_{31} m \frac{d^2 v_3}{dt^2} &= 0 \\ v_2 + \delta_{12} m \frac{d^2 v_1}{dt^2} + \delta_{22} m \frac{d^2 v_2}{dt^2} + \delta_{32} m \frac{d^2 v_3}{dt^2} &= 0 \\ v_3 + \delta_{13} m \frac{d^2 v_1}{dt^2} + \delta_{23} m \frac{d^2 v_2}{dt^2} + \delta_{33} m \frac{d^2 v_3}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

Наличие системы дифференциальных уравнений (21) позволяет путем совместных решений их определить v_1 , v_2 и v_3 , которые, будучи подставлены в уравнение (20), дадут ответ на поставленный вопрос.

По типу дифференциальных уравнений (21) частные решения надо искать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= y_1 \cos(\omega t + \alpha) \\ v_2 &= y_2 \cos(\omega t + \alpha) \\ v_3 &= y_3 \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22),$$

причем значения y_1 , y_2 , y_3 , ω и α должны быть подобраны так, чтобы были удовлетворены уравнения (21). Для этого надо значения v_1 , v_2 , и v_3 из уравнений (22) подставить в уравнения (21), предварительно продифференцировав уравнения (22) два раза:

Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 v_1}{dt^2} &= -\omega^2 y_1 \cos(\omega t + \alpha) \\ \frac{d^2 v_2}{dt^2} &= -\omega^2 y_2 \cos(\omega t + \alpha) \\ \frac{d^2 v_3}{dt^2} &= -\omega^2 y_3 \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22a)$$

Подставляя выражения (22a) в уравнения (21), получим систему уравнений линейных и однородных относительно y_1 , y_2 , y_3 :

$$\left. \begin{aligned} y_1 (\delta_{11} m \omega^2 - 1) + y_2 \delta_{21} m \omega^2 + y_3 \delta_{31} m \omega^2 &= 0 \\ y_1 \delta_{12} m \omega^2 + y_2 (\delta_{22} m \omega^2 - 1) + y_3 \delta_{32} m \omega^2 &= 0 \\ y_1 \delta_{13} m \omega^2 + y_2 \delta_{23} m \omega^2 + y_3 (\delta_{33} m \omega^2 - 1) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (23)$$

Такая система, как известно, допускает решения для y_1 , y_2 и y_3 , не равных нулю только в том случае, если определитель системы равен нулю, т. е.:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta_{11} m \omega^2 - 1, & \delta_{21} m \omega^2, & \delta_{31} m \omega^2 \\ \delta_{12} m \omega^2, & (\delta_{22} m \omega^2 - 1), & \delta_{32} m \omega^2 \\ \delta_{13} m \omega^2, & \delta_{23} m \omega^2, & (\delta_{33} m \omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0 \dots \dots (24)$$

Развертывая этот определитель, получим уравнение третьей степени относительно ω^2 , соответственно числу степеней свободы. Уравнение (24) носит название *уравнения частот системы*.

Из теории линейных однородных уравнений известно что если определитель системы $\Delta = 0$, то одно из уравнений является следствием прочих уравнений, следовательно, система из n неизвестных с n уравнениями приводится к системе из n неизвестных с $(n-1)$ уравнениями. В данном случае у нас будет система двух уравнений с тремя неизвестными. Поэтому можно определить только отношение двух неизвестных к третьему, оставляя последнее произвольным.

Теперь допустим, что мы решили уравнение (24) и определили одно из значений $\omega = \omega_1$, которому будут соответствовать значения Y_{11} , Y_{21} и Y_{31} (вторые индексы при играках соответствуют индексам при ω).

Следовательно, частные решения будут:

$$\left. \begin{aligned} v_{11} &= Y_{11} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \\ v_{21} &= Y_{21} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \\ v_{31} &= Y_{31} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \end{aligned} \right\} \dots (22 б)$$

Введем обозначение: $\lambda_{21} = \frac{Y_{21}}{Y_{11}}$ и $\lambda_{31} = \frac{Y_{31}}{Y_{11}}$, тогда:

$$\left. \begin{aligned} v_{11} &= Y_{11} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \\ v_{21} &= \lambda_{21} Y_{11} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \\ v_{31} &= \lambda_{31} Y_{11} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \end{aligned} \right\} \dots (22 в)$$

Другим значениям коэффициента частоты ω_2 , ω_3 будет соответствовать система частных решений:

$$\left. \begin{aligned} v_{12} &= Y_{12} \cos(\omega_2 t + \alpha_2); \\ v_{22} &= \lambda_{22} Y_{12} \cos(\omega_2 t + \alpha_2); \\ v_{32} &= \lambda_{32} Y_{12} \cos(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \dots (22 г)$$

и

$$\left. \begin{aligned} v_{13} &= Y_{13} \cos(\omega_3 t + \alpha_3); \\ v_{23} &= \lambda_{23} Y_{13} \cos(\omega_3 t + \alpha_3); \\ v_{33} &= \lambda_{33} Y_{13} \cos(\omega_3 t + \alpha_3); \end{aligned} \right\} \dots (22 д)$$

Из теории линейных дифференциальных уравнений следует, что системе уравнений (21) удовлетворяет как каждое частное решение (22 в) (22 г) (22 д), так и суммы этих реше-

ний в любой их комбинации. Поэтому общая интегральная система уравнений для системы дифференциальных уравнений (21) будет следующая:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= Y_{11} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + Y_{12} \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \\ &\quad + Y_{13} \cos(\omega_3 t + \alpha_3); \\ v_2 &= \lambda_{21} Y_{11} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \\ &\quad + \lambda_{22} Y_{12} \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \lambda_{23} Y_{13} \cos(\omega_3 t + \alpha_3); \\ v_3 &= \lambda_{31} Y_{11} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{32} Y_{12} \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \\ &\quad + \lambda_{33} Y_{13} \cos(\omega_3 t + \alpha_3) \end{aligned} \right\} (25)$$

Уравнения (25) содержат шесть произвольных постоянных: Y_{11} , Y_{12} , Y_{13} , α_1 , α_2 и α_3 , для определения которых надо иметь шесть параметров, определяющих начальные условия движения системы.

Допустим, например, что для момента $t=0$, перемещения точек A_1 , A_2 и A_3 будут соответственно:

$$v_1^{(0)}, v_2^{(0)} \text{ и } v_3^{(0)},$$

а скорости этих точек:

$$\dot{v}_1^{(0)}, \dot{v}_2^{(0)} \text{ и } \dot{v}_3^{(0)}$$

Тогда полагая в уравнениях (25) $t=0$, имеем:

$$\left. \begin{aligned} v_1^{(0)} &= Y_{11} \cos \alpha_1 + Y_{12} \cos \alpha_2 + Y_{13} \cos \alpha_3; \\ v_2^{(0)} &= \lambda_{21} Y_{11} \cos \alpha_1 + \lambda_{22} Y_{12} \cos \alpha_2 + \lambda_{23} Y_{13} \cos \alpha_3; \\ v_3^{(0)} &= \lambda_{31} Y_{11} \cos \alpha_1 + \lambda_{32} Y_{12} \cos \alpha_2 + \lambda_{33} Y_{13} \cos \alpha_3 \end{aligned} \right\} (26)$$

Приравнявая значение первых производных при $t=0$ выражений (25) скоростям точек в этот момент, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 Y_{11} \sin \alpha_1 + \omega_2 Y_{12} \sin \alpha_2 + \omega_3 Y_{13} \sin \alpha_3 &= -\dot{v}_1^{(0)} \\ \lambda_{21} \omega_1 Y_{11} \sin \alpha_1 + \lambda_{22} \omega_2 Y_{12} \sin \alpha_2 + \\ &\quad + \lambda_{23} \omega_3 Y_{13} \sin \alpha_3 = -\dot{v}_2^{(0)} \\ \lambda_{31} \omega_1 Y_{11} \sin \alpha_1 + \lambda_{32} \omega_2 Y_{12} \sin \alpha_2 + \\ &\quad + \lambda_{33} \omega_3 Y_{13} \sin \alpha_3 = -\dot{v}_3^{(0)} \end{aligned} \right\} (27)$$

Из уравнений (26) определяем значения $Y_{11} \cos \alpha_1$, $Y_{12} \cos \alpha_2$ и $Y_{13} \cos \alpha_3$, а из уравнений (27) — значения $Y_{11} \sin \alpha_1$,

$y_{12} \sin \alpha_2$ и $y_{13} \sin \alpha_3$, после чего уже легко может быть найдено значение U_{11} , U_{12} , U_{13} , α_1 , α_2 и α_3 . Итак, теперь определены все элементы каждого из выражений (25), следовательно, дифференцируя выражения (25) по времени два раза и подставляя найденные вторые производные в уравнение (20), получим:

$$v = y_{(1)} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + y_{(2)} \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + y_{(3)} \cos(\omega_3 t + \alpha_3) \quad (28),$$

где:

$$\left. \begin{aligned} y_{(1)} &= y_{11} (\delta_1 m \omega_1^2 + \lambda_{21} \delta_2 m \omega_2^2 + \lambda_{31} \delta_3 m \omega_3^2) \\ y_{(2)} &= y_{12} (\delta_1 m \omega_1^2 + \lambda_{22} \delta_2 m \omega_2^2 + \lambda_{32} \delta_3 m \omega_3^2) \\ y_{(3)} &= y_{13} (\delta_1 m \omega_1^2 + \lambda_{23} \delta_2 m \omega_2^2 + \lambda_{33} \delta_3 m \omega_3^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

Следовательно, уравнение (20) определяет перемещения всех точек системы в зависимости от перемещений точек A_1, A_2, A_3 . Эти последние перемещения не зависят друг от друга.

Таким образом, колебание системы определяется тремя независимыми координатами — перемещениями точек, несущих сосредоточенные массы.

Система, как уже упоминалось, имеет три степени свободы. Выражение (28) показывает, что перемещение любой точки системы представляет собою сумму слагаемых вида $u \cos(\omega t + \alpha)$. Каждое такое слагаемое в отдельности определяет перемещение точки, совершающееся по простому гармоническому закону, с одним и тем же для всех точек периодом и с одной и той же фазой. Эти простые гармонические колебания, из которых складываются свободные колебания системы с несколькими степенями свободы, называются главными, или нормальными видами колебаний.

Нормальный вид колебания, имеющий наименьшую частоту, называется основным, или низшим видом колебания; другие нормальные виды будут высшими видами колебания.

Число нормальных видов колебания равно числу степеней свободы системы.

§ 6. Приложение выведенных формул к определению коэффициентов частоты колебаний взятого нами примера. Будем считать, что у нас имеется призматический брус с массой $m = \mu l$, распределенной в трех точках A_1, A_2 и A_3 . Следовательно, в каждой точке будет сосредоточена масса:

$$m_1 = \frac{\mu l}{3}, \text{ где } \mu \text{ — масса единицы длины балки. Определим сначала элементы определителя уравнения (24).}$$

Прогибы оси бруса от единичных сил, приложенных в точках A_1, A_2 и A_3 , будут:

$$\delta_{11} = \delta_{33} = \frac{9l^3}{768 EJ}; \quad \delta_{12} = \delta_{32} = \frac{11l^3}{768 EJ};$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{7l^3}{768 EJ}; \quad \delta_{22} = \frac{16l^3}{768 EJ}$$

Вводим обозначение:

$$u = \frac{m_1 l^3}{768 EJ} \omega^2 \dots \dots \dots (a)$$

Теперь система уравнений (23) напишется в виде:

$$\left. \begin{aligned} (9u - 1)y_1 + 11uy_2 + 7uy_3 &= 0 \\ 11y_1 + (16u - 1)y_2 + 11uy_3 &= 0 \\ 7uy_1 + 11uy_2 + (9u - 1)y_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29 a)$$

Уравнение частоты будет:

$$\begin{vmatrix} (9u - 1), & 11u, & 7u, \\ 11u, & (16u - 1), & 11u \\ 7u, & 11u, & (9u - 1) \end{vmatrix} = 0 \dots (29 б).$$

Вычитая в этом определителе элементы третьей строки из элементов первой строки, прибавляя затем во вновь полученном определителе элементы первого столбца к элементам третьего столбца, и, наконец, развертывая определитель по элементам первой строки, получаем:

$$\begin{vmatrix} (9u - 1), & 11u, & 7u \\ 11u, & (16u - 1), & 11u \\ 7u, & 11u, & (9u - 1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (2u - 1), & 0, & (-2u + 1) \\ 11u, & (16u - 1), & 11u \\ 7u, & 11u, & (9u - 1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (2u - 1), & 0, & 0 \\ 11u, & (16u - 1), & 22u \\ 7u, & 11u, & (16u - 1) \end{vmatrix} = (2u - 1) \begin{vmatrix} (16u - 1), & 22u \\ 11u, & (16u - 1) \end{vmatrix} =$$

$$= (2u - 1) [(16u - 1)^2 - 242u^2] = 0,$$

или:

$$(2u - 1) (14u^2 - 32u + 1) = 0.$$

Три корня этого уравнения будут следующие:

$$u_1 = \frac{16 - 11\sqrt{2}}{14} = 0,03169; u_2 = \frac{1}{2} = 0,5000;$$

$$u_3 = \frac{16 + 11\sqrt{2}}{14} = 2,2540.$$

Отсюда на основании выражения (а) получим коэффициенты частоты, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{768 \cdot 0,03169 EJ}{m_1 l^3}} = 4,934 \sqrt{\frac{EJ}{m_1 l^3}} = \frac{8,546}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{768 \cdot 0,50 EJ}{m_1 l^3}} = 19,60 \sqrt{\frac{EJ}{m_1 l^3}} = \frac{33,947}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \\ \omega_3 &= \sqrt{\frac{768 \cdot 2,254 EJ}{m_1 l^3}} = 41,61 \sqrt{\frac{EJ}{m_1 l^3}} = \frac{72,068}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \end{aligned} \right\} (30).$$

Сравнивая эти результаты с (18 б), видим, что собственная частота бруса, масса которого сконцентрирована в середине, почти на 20% ниже, чем наименьшая из собственных частот бруса, масса которого указанным здесь способом распределена между тремя точками. Если мы теперь массу бруса распределим на большее количество точек пролета, то мы будем получать значения круговых частот все ближе к значениям для бруса с равномерно распределенной нагрузкой. Однако решение этой задачи сопряжено с затратой большого количества труда и времени.

Частоты колебаний трех нормальных видов относятся между собою, как:

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 1 : 4 : 8,5.$$

Обозначаем: $\lambda_2 = \frac{y_2}{y_1}$; $\lambda_3 = \frac{y_3}{y_1}$; тогда на основании урав-

нений (23) имеем:

$$\left. \begin{aligned} 11u\lambda_2 + 7u\lambda_3 &= -(9u-1) \\ (16u-1)\lambda_2 + 11u\lambda_3 &= -11u \\ (11u\lambda_2 + (9u-1)\lambda_3 &= -7u \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (31).$$

Значения λ_2 и λ_3 могут быть найдены из любой пары уравнений (31). Складывая первое уравнение с третьим, будем иметь систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} (16u-1)\lambda_2 + 11u\lambda_3 &= -11u \\ 22u\lambda_2 + (16u-1)\lambda_3 &= -(16u-1) \dots \dots \dots (32) \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, находим, что если:

$$\left| \begin{array}{cc} (16u-1), & 11u \\ 22u, & (16u-1) \end{array} \right| \neq 0, \text{ то:}$$

$$\lambda_2 = 0 \text{ и } \lambda_3 = -1 \dots \dots \dots (32 \text{ а})$$

Вычитая первое уравнение из третьего, найдем другую систему уравнений:

$$\begin{aligned} 11u\lambda_2 + 7u\lambda_3 &= -(9u-1) \\ (2u-1)\lambda_3 &= (2u-1), \dots \dots \dots (33), \end{aligned}$$

из которых получим:

$$\lambda_2 = -\frac{16u-1}{11u} \text{ и } \lambda_3 = 1, \dots \dots \dots (33 \text{ а}),$$

если $(2u-1) \neq 0$

Теперь, имея общее решение уравнения (29а), будем находить частные значения коэффициентов уравнения (29а), а именно u_1, u_2, u_3 соответствующих трем круговым частотам ω_1, ω_2 и ω_3 , найденным выше при:

$$u = u_1 = \frac{16 - 11\sqrt{2}}{14},$$

$$u = u_2 = 0,5000$$

$$u = u_3 = \frac{16 + 11\sqrt{2}}{14}.$$

Для $u = u_1$ пользуемся решением (33а), откуда найдем:

$$\lambda_{21} = -\frac{16 \cdot \frac{16 - 11\sqrt{2}}{14} - 1}{11 \cdot \frac{16 - 11\sqrt{2}}{14} - 1} = -\frac{242 - 176\sqrt{2}}{176 - 121\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{(2 \cdot 121 - 176\sqrt{2})\sqrt{2}}{(176\sqrt{2} - 121 \cdot 2)} = \sqrt{2}$$

$$\lambda_{31} = 1.$$

Для $u = u_2$ пользуемся решениями (32а), откуда:

$$\lambda_{22} = 0 \text{ и } \lambda_{32} = -1.$$

Для $u = u_3$ пользуемся решениями (33а), откуда:

$$\lambda_{23} = -\sqrt{2} \text{ и } \lambda_{33} = 1.$$

Подставляя найденные значения в уравнение (26), имеем:

$$\left. \begin{aligned} y_{11} \cos \alpha_1 + y_{12} \cos \alpha_2 + y_{13} \cos \alpha_3 &= v_1^{(0)} \\ \sqrt{2} y_{11} \cos \alpha_1 - \sqrt{2} y_{13} \cos \alpha_3 &= v_2^{(0)} \\ y_{11} \cos \alpha_1 - y_{12} \cos \alpha_2 + y_{13} \cos \alpha_3 &= v_3^{(0)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (34)$$

и:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 y_{11} \sin \alpha_1 + \omega_2 y_{12} \sin \alpha_2 + \omega_3 y_{13} \sin \alpha_3 &= -\dot{v}_1^{(0)} \\ \sqrt{2} \omega_1 y_{11} \sin \alpha_1 - \sqrt{2} \omega_3 y_{13} \sin \alpha_3 &= -\dot{v}_2^{(0)} \\ \omega_1 y_{11} \sin \alpha_1 - \omega_2 y_{12} \sin \alpha_2 + \omega_3 y_{13} \sin \alpha_3 &= -\dot{v}_3^{(0)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (34a)$$

Решая совместно уравнения (34) и (34а), найдем:

$$\left. \begin{aligned} y_{11} \cos \alpha_1 &= \frac{1}{4} (v_1^{(0)} + \sqrt{2} v_2^{(0)} + v_3^{(0)}) \\ y_{12} \cos \alpha_2 &= \frac{1}{2} (v_1^{(0)} - v_3^{(0)}) \\ y_{13} \cos \alpha_3 &= \frac{1}{4} (v_1^{(0)} - \sqrt{2} v_2^{(0)} + v_3^{(0)}) \end{aligned} \right\} \dots \dots (35)$$

и:

$$\left. \begin{aligned} y_{11} \sin \alpha_1 &= -\frac{1}{4\omega_1} (\dot{v}_1^{(0)} + \sqrt{2} \dot{v}_2^{(0)} + \dot{v}_3^{(0)}) \\ y_{12} \sin \alpha_2 &= \frac{1}{2\omega_2} (\dot{v}_1^{(0)} - \dot{v}_3^{(0)}) \\ y_{13} \sin \alpha_3 &= -\frac{1}{4\omega_3} (\dot{v}_1^{(0)} - \sqrt{2} \dot{v}_2^{(0)} + \dot{v}_3^{(0)}) \end{aligned} \right\} \dots \dots (35a)$$

Из уравнений (35) и (35а) находим:

$$\left. \begin{aligned} y_{11} &= \frac{1}{4} \sqrt{\left(v_1^{(0)} + \sqrt{2} v_2^{(0)} + v_3^{(0)}\right)^2 + \frac{1}{\omega_1^2} \cdot} \\ &\quad \cdot \left(\dot{v}_1^{(0)} + \sqrt{2} \dot{v}_2^{(0)} + \dot{v}_3^{(0)}\right)^2 \\ y_{12} &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(v_1^{(0)} - v_3^{(0)}\right)^2 + \frac{1}{\omega_2^2} \left(\dot{v}_1^{(0)} - \dot{v}_3^{(0)}\right)^2} \\ y_{13} &= \frac{1}{4} \sqrt{\left(v_1^{(0)} - \sqrt{2} v_2^{(0)} + v_3^{(0)}\right)^2 + \frac{1}{\omega_3^2} \cdot} \\ &\quad \cdot \left(\dot{v}_1^{(0)} - \sqrt{2} \dot{v}_2^{(0)} + \dot{v}_3^{(0)}\right)^2 \end{aligned} \right\} (36)$$

Теперь, зная значения y_{11} , y_{12} и y_{13} из уравнений (35) или (36), определяем α_1 , α_2 и α_3 . Таким образом, в уравнениях колебания (25) для каждой из точек A_1 , A_2 и A_3 определены все произвольные постоянные, и мы можем определить положение каждой из точек A_1 , A_2 и A_3 в любой момент времени.

Общее уравнение колебания системы (28) найдем, если предварительно определим в уравнениях (29) коэффициенты влияния δ_1 , δ_2 и δ_3 путем построения упругих линий от сил, равных единице, приложенных в точках A_1 , A_2 , A_3 . Формы упругих линий оси бруса, соответствующие трем главным

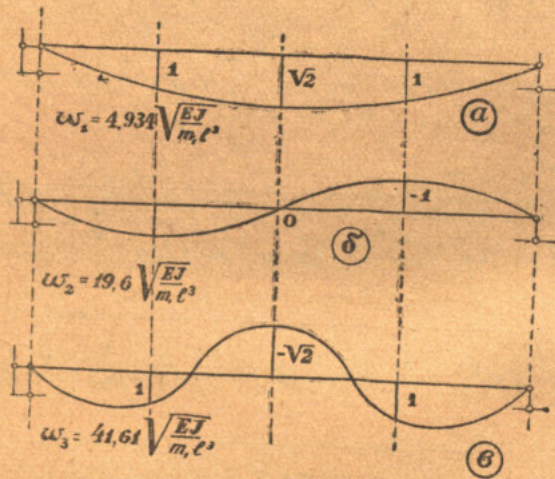
видам колебания, получим из уравнений (25) путем рассмотрения в отдельности каждого члена:

$$v_1 = y_{11} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + y_{12} \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + y_{13} \cos(\omega_3 t + \alpha_3);$$

$$v_2 = \lambda_{21} y_{11} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{22} y_{12} \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \lambda_{23} y_{13} \cos(\omega_3 t + \alpha_3);$$

$$v_3 = \lambda_{31} y_{11} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{32} y_{12} \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \lambda_{33} y_{13} \cos(\omega_3 t + \alpha_3).$$

Рассматривая первый член правой части уравнений полагая остальные равными нулю, будем иметь основной вид колебаний с коэффициентом круговой частоты ω_1 , форма которого изображена на черт. 5 а.



Черт. 5.

Первая форма (Черт. 5 а).

$$v_{11} = y_{11} \cos(\omega_1 t + \alpha_1),$$

$$v_{21} = \sqrt{2} y_{11} \cos(\omega_1 t + \alpha_1),$$

$$v_{31} = y_{11} \cos(\omega_1 t + \alpha_1).$$

Если положить $y_{11} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) = 1$, то будем иметь:

$$v_{11} = 1; v_{21} = \sqrt{2}; v_{31} = 1.$$

Вторая форма (Черт. 5 б).

$$v_{12} = y_{12} \cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$v_{22} = 0,$$

$$v_{32} = -y_{12} \cos(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Полагаем $y_{12} \cos(\omega_2 t + \alpha_2) = 1$.

Тогда:

$$v_{12} = 1; v_{22} = 0; v_{32} = -1.$$

Третья форма (Черт. 5 в).

$$v_{13} = y_{13} \cos(\omega_3 t + \alpha_3),$$

$$v_{23} = -\sqrt{2} y_{13} \cos(\omega_3 t + \alpha_3),$$

$$v_{33} = y_{13} \cos(\omega_3 t + \alpha_3).$$

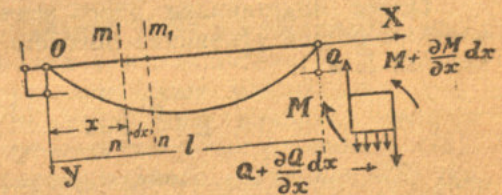
Полагая $y_{13} \cos(\omega_3 t + \alpha_3) = 1$, имеем:

$$v_{13} = 1; v_{23} = -\sqrt{2}; v_{33} = 1.$$

III. Колебания упругих тел

§ 7. В случае упругих тел вместо нескольких сосредоточенных масс, которыми мы условно заменяли массу всей балки, мы имеем систему, состоящую из неопределенно большого числа частиц, между которыми действуют силы упругости. Такая система характеризуется наличием бесконечно большого числа степеней свободы, а, следовательно, любое упругое тело может иметь бесконечно большое число собственных видов колебаний.

Однако для случая тонких стержней и пластинок задача колебания может быть значительно упрощена. Мы продолжим наше исследование колебания балки на двух опорах пролета l с постоянной по длине пролета жесткостью. Будем считать, что колебание происходит в одной из главных плоскостей изгиба балки, размеры поперечного сечения которой малы по сравнению с длиной.



Черт. 6.

Как известно, дифференциальное уравнение упругой линии при данных направлениях осей координат (черт. б) имеет вид:

$$EJ \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -M \dots \dots \dots (37)$$

Дифференцируем это уравнение два раза. Имеем:

$$\frac{d}{dx} \left(EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = - \frac{dM}{dx} = -Q$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = - \frac{dQ}{dx} = q \dots \dots \dots (37a)$$

Для статического равновесия в уравнении (37a) q есть интенсивность равномерно распределенной нагрузки, действующей на балку. При колебаниях балка, как упругая материальная система, будет находиться под влиянием сил инерции, равномерно распределенных по длине балки, интенсивностью:

$$q = - \frac{\gamma F}{g} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Здесь:

- F — площадь поперечного сечения стержня;
- γ — объемный вес;
- g — ускорение силы тяжести;
- v — переменная величина прогиба при колебаниях в сокращенной записи, вместо $v(x, t)$ ¹⁾.

После подстановки этого значения q в уравнение (37a) получим общее уравнение бокового колебания балки с постоянными E и J :

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = - \frac{\gamma F}{g} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

или:

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

а в сокращенной записи для общего случая:

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = (v'')'' = v^{IV} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \ddot{v}$$

$$(EJ v'')'' + \mu \ddot{v} = 0, \dots \dots \dots (38)$$

¹⁾ Ордината y уравнения (37) относится к статическому прогибу балки, а переменную величину прогиба при колебаниях мы для отличия, как и раньше, обозначали $v(x, t)$.

где:

$$\mu = \frac{\gamma F}{g} \quad \text{есть масса единицы длины балки.}$$

Для балок с конечным числом сосредоточенных масс мы имели систему совместных дифференциальных уравнений движения (21); в данном случае мы получили одно дифференциальное уравнение в частных производных, так как $v = v(x, t)$. Поскольку нагрузка с конечным числом точечных масс может с любой точностью заменить сплошное распределение масс, постольку между этими двумя случаями нет принципиальной разницы. Можно поэтому подойти к решению уравнения (38) тем же методом, какой мы применяли для случая балок с конечным числом точечных масс, а именно методом нормальных уравнений.

Так же, как и раньше, мы определим сначала круговые частоты и соответствующие формы свободных гармонических колебаний балки, или, иначе, нормальные виды колебаний. Предполагая, что все элементы балки совершают гармоническое колебание одинаковой частоты, положим в уравнении (38):

$$v(x, t) = v(x) \cos(\omega t + \alpha), \dots \dots \dots (38a)$$

где форма колебания $v(x)$ и круговая частота ω и начальная фаза пока неизвестны. Делая подстановку (38a) в (38), после деления на $\cos(\omega t + \alpha)$ получим:

$$(EJ v'')'' - \omega^2 \mu v(x) = 0 \dots \dots \dots (39)$$

Собственные формы колебаний $v_k(x)$ и собственные круговые частоты ω_k , где k может иметь значения от 1 до ∞ , должны удовлетворять этому линейному однородному дифференциальному уравнению четвертого порядка, которое соответствует системе однородных линейных уравнений (21).

Полный интеграл дифференциального уравнения (39) получится сложением четырех линейно независимых частных решений. Пусть $v_I(x)$, $v_{II}(x)$, $v_{III}(x)$ и $v_{IV}(x)$ представляют эти четыре частных независимых решения; это значит, что уравнение:

$$B_1 v_I(x) + B_2 v_{II}(x) + B_3 v_{III}(x) + B_4 v_{IV}(x) = 0 \dots (40)$$

может иметь место в том лишь случае, если все коэффициенты B_1, B_2, B_3, B_4 обращаются в нули. Общее решение уравнения (39) содержит четыре произвольных постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 и имеет вид:

$$v(x) = C_1 v_I(x) + C_2 v_{II}(x) + C_3 v_{III}(x) + C_4 v_{IV}(x) \dots (41)$$

Произвольные постоянные в уравнении (41) определяются по четырем граничным условиям, которые для балки на двух опорах будут:

$$v(0) = 0; v''(0) = 0;$$

$$v(l) = 0; v''(l) = 0,$$

т. е. прогиб и изгибающий момент на концах балки равны нулю.

Уравнению (39) можно придать вид:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{\omega^2 \mu}{EJ} v = 0.$$

Вводя обозначение $\frac{\omega^2 \mu}{EJ} = m^4$, получим:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - m^4 v = 0 \dots \dots \dots (42)$$

Если относить все рассуждения к частному случаю колебания призматического бруса, для которого приводятся ниже примеры расчета, то выводу формулы (42) может быть дан более прямой характер.

Уравнение $EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ интегрируется

подстановкой $v(x, t) = v(x) \cdot T$,

где $v(x)$ — функция только от x ,

T — " " от t

Тогда будем иметь:

$$EJ T v(x)^{IV} + \mu v(x) T'' = 0,$$

или

$$\frac{v(x)^{IV}}{v(x)} + \frac{\mu}{EJ} \cdot \frac{T''}{T} = 0.$$

Так как первое слагаемое есть функция только от x , а второе только от t , то сумма их может обратиться в нуль при условии, что каждое из слагаемых — постоянное

число; поэтому, полагая $\frac{v(x)^{IV}}{v(x)} = m^4$, мы найдем:

$$\frac{\mu}{EJ} \cdot \frac{T''}{T} = -m^4.$$

И далее, полагая $\frac{m^4 EJ}{\mu} = \omega^2$, придем к обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$v(x)^{IV} - m^4 v(x) = 0 \text{ и } T'' + \omega^2 T = 0.$$

Из этих уравнений сразу видно, что T есть гармоническая функция от t .

Путем непосредственной подстановки можно убедиться, что функции:

$v_I(x) = \sin mx$; $v_{II}(x) = \cos mx$; $v_{III}(x) = \operatorname{sh} mx$; $v_{IV}(x) = \operatorname{ch} mx$ являются частными интегралами уравнения (42). Они линейно независимы, и поэтому общий интеграл имеет вид:

$$v(x) = C_1 \sin mx + C_2 \cos mx + C_3 \operatorname{sh} mx + C_4 \operatorname{ch} mx \dots (43)$$

При $x = 0$ $v(0) = 0$. Следовательно:

$$C_2 + C_4 = 0.$$

При $x = 0$ $v''(0) = 0$ и значит:

$$m^2 (-C_2 + C_4) = 0.$$

Так как m не равно нулю, то

$$C_2 = C_4 = 0.$$

При $x = l$ $v(l) = 0$ и $C_1 \sin ml + C_3 \operatorname{sh} ml = 0$.

При $x = l$ $v''(l) = 0$ и $m^2 (-C_1 \sin ml + C_3 \operatorname{sh} ml) = 0$.

А так как m не равно нулю, то

$$C_1 \sin ml = 0$$

$$C_3 \operatorname{sh} ml = 0.$$

Величина $\operatorname{sh} ml$ при m , не равном нулю, не может быть равна нулю, следовательно $C_3 = 0$.

Остается только одно уравнение $C_1 \sin ml = 0$, которое может иметь место при $\sin ml = 0$, так как условие $C_1 = 0$ соответствует состоянию покоя.

Итак, уравнение частот будет:

$$\sin ml = 0 \dots \dots \dots (44)$$

Общее решение этого уравнения есть:

$$m_k l = k \pi,$$

где k есть целое число, которое может принимать значения целых чисел, как упомянуто выше, от 1 до ∞ .

Следовательно:

$$m_k = \frac{k \pi}{l}; \quad m^4_k = \frac{k^4 \pi^4}{l^4},$$

или:

$$\omega_k = \frac{k^2}{l^2} \pi^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \dots \dots \dots (45)$$

Полагая в уравнении (43) $C_2 = C_3 = C_4 = 0$, получим соответствующие формы собственных колебаний:

$$v_k(x) = C_1 \sin k \pi \frac{x}{l} \dots \dots \dots (46),$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Первая собственная круговая частота определится из уравнения (45), полагая $k=1$:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}.$$

Соответствующая форма собственных колебаний, полагая $C_1 = 1$, будет:

$$v_1(x) = \sin \frac{\pi x}{l};$$

Вторая собственная круговая частота:

$$\omega_2 = \frac{4 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}};$$

Вторая форма собственных колебаний:

$$v_2(x) = \sin \frac{2 \pi x}{l};$$

Третья собственная круговая частота:

$$\omega_3 = \frac{9 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}};$$

Третья форма собственных колебаний:

$$v_3(x) = \sin \frac{3 \pi x}{l}.$$

Сравнение этих результатов со значениями (30), полученными для балки с тремя сосредоточенными грузами, дает достаточно близкое совпадение.

Из этого видно, что упругая линия при колебании является синусоидой, причем число полуволи в последовательных видах

колебания равно 1, 2, 3. Наложением таких синусоидальных колебаний можно представить любой вид свободных колебаний, вызванных любыми начальными условиями.

Поэтому теперь уравнение (38 а) после подстановки в него

$$v(x) = C \sin \frac{k \pi x}{l} \text{ получит вид:}$$

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k \pi x}{l} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) \dots (47)^1$$

Произвольные постоянные a_k и b_k следует определить в каждом частном случае так, чтобы удовлетворялись начальные условия.

§ 8. Приближенные методы определения частот собственных колебаний. Между тем, в практических приложениях при расчетах колебаний инженерных сооружений имеет по преимуществу значение знание наименьшей частоты собственных колебаний конструкций. Эта задача с большей степенью точности может быть решена приближенными методами.

В настоящее время известны многие приближенные методы и приближенные формулы для решения вопросов колебания — методы Релея, Ритца, Коши, Коши-Липшица, метод последовательных приближений, формулы Дюнкерлея, Баумана, Морлея и др. Из всех перечисленных методов для решения сложных задач наиболее пригодны метод Релея и, как его видоизменение и дальнейшее развитие, метод последовательных приближений. Однако необходимо подчеркнуть, что овладение этими методами возможно только при условии знания основных положений и формул точных методов расчета, почему мы и предпослали краткое изложение их.

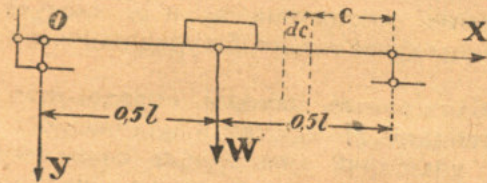
§ 9. Метод Релея. Сущность метода заключается в том, что нужно сделать некоторые допущения относительно конфигурации системы во время колебания. Поэтому, если будет известна форма колебаний системы, то круговая частота может быть определена из рассмотрения энергии системы, т. е., другими словами, задача решится применением ранее изложенного энергетического метода.

1) Уравнение (47) равносильно уравнению:

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{k \pi x}{l} \cos (\omega_k t + \alpha_k).$$

Для примера рассмотрим колебания балки постоянного поперечного сечения, несущей сосредоточенный груз W по середине пролета l (черт. 7). Если вес балки ql мал по сравнению с грузом W , то можно допустить, что форма колебаний балки, т. е. кривая прогибов балки, имеет такую же форму, как кривая статических прогибов от груза W . Обозначим ординаты кривой статических прогибов от силы W через y_c , а прогиб под силой W через y_1 .

Имеем выражения:



Черт. 7.

$$y_1 = \frac{Wl^3}{48 EJ}; \quad y_c = \frac{W}{48 EJ} (3cl^2 - 4c^3),$$

откуда:

$$y_c = y_1 \frac{3cl^2 - 4c^3}{l^3}$$

Это будет вертикальное перемещение элемента qdc балки, взятого на расстоянии c от правой опоры.

Кинетическая энергия веса всей балки равна:

$$2 \int_0^{l/2} \frac{qdc}{2g} \left(\dot{y}_1 \frac{3cl^2 - 4c^3}{l^3} \right)^2 = \frac{17}{35} ql \frac{\dot{y}_1^2}{2g}. \quad (48)$$

Кинетическая энергия груза W равна:

$$\frac{W \dot{y}_1^2}{2g}$$

Полная кинетическая энергия будет равна:

$$W \frac{\dot{y}_1^2}{2g} + \frac{17}{35} ql \frac{\dot{y}_1^2}{2g} = \frac{\dot{y}_1^2}{2g} \left(W + \frac{17}{35} ql \right) = \frac{\dot{y}_1^2}{2g} W_0.$$

Отсюда мы заключаем, что кинетическая энергия системы из груза и собственного веса балки эквивалентна энергии одного груза $W_0 = W + \frac{17}{35} ql$, приложенного в середине балки. Следовательно, период колебания системы будет такой же, как при невесомой балке, нагруженной посередине грузом $W_0 = W + \frac{17}{35} ql$.

Однако уравнение (48) может быть применено и в том случае, когда $W = 0$. Эта возможность широкого применения уравнения (48) вытекает из того, что формы упругих кривых от сосредоточенных грузов и равномерно распределенных нагрузок мало отличаются друг от друга.

Делая допущение, что $\frac{17}{35} ql$ массы всей балки сосредоточено в середине, определим период колебания балки под действием собственного веса.

По формуле (18) имеем:

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{m}}; \quad C = \frac{48 EJ}{l^3}.$$

Значит:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{48 EJ \cdot 35 g}{l^3 \cdot 17 ql}} = 9,95 \sqrt{\frac{EJ g}{ql^4}};$$

$$m = \frac{17}{35} \cdot \frac{ql}{g}.$$

Отсюда период колебаний:

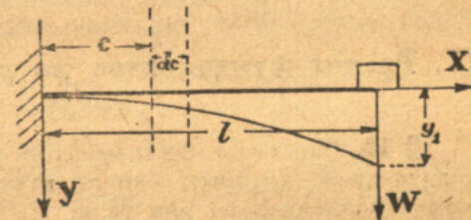
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 0,632 \sqrt{\frac{ql^4}{EJ g}}.$$

Как видно, ошибка приближенного решения для этого частного случая меньше 1%, так как точное решение дает:

$$\tau = 0,637 \sqrt{\frac{ql^4}{EJ g}}$$

Для второго примера определим период колебания простой консольной балки (черт. 8).

Следуя методу Релея, допустим, что форма упругой линии балки при колебании та же, что вызываемая статическим грузом, приложенном на конце.



Черт. 8.

Обозначив вертикальное перемещение груза W через y_1 , получим величину кинетической энергии для всей балки постоянного поперечного сечения:

$$\int_0^l \frac{q}{2g} \left(\dot{y}_1 \frac{3c^2l - c^3}{2l^3} \right) dc = \frac{33}{140} ql \frac{\dot{y}_1^2}{2g} \dots (49).$$

Период колебания балки будет тот же, что для невесомой консольной балки, несущей на конце груз, равный

$W + \frac{33}{140} ql$. Теперь на основании высказанных выше соображений, полагая $W = 0$ и считая массу балки в доле $\frac{33}{140} ql$, сосредоточенной на конце консоли, получим:

$$C = \frac{3EJ}{l^3}; m = \frac{33}{140} \frac{ql}{g}.$$

Тогда:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{C}{m}}, \text{ а } \tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}} = 3,567 \sqrt{\frac{ql^4}{EJg}}.$$

Решая точно ту же задачу, мы получили бы:

$$\tau = \frac{2\pi}{3,515} \sqrt{\frac{ql^4}{EJg}},$$

т. е. ошибка приближенного решения составляет около 1,5%.

Примеры определения низших частот (основного тона) колебания более сложных упругих систем и конструкций будут приведены дальше.

IV. Расчет фундаментов на действие динамической нагрузки

§ 10. Все виды фундаментов под машины по роду сил воздействия, которым они подвергаются при работе машин, можно разделить на два типа:

а) фундаменты, подвергающиеся ударной нагрузке (фундаменты под кузнечные молоты) и

б) фундаменты, подвергающиеся динамическим нагрузкам в виде сил инерции возвратно движущихся и вращающихся частей (поршневые машины, двигатели, турбины).

Тело фундаментов первого типа представляет собой сплошной массив, по преимуществу бетонный или железобетонный и реже кирпичный. Конструкции фундаментов второго рода бывают как в виде сплошного массива, так и в виде каркаса рам из железобетона, причем последняя конструкция имеет применение под фундаменты турбогенераторов, турбовоздуховок и т. д., т. е. высокоуровневенных машин.

Точный расчет фундаментов под машины на динамические нагрузки представляет одну из труднейших задач прикладной механики.

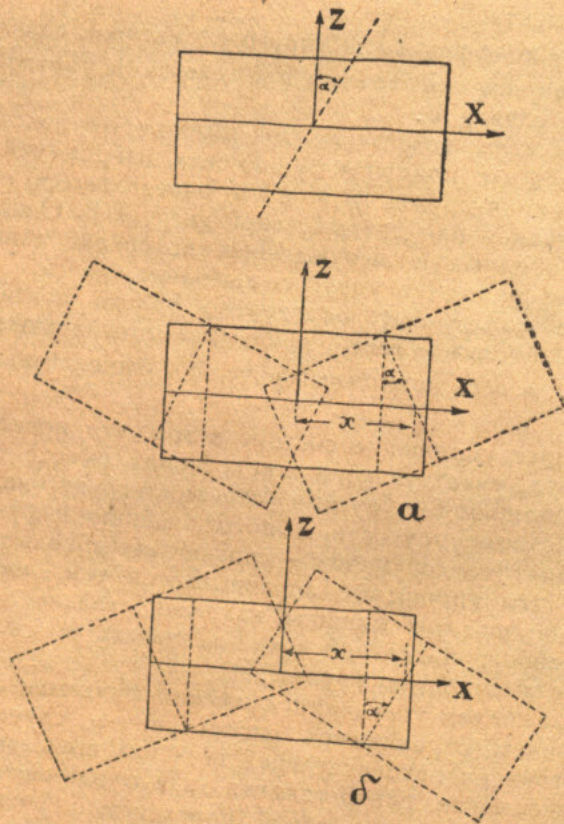
Трудность вопроса обусловлена, с одной стороны, сложностью математического анализа динамических процессов, возбуждаемых ударом в упругой материальной среде, с другой стороны, отсутствием надлежащих экспериментальных данных о некоторых свойствах материалов, упругих свойствах грунта, коэффициентах восстановления, коэффициентах затухания колебаний и т. д. Вместе с тем при расчете с особой остротой возникают вопросы о допускаемых напряжениях при действии динамических нагрузок; в частности весьма актуальным является вопрос о сопротивлении бетона действию удара, так как известно множество аварий от раздробления бетона под наковальной молота. В некоторых случаях особое значение приобретает также вопрос о сопротивлении грунта действию многократных ударов.

Наконец, во всех случаях расчетов фундаментов под машины возникают вопросы о распространении колебаний в грунте, как упругой среде, а следовательно, и о влиянии этих колебаний на прочность и устойчивость окружающих сооружений.

Естественно, что ответы на все эти вопросы могут быть получены путем изучения работы фундамента с некоторыми допущениями и упрощениями, не отражающимися существенно на точности расчета и вместе с тем облегчающими выкладки и получение выводов, имеющих практическое приложение.

Чтобы подкрепить доказательствами приведенные выше соображения, ниже дается метод расчета фундаментов под поршневые машины и двигатели, относящиеся, как известно, к числу наиболее неуравновешенных машин. Расчет фундаментов на динамическую нагрузку под кузнечные молоты и под турбины излагается в курсах „Оснований и фундаментов“, причем расчет рамных фундаментов на динамическую нагрузку сводится к определению собственных частот колебаний рам и проверке на резонанс. Расчет же фундаментов на прочность делается на основании статического метода ра-

$P_x \sin \omega t$ — ее горизонтальную составляющую,
 Q и m — вес и масса фундамента и машины, а также
 оборудования, установленного на фундаменте и принимаю-
 щего участие в колебаниях,
 F — площадь подошвы фундамента,



Черт. 9.
 (На черт. 9 надо исправить α на φ).

J — момент инерции площади подошвы относительно оси, проходящей через центр тяжести подошвы, перпендикулярно плоскости колебания,

Θ — момент инерции массы, участвующей в колебании относительно оси, проходящей через общий центр тяжести колеблющейся массы, перпендикулярно к плоскости колебания,

h — расстояние от центра тяжести всей массы до подошвы фундамента.

δ_{11} — вертикальная упругая осадка фундамента от вертикальной силы, равной единице;

δ_{22} — горизонтальное упругое перемещение фундамента от горизонтальной силы, равной единице;

δ_{33} — угол поворота фундамента от единичного момента.

Теперь дифференциальные уравнения вынужденных колебаний фундамента будут, во-первых:

$$z = \delta_{11} \left(P_z \sin \omega t - m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} \right),$$

или:

$$mz'' + \frac{z}{\delta_{11}} = P_z \sin \omega t.$$

А принимая во внимание, что

$$C_x F = \frac{1}{\delta_{11}},$$

имеем:

$$mz'' + C_x F z = P_z \sin \omega t \quad \dots \dots (50);$$

и, во-вторых:

$$(x - h\varphi) = \delta_{22} (P_x \sin \omega t - mx''),$$

или:

$$mx'' + \frac{x - h\varphi}{\delta_{22}} = P_x \sin \omega t.$$

А так как по аналогии с предыдущим:

$$C_x F = \frac{1}{\delta_{22}}, \text{ то:}$$

$$mx'' + C_x F (x - h\varphi) = P_x \sin \omega t \quad \dots \dots (51)$$

(Горизонтальное перемещение центра тяжести складывается из двух компонентов: перемещение от скольжения подошвы фундамента и поворота массива вокруг вертикальной оси, черт. 10).

$$\varphi = \delta_{33} (M \sin \omega t + C_x F \cdot xh - \Theta\varphi''),$$

или:

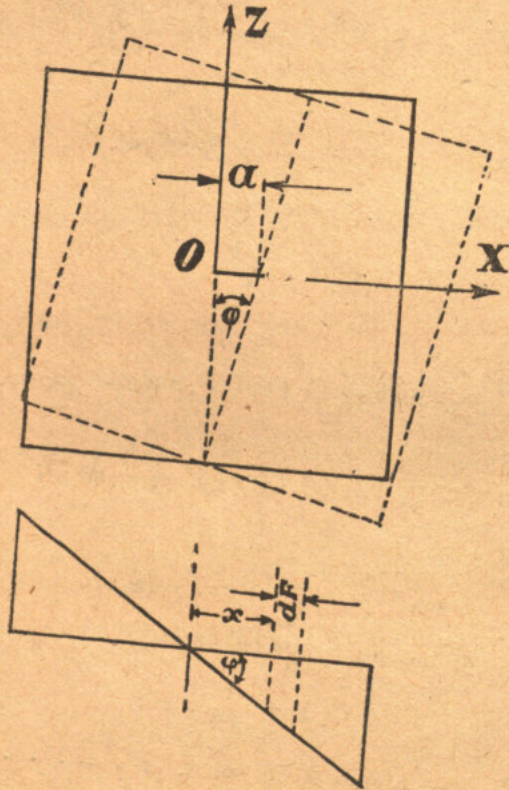
$$\Theta\varphi'' - C_x F xh + \frac{\varphi}{\delta_{33}} = M \sin \omega t$$

Коэффициент поворота:

$$\frac{1}{\delta_{33}} = C_z J - Qh + C_x Fh^2.$$

Поэтому:

$$\Theta\varphi'' - C_x F \cdot x \cdot h + (C_z J - Qh + C_x Fh^2)\varphi = M \sin \omega t \quad (52)$$



Черт. 10.

Напомним, что δ_{33} есть угол поворота от единичного момента, приложенного к системе. Отношение единичного момента к вызванному им углу поворота есть коэффициент поворота, на который надо умножить действующий момент, чтобы получить действительный угол поворота. Следовательно, коэффициент при φ выражает собою величину момента сил инерции от поворота всей системы вокруг оси, перпендикулярной плоскости колебаний, на угол

$\varphi=1$. Величина полного момента, приложенного к системе, складывается:

а) из момента реактивных сил упругого основания, определяемого из:

$$dM_1 = \sigma_x dF_x = C_x x\varphi dF \cdot x$$

и равного:

$$M_1 = C_x \varphi \int_F x^2 dF = C_x J\varphi,$$

б) момента горизонтальных сил сдвига подошвы фундамента по основанию:

$$M_2 = C_x F a h,$$

или, считая по малости a , что $a = \varphi h$,

$$M_2 = C_x F h^2 \varphi,$$

в) момента собственного веса установки относительно оси, проходящей через центр тяжести O (черт. 10) и равного:

$$M_3 = -Qa = -Qh\varphi.$$

Теперь можно написать:

$$M\delta_{33} = (M_1 + M_2 + M_3) \delta_{33} = \varphi,$$

откуда:

$$\delta_{33} = \frac{1}{C_x J + C_x Fh - Qh}.$$

Итак, дифференциальные уравнения вынужденных колебаний фундамента будут следующие:

$$mz'' + C_z Fz = P_z \sin \omega t,$$

$$mx'' + C_x F(x - h\varphi) = P_x \sin \omega t,$$

$$\Theta\varphi'' - C_x Fxh + (C_z J - Qh + C_x Fh^2) \varphi = M \sin \omega t \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots (53)$$

Здесь $M = P_x z_0 - P_z x_0$, причем x_0 и z_0 — координаты точки приложения внешней возмущающей силы, а ω — частота вращения машины, равная числу оборотов, которое делает ма-

шина в 2π секунд, т. е. $\omega = \frac{2\pi}{60} \cdot n$, где n — число оборотов машины в минуту, а t — время.

Из полученной системы уравнений (53) второе и третье

уравнения зависимы между собою, а первое уравнение, соответствующее вертикальным колебаниям фундамента, не зависит от двух остальных и может быть решено самостоятельно.

Обозначая через ω_z — собственную частоту вертикальных колебаний фундамента, имеем на основании § 4 (примеры 1 и 2):

$$\omega_z^2 = \frac{C_z F}{m}$$

Решение первого дифференциального уравнения можно написать в форме:

$$z = \frac{P_z}{m(\omega_z^2 - \omega^2)} \sin \omega t \quad \dots \quad (54)$$

(см. второй член уравнения (15a). Что же касается первого члена уравнения (15a), то за малостью гармоник свободных колебаний он не учитывается).

Из формулы (54) усматривается, что если рабочая частота машины будет стремиться к частоте ω_z собственных вертикальных колебаний фундамента, то знаменатель выражения (54) стремится к нулю, и вертикальные перемещения фундамента будут возрастать. Поэтому надо так подобрать массу фундамента и площадь подошвы, чтобы ω_z было бы как можно больше ω и, во всяком случае, разность между значениями этих двух частот должна быть не менее 30%. Если фундамент совершает только вертикальные колебания, т. е. если на фундамент действует только вертикальная периодическая нагрузка, линия действия которой проходит через центр тяжести фундамента, то расчет на этом и заканчивается.

В общем же случае действия периодической нагрузки, каковой мы и рассматриваем, надо решить остальные два совместных дифференциальных уравнения (53).

Берем частные решения для x и φ в форме:

$$x = a \sin \omega t; \varphi = b \sin \omega t.$$

Подстановкой этих решений в два последних уравнения (53) получим:

$$\left. \begin{aligned} -m\omega^2 a + C_x Fa - C_x \cdot Fhb &= P_x \\ -C_x Fha + (C_z J - Qh + C_x Fh^2 - \omega^2 \Theta) b &= M \end{aligned} \right\} \dots (55)$$

Отсюда определяем амплитуды колебаний для x и φ .

$$a = \frac{MC_x Fh + P_x (C_z J - Qh + C_x Fh^2 - \Theta\omega^2)}{\Delta(\omega)} \dots (56)$$

$$b = \frac{(C_x F - m\omega^2) (M + P_x C_x Fh)}{\Delta(\omega)} \dots (57)$$

причем

$$\Delta(\omega) = (C_z J - Qh + C_x Fh^2 - \Theta\omega^2) (C_x F - m\omega^2) - C_x^2 F^2 h^2.$$

Значения амплитуд вынужденных колебаний a и b будут зависеть от $\Delta(\omega)$, которое является в свою очередь функцией частоты.

Те значения ω , которые обращают в нуль $\Delta(\omega)$, будут соответствовать случаям резонанса, так как a и b становятся бесконечно большими, а это как раз и есть условие резонанса; следовательно, значения критических частот ω_1 и ω_2 , соответствующих резонансу, найдутся как корни уравнения:

$$\Delta(\omega) = 0 \quad \dots \quad (58)$$

Это условие (58), по подстановке вместо $\Delta(\omega)$ его значения и после группировки, переписывается так:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{\omega_x^2 + \omega_\varphi^2}{\alpha} \right) + \frac{\omega_x^2 \cdot \omega_\varphi^2}{\alpha} = 0, \dots (59)$$

где $\omega_x^2 = \frac{C_x F}{m}$ значение частоты собственных колебаний

сдвига, когда ось OZ фундамента перемещается в горизонтальном направлении параллельно самой себе.

$$\omega_\varphi^2 = \frac{C_z J - Qh}{\Theta_0}; \dots (60)$$

ω_φ — значение частоты собственных вращательных колебаний фундамента относительно оси, проходящей через центр тяжести подошвы, перпендикулярно плоскости колебаний;

Θ_0 — момент инерции колеблющейся массы относительно той же оси.

$$\alpha = \frac{\Theta}{\Theta_0}$$

Решая уравнение (59), будем иметь:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_x^2 + \omega_\varphi^2}{2\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_x^2 + \omega_\varphi^2}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\omega_x^2 \omega_\varphi^2}{\alpha^2}} \quad (61)$$

Два корня ω_1^2 и ω_2^2 дадут значения двух главных собственных частот фундамента, при приближении к которым частоты вращения машины, амплитуды колебаний a и b будут сильно возрастать.

Каждой собственной частоте колебаний, как нам уже известно, соответствует своя форма колебаний. Формы колебаний, соответствующие главным частотам ω_1 и ω_2 , представлены на черт. 9а и 9б.

Следовательно, в общем случае каждое из значений главных собственных частот колебания фундамента ω_x , ω_1 и ω_2 должно быть больше рабочей частоты машины по крайней мере на 30%.

Этим заканчивается расчет вынужденных колебаний фундамента. В заключение следует упомянуть о том, что в процессе исследования выявилась необходимость иметь значения коэффициентов C_x и C_z .

Как правило, эти коэффициенты должны быть определены экспериментальным путем на месте.

V. Расчет балок и рам при ударе

§ 12. Явление удара в строительной механике характеризуется тем, что нагрузка на элементы или все сооружение действует внезапно своим полным значением, обладая в общем случае запасом кинетической энергии.

Как известно из теоретической механики, при ударе скорости ударяющихся тел сильно изменяются, а так как это изменение скорости происходит в течение крайне незначительного промежутка времени, то ускорения, а следовательно, и силы взаимодействия между телами достигают больших значений. Этим объясняется то, что механический эффект удара, даже при небольших массах, гораздо больше, нежели при спокойном воздействии одного тела на другое. То же явление объясняется и законом живых сил; ударяющее тело, расходуя свою живую силу на небольшом пути, равном величине упругой деформации, действует с большой силой; работа этой силы равна живой силе, накопленной телом в своем движении.

В пределах упругости работа сил упругости численно равна накапливаемой таким образом потенциальной энергии упругой системы.

Следовательно, при ударе критерием расчета становится не равновесие сил, а равенство количеств энергии.

Однако предельные деформации и напряжения, возникающие в упругой системе, носят мгновенный характер.

Внутренние силы упругости, соответствующие накопленной в момент удара потенциальной энергии, и сопутствующие им предельные деформации после удара остаются неуравновешенными внешними силами — в результате возникают колебания системы.

Эти колебания под влиянием сил сопротивления постепенно затухают, пока не наступит равновесие. Равновесное положение будет характеризоваться наличием величины деформаций и напряжений, соответствующих статическому приложению нагрузки. Если же нагрузка при ударе не осталась на системе, то деформации и напряжения в системе будут равны нулю.

§ 13. Вывод формул. Для вывода формул при расчете на удар сделаем некоторые допущения:

1) будем пренебрегать потерей энергии при ударе и полагать, что вся живая сила ударяющего тела переходит в потенциальную энергию системы — это допущение идет в запас прочности;

2) будем считать, что вид упругой линии балки или рамы при ударе такой же, как и при статическом действии силы в месте удара.

Все дальнейшие выводы будут относиться к таким ударным эффектам, которые вызывают в упругой системе величины внутренних напряжений и деформаций, не превосходящих пределов упругости. Следовательно, при выводах будут применяться все известные нам основные принципы и зависимости из сопротивления материалов.

Рассмотрим сначала случай падения груза весом P с высоты H на горизонтальную балку.

Введем обозначения:

δ — прогиб от статической нагрузки;

δ_d — прогиб от динамической нагрузки;

σ и σ_d — соответственно наибольшие нормальные напряжения;

U и U_d — соответственно-потенциальная энергия;

T — кинетическая энергия.

Обозначим отношение прогиба от динамической нагрузки, т. е. при ударе, к прогибу от статической нагрузки для одного и того же сечения через α .

Если пренебречь влиянием скалывающих напряжений, то будем иметь:

$$\alpha = \frac{\delta_d}{\delta} = \frac{\sigma_d}{\sigma}, \dots \dots \dots (62),$$

ибо прогибы прямо пропорциональны нормальным напряжениям.

С другой стороны, $\sigma = \frac{M}{W}$, причем M есть односторонний момент внешних сил или суммарный момент внутренних сил упругости.

При динамическом действии силы имеет реальный смысл только второе толкование. Это позволяет нам равенство (62) переписать так:

$$\alpha = \frac{\delta_\partial}{\delta} = \frac{M_\partial}{M}$$

Как известно, общее выражение потенциальной энергии при изгибе:

$$U = \int_0^s \frac{M^2 dx}{2EJ}$$

т. е. величина потенциальной энергии пропорциональна M^2 , или P^2 .

Следовательно, соотношение между U и U_∂ будет:

$$U_\partial = \alpha^2 U$$

С другой стороны

$$U_\partial = P(H + \delta_\partial),$$

$$а \quad U = \frac{P\delta}{2},$$

а потому

$$P(H + \alpha\delta) = \alpha^2 \frac{P\delta}{2}$$

Отсюда, решая это уравнение относительно α , имеем:

$$\alpha = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta}} \dots \dots \dots (63)$$

или заменяя

$$\alpha = \frac{\delta_\partial}{\delta},$$

получим:

$$\delta_\partial = \delta + \sqrt{\delta^2 + 2H\delta} \dots \dots \dots (64)$$

При $H=0$, т. е. при внезапном приложении силы P полным ее значением без начальной скорости будет:

$$\delta_\partial = 2\delta \dots \dots \dots (64a),$$

т. е. деформации в этом случае вдвое превышают деформации при статическом действии той же силы, а следовательно, и $\sigma_\partial = 2\sigma$.

Если же, наоборот, высота падения груза сравнительно с δ велика, то можно пренебречь δ и получим другую формулу:

$$\delta_\partial = \sqrt{2H\delta}$$

В общем случае ударное действие нагрузки определяется, как было сказано ранее, из равенства кинетической энергии падающего груза и накопленной потенциальной энергией упругой системы:

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{2} = U_\partial, \quad \text{или} \quad \frac{Pv^2}{2g} = \alpha^2 \frac{P\delta}{2},$$

откуда

$$\alpha = \frac{v}{\sqrt{2g\delta}} \quad \text{и} \quad \delta_\partial = v \sqrt{\frac{\delta}{g}}$$

Теперь выведем формулы для δ_∂ в зависимости от значения потенциальной энергии.

$$\delta_\partial = \alpha\delta = \sqrt{\frac{U_\partial}{U}} \cdot \delta = \sqrt{\frac{U_\partial}{U}} \cdot \frac{2U}{P} = \sqrt{\frac{4U \cdot U_\partial}{P^2}}$$

так как

$$\frac{P\delta}{2} = U$$

Так как U пропорциональна P^2 , то $\frac{U}{P^2}$ есть величина потенциальной энергии от единичной силы, статически приложенной в месте удара, а $\frac{4U}{P^2}$ — тоже от статически приложенной силы, равной 2. Величину этой потенциальной энергии обозначим через U_2 , она численно равна δ_2 .

Тогда будем иметь:

$$\delta_\partial = \sqrt{U_\partial U_2},$$

а так как:

$$U_\partial = T,$$

то окончательно получим:

$$\delta_\partial = \sqrt{TU_2} \dots \dots \dots (65)$$

§ 14. Формулы для расчета на прочность при ударе

$$\sigma_\partial = \sigma \cdot \frac{\delta_\partial}{\delta} = \frac{\sigma}{\delta} \sqrt{TU_2} \dots \dots \dots (66)$$

или:

$$\sigma_{\partial} = \frac{M}{W_{\partial}} \sqrt{TU_2} \dots \dots \dots (66a)$$

Для любой статической нагрузки отношение $\frac{\sigma}{\delta}$ в формуле (66) есть величина постоянная; выбирая $P_2 = 2$, имеем:

$$\sigma_{\partial} = \frac{\sigma_2}{\delta_2} \sqrt{TU_2}$$

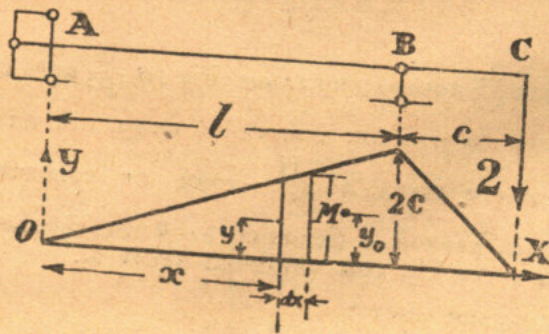
или, так как $\delta_2 = U_2$, то будем иметь:

$$\sigma_{\partial} = \sigma_2 \sqrt{\frac{T}{U_2}}$$

или же

$$\sigma_{\partial} = \sigma_1 \sqrt{\frac{T}{U_1}} \dots \dots \dots (66 б).$$

Здесь $\sigma_2 = \frac{M_2}{W}$ есть наибольшее нормальное напряжение в опасном сечении от силы 2, статически приложенной в месте удара, а σ_1 — тоже от единичной нагрузки.



Черт. 11.

(На черт. 11 и 12 линия ABC должна быть сплошной).

§ 15. Пример 1. Определить прогиб конца С консоли балки АВ (черт. 11) при ударе грузом $P = 10$ кг, падающим со скоростью в момент удара $v = 4 \frac{м}{сек}$. Жесткость балки EJ . Пролет балки 1 м.

Для определения δ_{∂} пользуемся формулой (65). Для этого вместо силы $P = 10$ кг прикладываем в точке статически силу 2. Построим от нее эпюру M и найдем U_2 .

$$U_2 = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} = \int_0^l \frac{M dx \cdot M}{2EJ} = \frac{\Omega_1 y_0}{EJ},$$

где Ω_1 — площадь эпюры изгибающих моментов; y_0 — ордината центра тяжести площади эпюры.

Следовательно, U_2 определится как статический момент площади эпюры моментов относительно оси иксов:

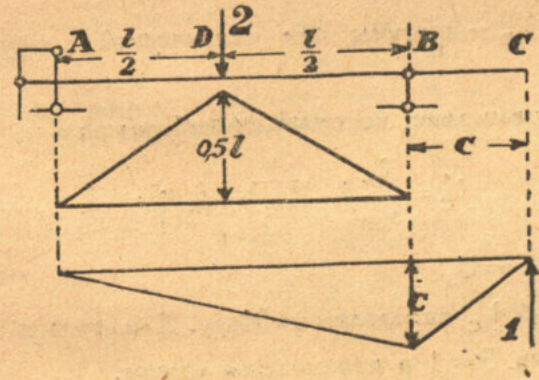
$$U_2 = \frac{2c(1+c)}{2} \cdot \frac{2c}{3EJ} = \frac{2c^2(1+c)}{3EJ}$$

После этого определяем величину кинетической энергии:

$$T = \frac{Pv^2}{2g}$$

И, наконец,

$$\delta_{\partial} = \sqrt{TU_2} = vc \sqrt{\frac{P(1+c)}{3gEJ}}$$



Черт. 12.

Пример 2. Определить прогиб по середине балки и на конце консоли при ударе в середине балки D по данным предыдущей задачи.

Дано: EJ, l .

Прогиб посередине:

$$\delta_D' = \sqrt{TU_2},$$

где:

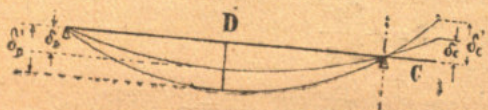
$$U_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot EJ} = \frac{l^3}{24 EJ}$$

Следовательно,

$$\delta_D' = \sqrt{\frac{Tl^3}{24 EJ}}$$

Прогиб на конце консоли (черт. 13).

Для определения прогиба на конце консоли при ударе в середине балки будем исходить из того условия, что форма упругой линии балки при динамической нагрузке (ударе) будет такая же, что и при статической, например, при $P=2$, т. е. будет иметь место соотношение:



Черт. 13.

$$\frac{\delta_c'}{\delta_c} = \frac{\delta_D'}{\delta_D}$$

или

$$\frac{\delta_c'}{\delta_{2c}} = \frac{\delta_D'}{\delta_{2D}}$$

где δ_{2c} и δ_{2D} — прогибы при статической нагрузке от силы $P=2$.

Следовательно, искомый прогиб равен:

$$\delta_c' = \frac{\delta_{2c}}{\delta_{2D}} \sqrt{TU_2} = \delta_{2c} \sqrt{\frac{T}{U_2}}$$

так как $\delta_{2D} = U_2$.

Прогиб δ_{2c} определим по Мору. Для этого в точке С приложим груз $P=1$ и перемножим эпюры. Имеем:

$$\delta_{2c} = \int \frac{M_2 M_1 dx}{EJ} = \frac{\Omega y_0}{EJ} = \frac{l^2}{4} \cdot \frac{c}{2EJ} = \frac{l^2 c}{8EJ}$$

И, наконец:

$$\delta_c' = \sqrt{\frac{3T \cdot l}{8EJ}}$$

Если бы надо было определить наибольшее нормальное напряжение в месте удара, то, воспользовавшись формулой (66 б), мы определяем сначала σ_2 :

$$\sigma_2 = \frac{M_2}{W} = \frac{l}{2W}; U_2 = \frac{l^3}{24 EJ}$$

Следовательно:

$$\sigma_D = \frac{l}{2W} \sqrt{\frac{T \cdot 24 EJ}{l^3}} = \sqrt{\frac{6TEJ}{W^2 l}}$$

Пример 3. Определить стрелу прогиба и наибольшие нормальные напряжения в балке с двумя заземленными концами от удара посередине (черт. 14).

Дано: длина балки $l=2$ м; $E=2,1 \cdot 10^6 \frac{кг}{см^2}$; сечение:

двутавр № 10; $J=180,4$ см⁴; $P=100$ кг; высота падения груза $H=10$ см.

Решение: строим эпюру M от силы 2, приложенной в месте удара. Площадь этой эпюры равна:

$$\Omega = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,5 \cdot 4 = \frac{l^2}{8}$$

Ордината центра тяжести каждого из треугольников:

$$y_0 = 0,33 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

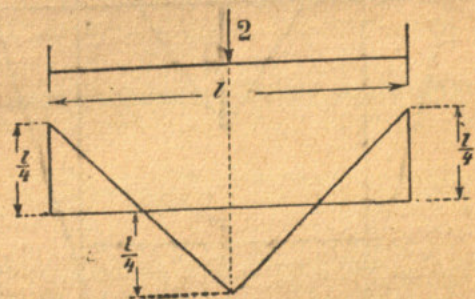
следовательно:

$$U_2 = \frac{\Omega y_0}{EJ} = \frac{l^3}{96 EJ}$$

$$\delta_D = \sqrt{\frac{Tl^3}{96 EJ}}$$

$$\sigma_D = \sigma_2 \sqrt{\frac{T}{U_2}} = \frac{M_2}{W} \sqrt{\frac{T}{U_2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{Tl^3 \cdot 96 EJ}{4^2 W^2 l^3}} = \sqrt{\frac{12 EJ T}{l W^2}}$$



Черт. 14.

Пренебрегая произведением $P\delta_D$, т. е. работой силы P на расстоянии упругого прогиба δ_D , имеем:

$$T = PH = 1000 \text{ кг. см};$$

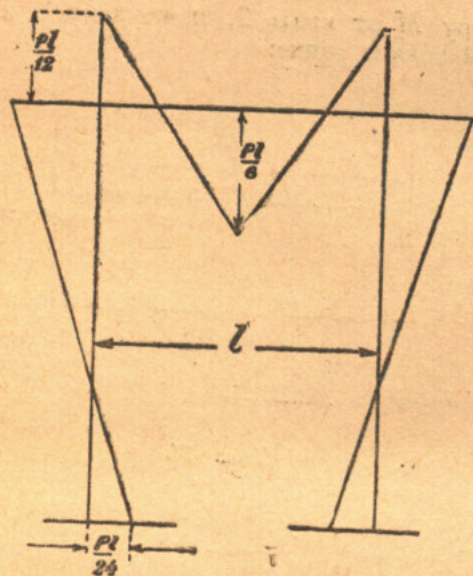
$$W = \frac{2J}{h}$$

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{12 EJ \cdot 1000 \cdot h^3}{4J^3}} = \sqrt{\frac{46000 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 10^2}{200 \cdot 4 \cdot 180,4}} = 8000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$$

При статическом же действии нагрузки:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{100 \cdot 200 \cdot 5}{8 \cdot 180,4} = 69 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$$

Пример 4. Рама данного пролета l и данных жесткостей стоек и ригеля подвергается действию удара груза P , падающего на середину балки с высоты H (черт. 15). Определить:



Черт. 15.

M , изображенную на черт. 15, на такую же эпюру $P=1$.

- 1) прогиб по середине ригеля в предположении, что высота падения $H=0$;
- 2) прогиб по середине ригеля;
- 3) наибольшее нормальное напряжение.

Решение: принимаем жесткости всех стержней одинаковыми.

- 1) Для определения прогиба по середине ригеля при $H=0$, имеем:

$$\delta_D = 2\delta.$$

Прогиб от статически приложенной силы P по середине ригеля определим по Мору, для чего по известному правилу Верещагина перемножим эпюру

Тогда:

$$\delta = \frac{1}{EJ} \left[\left(\frac{Pl}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2l}{6} \right) \cdot \frac{9}{8} + \left(\frac{Pl}{12} \cdot \frac{Pl}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2l}{12} \right) \cdot \frac{9}{8} \right] = \frac{Pl^3}{96 EJ}$$

$$\delta_D = \frac{2Pl^3}{96 EJ} = \frac{Pl^3}{48 EJ}$$

- 2) Для определения $\sigma_D = \sigma_2 \sqrt{\frac{T}{U_2}}$ найдем сначала составляющие правую часть значения выражений.

U_2 определим, взяв сумму статических моментов площадей эпюры от силы 2 относительно контура рамы. Но так

как выражение для прогиба $\delta = \frac{Pl^3}{96 EJ}$ было уже получено,

то остается только взять $P=2$, и мы получим $U_2 = \frac{l^3}{48 EJ}$,

ибо $\delta_2 = U_2$. Следовательно, прогиб по середине ригеля при ударе равен:

$$\delta_D = \sqrt{TU_2} = \sqrt{\frac{Tl^3}{48 EJ}}$$

- 3) Наибольшее нормальное напряжение будет в середине пролета. Здесь:

$$\delta_2 = \frac{M_2}{W} = \frac{2l}{6W} = \frac{l}{3W},$$

следовательно,

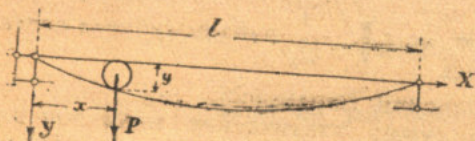
$$\delta_D = \frac{l}{3W} \sqrt{\frac{T \cdot 48 EJ}{l^3}} = \frac{4}{W} \sqrt{\frac{TEJ}{3l}}$$

VI. Динамическое действие подвижной нагрузки

§ 16. Всякая подвижная нагрузка оказывает на поддерживающую ее конструкцию динамическое воздействие. Полный учет этого воздействия даже на такие конструкции, как мосты, подкрановые балки и т. д., является задачей очень сложной и практически трудно решаемой. Поэтому до сих пор в нормах при расчете на подвижную нагрузку для

определения напряжений вводится так называемый динамический коэффициент.

Выбор и назначение величины этого коэффициента может быть произведено правильно только при условии изучения и понимания тех явлений, которые происходят в упругом теле под влиянием подвижной нагрузки. Кроме того, необходимость детального изучения вопроса о колебаниях таких сооружений, как мостов, диктуется нам и другими соображениями. Тот факт, что мосты при проходе войсковых частей



Черт. 16.

изучения которых необходимо знание периодов собственных колебаний мостов. В истории техники известен случай разрушения в 1850 г. Анжерского висячего моста длиной в 102 м, вследствие равномерного прохождения по нему колонны французской пехоты.

Знание периодов собственных колебаний мостов позволяет судить о том, могут ли обращающиеся по мосту виды нагрузок вызвать явление резонанса опасного характера, и принять предупредительные меры. Эти меры могут состоять в том, что путем изменения закона распределения масс по длине моста или изменения жесткости пролетного строения можно достигнуть улучшения конструкции или приходится идти на запрещение движения нагрузки с критической скоростью.

Динамические воздействия подвижной нагрузки на мосты, подкрановые балки и т. д. могут быть весьма разнообразны и вызываться различными причинами.

Из этих причин мы рассмотрим следующие: 1) динамическое действие перемещающейся без толчков нагрузки; 2) ударное действие противовесов ведущих колес паровоза; 3) ударное действие из-за неровностей пути и износа бандажей.

§ 17. Действие катящейся без толчков подвижной нагрузки. Рассмотрим это воздействие в двух предположениях: а) когда масса движущегося груза велика по сравнению с массой пролетного строения и б) когда масса груза мала по сравнению с массой пролетного строения (черт. 16).

В первом случае массой пролетного строения можно пренебречь. Прогиб балки под грузом будет тогда пропорционален только одному давлению R движущейся массы и может быть определен из уравнения статического прогиба для этого случая:

$$y = \frac{Rx(1-x)^2}{3lEJ} \dots \dots \dots (67)$$

Величина давления R может быть получена путем прибавления к катящемуся грузу P силы инерции движущейся массы, равной:

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{d^2y}{dt^2}$$

Если допустить, что груз движется вдоль балки с постоянной скоростью V , то мы получим:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = V \cdot \frac{dy}{dx}, \text{ так как } y = y(x, t)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = V \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) = V \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dt} = V^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

Поэтому давление на балку будет:

$$R = P \left(1 - \frac{V^2}{g} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \right)$$

Подставляя в уравнение (67), получим:

$$y = P \left(1 - \frac{V^2}{g} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \right) \frac{x^2(1-x)^2}{3lEJ} \dots \dots (68)$$

Приближенное решение уравнения (68) получим, допустив, что траектория точки касания катящегося груза та же, что и при скорости, равной нулю ($V=0$), т. е.

$$y = \frac{Px^2(1-x)^2}{3lEJ} \dots \dots \dots (69)$$

Затем определяем вторую производную $\frac{d^2y}{dx^2}$ в уравнении (69):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4P}{3lEJ} (1^2 - 3lx + 3x^2)$$

Максимальное значение y будет на середине пролета и со-

ответствующее этому положению значение $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Pl}{3EJ}$ и наибольшее давление:

$$R_{\max} = P \left(1 + \frac{V^2}{g} \cdot \frac{Pl}{3EJ} \right).$$

Точно так же наибольший прогиб на середине балки возрастает пропорционально давлению:

$$\delta_{\partial} = \delta_{\text{ст}} \left(1 + \frac{V^2}{g} \cdot \frac{Pl}{3EJ} \right).$$

Второй член в скобках обычно очень мал. Поэтому можно заключить, что динамическое действие перемещающейся подвижной нагрузки в случае малых балок не имеет практического значения.

Во втором случае, когда масса груза мала сравнительно с массой пролетного строения, движущийся груз можно заменить с достаточной точностью движущейся силой и для определения прогиба воспользоваться формулой (проф. С. Тимошенко «Теория колебаний»):

$$y_{\max} = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \dots \dots \dots (70),$$

где α — отношение периода основного типа колебания к двойному промежутку времени $\frac{l}{v}$, необходимому для прохождения грузом моста.

Пусть, например, для железных пролетных строений трех однопутных железнодорожных мостов с пролетами в 18,3 м, 36,6 м и 109,7 м собственные частоты колебаний f равны

l	=	18,3 м	36,6 м	109,7 м
f	=	9 "	5 "	2 "
$(\alpha)_{v=33,6 \frac{m}{c}}$	=	1/9 "	1/10 "	1/12 "

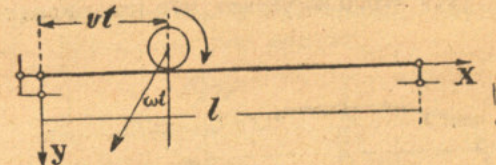
При этих условиях, например, для пролета в 18,3 м увеличение прогиба от действия подвижного груза будет:

$$y_{\max} : \frac{Pl^3}{48EJ} = \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}} : \frac{Pl^3}{48EJ} = 1, 12, \text{ или } 12\%,$$

причем это увеличение становится еще меньше с уменьшением скорости и с увеличением пролета.

В общем случае воздействия нескольких движущихся грузов эффект может быть равен сумме эффектов от каждой силы в отдельности, только в исключительном случае, а именно при синхронности колебаний. Поэтому практически надо считать, что при наиболее неблагоприятных условиях увеличение прогиба против статического действия грузов не превосходит 10%.

§ 18. Ударное действие неуравновешенных грузов. Предварительно сообщим о движении пульсирующей силы по балке с постоянной скоростью v . Пульсирующей силой мы называем силу, изменяющуюся по закону косинуса по длине пролета. При движении такой силы (черт. 17) наибольший прогиб выражается формулой:



Черт. 17.

$$\delta_{\max} = \frac{2\tau_1}{\tau} \cdot \frac{2Pl^3}{EJ\pi^4} \dots (71)$$

τ — период основного типа колебания балки;

$\tau_1 = \frac{l}{v}$ — время, потребное для того, чтобы сила P прошла балку;

$\tau_2 = \frac{2\pi}{\omega}$ — период пульсирующей силы;

$\frac{2Pl^3}{EJ\pi^4}$ — прогиб посередине от статически действующей силы.

Действие противовесов ведущих колес паровоза мы будем заменять действием пульсирующих сил. Наиболее неблагоприятные условия наступают при состоянии резонанса, когда число оборотов ведущих колес в секунду равно частоте собственных колебаний моста. Из приведенной выше таблицы значений частот собственных колебаний мостов заключаем, что для мостов малых пролетов синхронность пульсирующего груза и собственного колебания не может получиться ни при какой скорости, возможной на практике. Если, например, взять шесть оборотов ведущих колес в секунду, что является пределом скорости паровоза, то явление резонанса может получиться для мостов пролетом не ниже 30 м.

Для больших пролетов явление резонанса следует учесть и ударное действие нужно определить из уравнения (71).

Пусть P_1 — наибольшее суммарное давление на рельс, вызванное противovesами при вращении ведущих колес один раз в секунду;

n — общее число оборотов ведущих колес при проходе моста.

Тогда:

$$\delta_{\max} = \frac{2n \cdot 2P_1 l^3}{\tau \cdot EJ \pi^4} \dots \dots \dots (72)$$

Из этого вытекает, что при определении ударного эффекта, вызванного неуровненностью, мы должны принять во внимание:

- 1) статический прогиб, вызванный силой P_1 ;
- 2) период τ собственного колебания моста;
- 3) число оборотов n .



Черт. 18.

§ 19. Ударное действие из-за неровностей пути и износа бандажей. Неровности пути в виде небольших выбоин на рельсах, рельсовые стыки, а также износ бандажей и т. п. могут явиться причиной значительного ударного действия, которое особенно заметно при малых пролетах. Если форма выбоин в пути или износа бандажей представляется правильной кривой, то вычисление добавочного давления колеса на рельс можно провести следующим образом:

Допустим, что по пути, форма которого изображена на черт. 18, движется одиночный груз W_1 с постоянной скоростью v . Уравнение продольного профиля пути может быть представлено в виде:

$$y = \frac{h}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right),$$

где λ — длина волны правильной кривой профиля пути.

Тогда при движении с постоянной скоростью v вдоль этих волн вертикальные перемещения колеса будут представляться уравнением:

$$v_1(x) = \frac{h}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi vt}{\lambda} \right).$$

Соответствующее ускорение в вертикальном направлении будет:

$$v_1'' = \frac{h}{2} \cdot \frac{4\pi^2 \dot{v}^2}{\lambda^2} \cdot \cos \frac{2\pi vt}{\lambda}.$$

Присоединяя силу инерции к весу, получим полное давление на путь от движущегося груза:

$$W_1 + \frac{W_1}{g} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{4\pi^2 \dot{v}^2}{\lambda^2} \cdot \cos \frac{2\pi vt}{\lambda}.$$

Наибольшее давление получится, когда колесо займет низшее положение на профиле пути. Оно равно:

$$W_1 + \frac{W_1}{g} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{4\pi^2 \dot{v}^2}{\lambda^2},$$

ибо при низшем положении $vt = k\lambda$, где k — целое число волн, а следовательно, $\cos 2\pi k = 1$.

Мы видим, что добавочное давление движущегося груза пропорционально массе и квадрату скорости.

Это добавочное давление может достигнуть значительной величины и иметь практическое значение для мостов малых пролетов и для продольных балок. Учет этого добавочного динамического эффекта делается соответствующим выбором относительно высокого ударного коэффициента, обычно принимаемого при расчетах пролетных строений мостов малых пролетов. Если устранить рельсовые стыки на мостах и применить проезжую часть с балластным корытом или с массивным деревянным настилом, то действие этих неровностей можно уменьшить и, благодаря этому, улучшить условия работы пролетных строений.

VII. Краткие сведения об энергетическом методе и его применении при расчетах колебаний многоэтажных рам

§ 20. Представим себе, что мы имеем какую-либо упругую систему, например, балку, раму, ферму и т. д., подвергающуюся воздействию внешней нагрузки. Если мы мгновенно освободим нашу упругую систему от части или всей нагрузки, то система придет в колебательное движение. Это будет свободное гармоническое колебание, которое под влиянием внешнего и внутреннего сопротивления постепенно затухает.

Известно, что если не принимать во внимание потери энергии от сопротивлений: воздуха, внутреннего трения и т. д.,

то во время процесса колебания происходят постоянно повторяющиеся циклы превращения потенциальной энергии в кинетическую и наоборот. Цикл состоит из накопления, во-первых, потенциальной энергии в виде работы деформации, причем максимальное значение этой энергии соответствует моменту наибольшего отклонения системы от положения равновесия, а во-вторых, кинетической энергии системы, имеющей максимум значения в момент прохождения системы через положение равновесия. В пределах одного цикла максимум потенциальной энергии равен максимуму кинетической энергии. Это равенство позволяет составить уравнение, из которого можно определить основной тон собственных колебаний.

Так как для подсчета того и другого вида энергии необходимо знать форму собственных колебаний системы, а нам она наперед неизвестна, то следует задаться приближенной формой колебаний, при том так, чтобы она, по возможности, меньше отличалась от действительной формы. Путем исследований выяснено, что форму собственных колебаний можно заменить упругой кривой при статическом действии нагрузки.

Если мы имеем многоэтажную раму, подвергающуюся действию ветровой нагрузки, принимаемой в виде сосредоточенных сил в узлах рамы, и если нас интересуют собственные горизонтальные колебания, то форму собственных колебаний мы заменяем кривой прогиба многоэтажной рамы от ветровой нагрузки.

Итак, ветровые силы представляются, как обычно, отдельными силами W , действующими в узлах рамы. Если ординаты y_k этой кривой прогиба в узлах рамы известны, то тогда получаем потенциальную энергию, накопленную при отклонении рамной конструкции в положение, соответствующее упругой кривой прогибов:

$$A = \frac{1}{2} \sum W y_k.$$

При вычислении максимальной величины кинетической энергии, подсчитанной для системы в момент прохождения ее через положение равновесия, учитываются все колебательные движения несущей конструкции.

Обозначая через v перемещение центра тяжести элемента несущей конструкции длиной ds в любой момент времени t , будем иметь для кинетической энергии всей системы выражение:

$$E_k = \int \frac{1}{2} \mu \dot{v}^2 ds,$$

причем $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$ будет скоростью элемента стержня в наблюдаемый момент времени, а μ — масса единицы длины стержня.

Основные горизонтальные колебания элементов стержней рамной конструкции будут гармоническими колебательными движениями по уравнению:

$$v = y \cdot \sin \omega t$$

и наибольшими амплитудами y .

Поэтому:

$$\dot{v} = \omega y \cos \omega t$$

и для положения равновесия ($t=0$) будет

$$\dot{v} = \omega y.$$

Для определения максимальной величины кинетической энергии подставляем в выражение для E_k вместо \dot{v}^2 величину $\omega^2 \cdot y^2$ и получаем:

$$E_{k \max} = \int \frac{1}{2} \mu \omega^2 y^2 ds = \omega^2 T.$$

Величина $T = \int \frac{1}{2} \mu y^2 ds$ называется „относительной кинетической энергией“.

Круговая частота ω вынесена из-под интеграла, так как она является величиной постоянной для всех элементов конструкции.

Приравнивая потенциальную энергию A кинетической энергии E_k , определяем квадрат круговой частоты:

$$A = \omega^2 T,$$

откуда

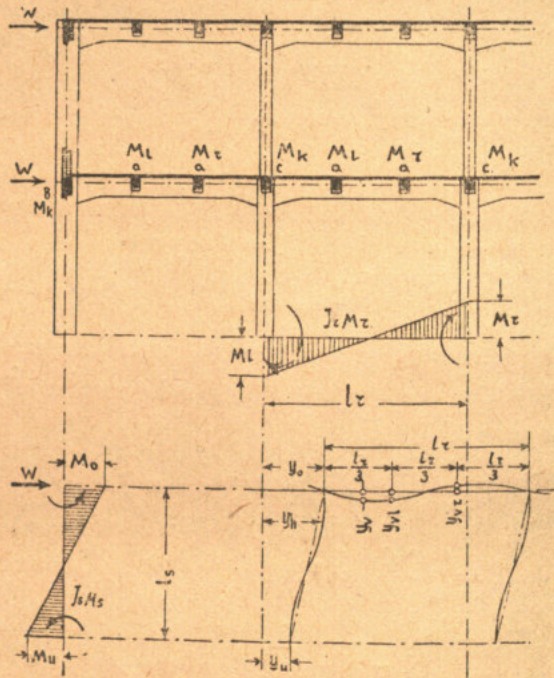
$$\omega = \sqrt{\frac{A}{T}} \dots \dots \dots (73).$$

Число колебаний в единицу времени, называемое частотой колебаний, есть $f = \frac{\omega}{2\pi}$, а их обратная величина $\frac{1}{f} = \tau = \frac{2\pi}{\omega}$

называется периодом колебания и выражает продолжительность одного колебания.

В процессе свободных колебаний около равновесного положения продольные элементы стоек подвергаются, главным образом, горизонтальным, а элементы ригелей горизонтальным и вертикальным перемещениям.

Прежде чем приступить к вычислениям относительной



Черт. 19.

кинетической энергии, надо иметь для T общие уравнения, краткий вывод которых приводится ниже.

Введем обозначения (черт. 19):

l_r — длина ригеля;

l_s — длина стойки;

μ_r — масса единицы длины ригеля;

μ_s — масса единицы длины стойки;

J_r — момент инерции сечения ригеля и

J_s — тоже — стойки.

Моменты инерции будем считать постоянными в пределах длины элемента. Для отдельных элементов величина их может быть и разная.

y_h — горизонтальное перемещение элемента стойки;
 y_v — вертикальное перемещение элемента ригеля;
 y_{vl} — вертикальное перемещение левой третней точки;
 y_{vr} — вертикальное перемещение правой третней точки;
 y_k — горизонтальное перемещение узловой точки рамы;
 y_o, y_u — горизонтальное перемещение верхнего и нижнего конца отдельной стойки l_s ;

M_o, M_u, M_l, M_r — моменты на концах стержней, возникающие в элементах конструкции от статически действующей нагрузки в виде давления ветра W .

m_l, m_r — массы, полученные от деления опорных давлений второстепенных балок a на ускорение силы тяжести и сосредоточенно действующие в левой или правой третней точке ригеля.

m_k — обозначает сосредоточенную перенесенную массу от действия крайней балки b для наружных и средней балки c для внутренних колонн и определяется как и для предыдущего случая;

E — модуль нормальной упругости материала.

При определении удвоенной относительной кинетической энергии, каждая масса умножается на квадрат наибольшего своего отклонения и сумма распространяется на всю несущую конструкцию.

Следовательно, получаем:

$$2T = \sum \mu_s \int_0^{l_s} y_h^2 dx + \sum \mu_r \int_0^{l_r} y_v^2 dx + \sum \mu_r l_r y_k^2 + \sum m_k y_k^2 + \sum m_l y_k^2 + \sum m_r y_k^2 + \sum m_l y_{vl}^2 + \sum m_r y_{vr}^2 \dots (74)$$

Первая сумма правой части распространяется на все стойки, а вторая на все ригеля.

Как известно, эпюра моментов при ветровой нагрузке многоэтажной рамы по отдельным стержням имеет вид прямой линии. Поэтому можно в данном случае вывести готовые формулы для выражений:

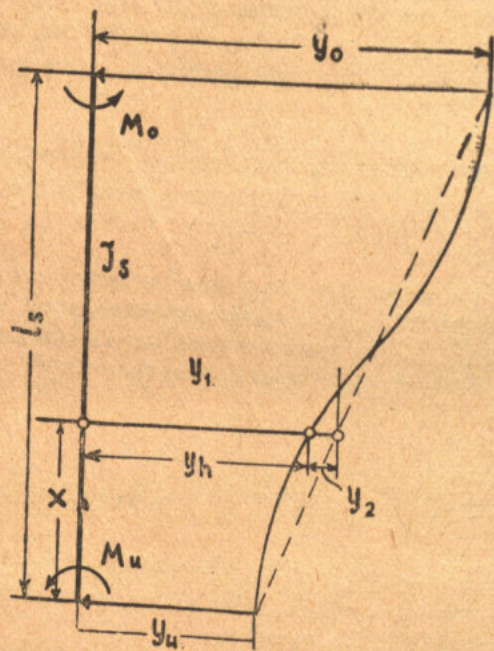
$$\int_0^{l_s} y_h^2 dx, \int_0^{l_r} y_v^2 dx, y_{vl}^2 \text{ и } y_{vr}^2.$$

§ 21. Значение $\int_0^{l_s} y_h^2 dx$ для стойки рамы. Рассмотрим

деформации отдельной стойки, вырезанной из рамы. На черт. 20 изображена кривая прогиба стержня колонны l_s .

Опорные моменты M_o и M_u и перемещения y_o и y_u концов стержней будем считать известными по расчету рам на ветровую нагрузку, откуда следует, что динамическому расчету должен предшествовать статический расчет. Тогда для прогиба на произвольном расстоянии x можно при помощи теоремы Мора вывести уравнение:

$$y_h = y_1 - y_2 = y_u + \frac{(y_o - y_u) x}{l_s} + \frac{M_o x (l_s^2 - x^2)}{6 l_s E J_s} - \frac{M_u x}{6 l_s E J_s} \cdot (2 l_s^2 - 3 l_s x + x^2).$$



Черт. 20.

После возведения в квадрат и интегрирования в указанных пределах получаем окончательную формулу:

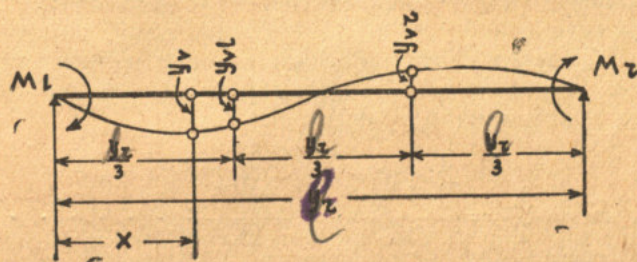
$$\int_0^{l_s} y_h^2 dx = l_s \left[y_u^2 + y_u (y_o - y_u) + \frac{1}{3} (y_o - y_u)^2 \right] + \frac{l_s^3}{E J_s} \cdot [0,08333 y_u \cdot (M_o - M_u) + (y_o - y_u) (0,044445 M_o - 0,03888 M_u)] + \frac{0,0021164}{E^2 J_s^2} l_s^5 \cdot [M_u^2 + M_o^2 - 1,93748 M_u \cdot M_o].$$

Обозначая выражения в квадратных скобках соответственно через A , B и C , будем иметь:

$$\int_0^{l_s} y_h^2 dx = A l_s^3 + B \frac{l_s^3}{E J_s} + \frac{0,0021164 l_s^5}{(E J_s)^2} C \dots (75).$$

§ 22. Значение $\int_0^{l_r} y_v^2 dx$, y_{v1}^2 и y_{vr}^2 для стержня ригеля.

Уравнения получаются по формуле предыдущего примера, если мы положим y_o и y_u равным нулю, а опорным моментам дадим обратное направление (черт. 21).



Черт. 21.

Для вертикального прогиба стержня ригеля на расстоянии x получим:

$$y_v = \frac{M_1 x}{6 l_r E J_r} (2 l_r^2 - 3 l_r x + x^2) - \frac{M_2 x}{6 l_r E J_r} (l_r^2 - x^2)$$

и

$$\int_0^{l_r} y_v^2 dx = \frac{0,0021164 l_r^5}{(E J_r)^2} [M_1^2 + M_2^2 - 1,93748 M_1 M_2] = \frac{0,0021164 l_r^5}{(E J_r)^2} \cdot D \dots (76).$$

Прогибы y_{v1} и y_{vr} третьей точки ригелей получаем подстановкой $x = \frac{l_r}{3}$ и $x = \frac{2 l_r}{3}$ в уравнение для y_v .

Для квадратов прогибов получаем следующие формулы:

$$y_{vl}^2 = \frac{l_r^4}{(EJ_r)^2} (0,0038104 M_1^2 + 0,0024384 M_r^2 - 0,0060962 M_1 M_r) \dots (77)$$

и

$$y_{vr}^2 = \frac{l_r^4}{(EJ_r)^2} (0,0024384 M_1^2 + 0,0038104 M_r^2 - 0,0060962 M_1 M_r) \dots (78)$$

По выведенным уравнениям (74) — (76) возможно провести быстрое вычисление удвоенной относительной кинетической энергии 2Т, причем удобно вести вычисления в форме таблицы.

После определения 2Т получаем круговую частоту основного колебания по уравнению:

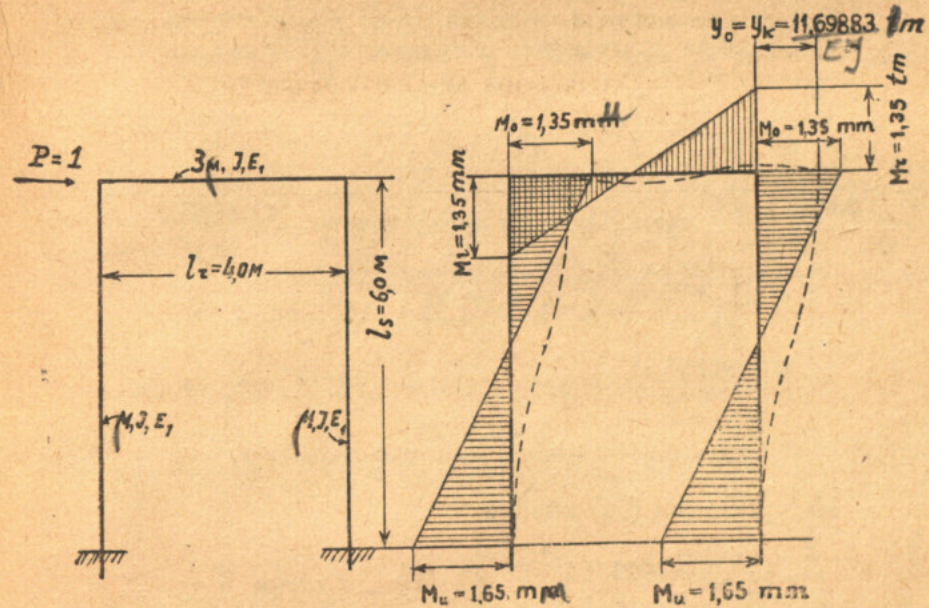
$$\omega^2 = \frac{A}{T} = \frac{1}{2} \frac{\sum W y_k}{T} = \frac{\sum W y_k}{2 T} \dots (79)$$

Однако на практике допускаются некоторые сокращения, весьма упрощающие вычислительную работу, что будет продемонстрировано на частном примере.

§ 23. Применение энергетического метода к расчету и допускаемые упрощения. Пример 1. Для проверки точности энергетического метода и выведенных формул (74) — (76) исследуем раму, изображенную на черт. 22, для которой имеется точное решение в труде „Динамика сооружений“ Гогенемзер и Прагер, изд. ОНТИ, 1936 г. Жесткость стоек и ригелей принята одинаковой, но благодаря тому, что ригель несет еще добавочную нагрузку, плотность его массы на единицу длины втрое больше, чем в стойках. Следовательно, если μ плотность массы в стойках, то в ригеле она будет 3μ .

За форму собственннх колебаний рамы мы принимаем упругую кривую от сосредоточенной силы $P=1$, действующей на высоте ригеля, как изображено на черт. 22. Эпюра изгибающих моментов от этой нагрузки показана на черт. 22, откуда можно определить моменты в любом сечении:

$$y_k = y_o = \delta_{pp} = \sum \int_0^l \frac{M_p^2 dx}{EJ}$$



Черт. 22.

(На черт. 22 направо наверху следует читать так:

$$y_o = y_k = \frac{11,69883}{EJ} \text{ м.л.}$$

$$\sum \int_0^l \frac{M_p^2 dx}{EJ} = \frac{1}{3} (M_u^2 - M_o M_u + M_o^2) l_s \cdot 2 + \frac{M_o^2}{3} l_r$$

По подстановке численных значений $M_o = 1,35 \text{ м} \cdot \text{м.}$, $M_u = 1,65 \text{ м} \cdot \text{м.}$, имеем:

$$EJ y_o = 11,69883 \text{ м} \cdot \text{м}^3.$$

Так как у нас отсутствуют сосредоточенные массы m , то при расчете относительной кинетической энергии учитываются только 3 первые члена в правой части уравнения (74).

Получаем:

$$2 T = 2\mu \int_0^{l_s} y_h^2 dx + 3\mu \int_0^{l_r} y_v^2 dx + 3\mu l_r y_k^2 \dots (80)$$

Вследствие жесткой заделки стоек рамы в фундаментах $y_u = 0$ и путем подстановки в уравнение (75) получаем:

$$\int_0^{l_s} y_h^2 dx = \frac{y_0^2 l_s^3}{3} + \frac{l_s^3 y_0}{EJ} (0,044445 M_0 - 0,038888 M_u) + \frac{0,0021164 l_s^5}{(EJ)^2} (M_u^2 + M_0^2 - 1,93748 M_0 M_u) = \frac{11,69883^2}{(EJ)^2} \cdot \frac{6}{3} + \frac{6^3 \cdot 11,69883}{(EJ)^2} (0,044445 \cdot 1,35 - 0,038888 \cdot 1,65) + \frac{0,0021164 \cdot 6^5}{(EJ)^2} (1,65^2 + 1,35^2 - 1,93748 \cdot 1,35 \cdot 1,65) = \frac{266,9728}{(EJ)^2}$$

Из уравнения (76) имеем:

$$\int_0^{l_r} y_v^2 dx = \frac{0,0021164 \cdot 4^5}{(EJ)^2} (2 \cdot 1,35^2 - 1,93748 \cdot 1,35^2) = \frac{0,2469}{(EJ)^2}$$

Далее третий член суммы (80) будет:

$$3 l_r y_k^2 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 11,69883^2}{(EJ)^2} = \frac{1642,3514}{(EJ)^2}$$

Найденными величинами определяется выражение (80):

$$2T = 2 \cdot \frac{266,9728}{E^2 J^2} \mu + \frac{3 \cdot 0,2469}{E^2 J^2} \mu + \frac{1642,3514}{E^2 J^2} \mu = \frac{2177,0357}{E^2 J^2} \mu$$

$$\omega^2 = \frac{A}{T} = \frac{P y_k}{2T} = \frac{11,69883 EJ}{2177,0357 \mu} = 0,005374 \frac{EJ}{\mu}$$

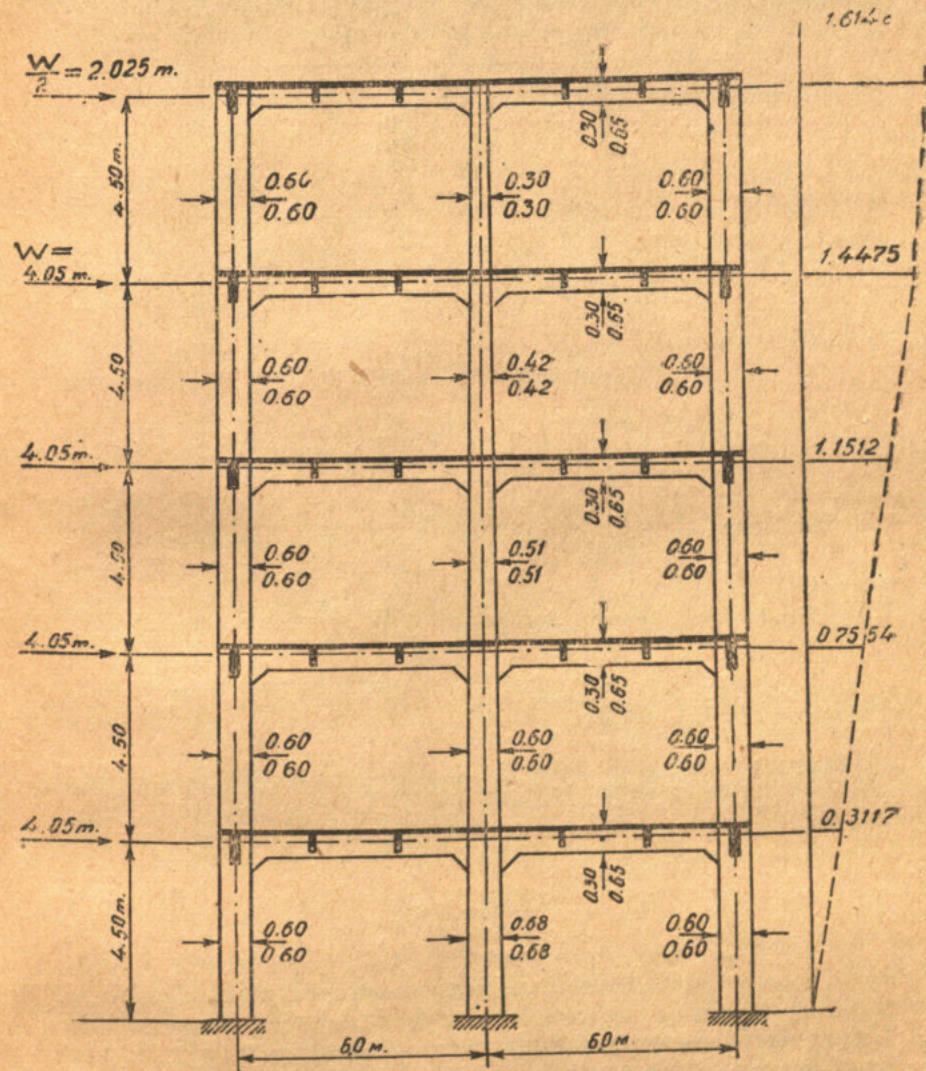
Следовательно, наименьшая собственная частота горизонтального колебания рамы имеет величину:

$$\omega = 0,0733 \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}$$

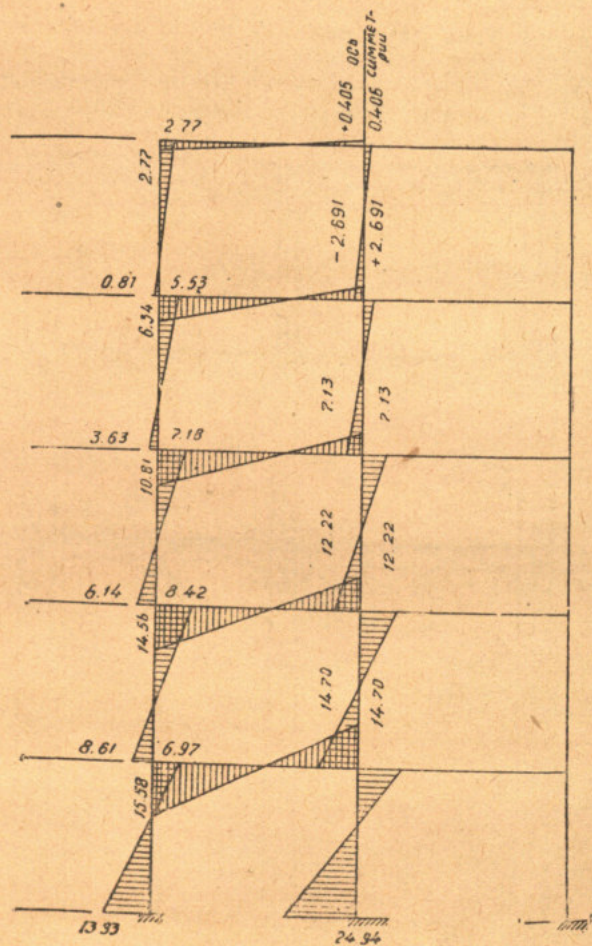
Точная величина будет:

$$\omega = \frac{2,637}{l_s^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} = \frac{2,637}{6,000^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} = 0,07325 \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}$$

Совпадение этих двух величин почти полное.



Пример 2. Требуется определить период основного горизонтального колебания железобетонной многоэтажной рамы, изображенной на черт. 23.



Черт. 24.

Сначала определяем период колебания рамы без учета, а затем с учетом полезной нагрузки на всех перекрытиях. Схема нагрузок от давления ветра указана на черт. 23. Для этой схемы нагрузок необходимо построить эпюру изгибающих моментов и определить горизонтальные перемещения узловых точек рамы.

Эпюра изгибающих моментов и упругая кривая горизонтальных перемещений изображены, согласно произведенным вычислениям от давления ветра без учета упругого сжатия ригелей нормальными силами, на черт. 23 и 24.

При определении удвоенной относительной кинетической энергии $2T$ учитываются теперь все члены уравнения (74). Вычисление произведено на арифмометре и расположено в форме таблиц. Все величины выражены: кг, см, сек.

Вычисление $\sum \mu_s \int_0^{l_s} y_h^2 dx$ для колонн проведено так:

Длина стойки равна $l_s = 450$ см; $E = 210000$ кг/см².

Относительная масса μ_s получается путем деления веса элемента стойки длиной в 1 см на ускорение силы тяжести $981 \frac{см}{сек.^2}$.

По уравнению (75) будем иметь для каждого стержня колонны

$$\int_0^{l_s} y_h^2 dx = l_s A + \frac{l_s^3}{EJ_s} B + \frac{0,0021164 l_s^5}{(EJ_s)^2} G.$$

Суммирование по всем стержням колонн (сумма последнего вертикального столбца таблицы 1) дает:

$$\sum \mu_s \int_0^{l_s} y_h^2 dx = 52,21536.$$

Вычисление $\sum \mu_r \int_0^{l_r} y_v^2 dx$ для стержней ригеля по уравнению (76). Вес элемента ригеля длиной в 1 см составляет: $0,3 \cdot 0,65 \cdot 2,4 = 0,468$ т/м = $4,68$ кг/см.

Поэтому масса единицы длины ригеля:

$$\mu_r = \frac{4,68}{981} = 0,00477 \frac{кг. сек.^2}{см^2}.$$

Длина стержней $l_r = 600$ см; момент инерции ригелей $J = 1136000$ см⁴. Теперь нужно определить для каждого элемента ригеля величину:

$$\int_0^{l_r} y_v^2 dx = \frac{0,0021164 l_r^5}{(EJ_r)^2} \cdot D.$$

Таблица 1.

Стержень	см		I _s A	кг см		с.м ⁴ J _s	I _s ³ B EJ _s	0,0021164 · 10 ⁶ G (EJ _s) ²	кг/с.м ² см ² μ _s	μ _s ∫ ₀ ^{l_s} y _h ² dx
	Y ₀	Y _u		M ₀	M _u					
Внутрен. колонны	1	0,3117	0,0000	14,5737	697000	1393000	-2,09041	0,4138	88800'0	0,10669
	2	0,7554	0,3117	135,4864	842000	861000	0,5048	0,0346		1,20110
	3	1,1512	0,7554	414,8257	718000	614000	3,9086	0,0291		3,69768
	4	1,4475	1,1512	763,0321	553000	363000	8,5692	0,0369		6,81356
	5	1,6132	1,4475	1054,9165	277000	81000	10,1092	0,0302		9,40444
Наружн. колонны	1	0,3117	0,0000	14,5773	1536000	249400	-2,1816	0,3234	0,01131	0,14381
	2	0,7554	0,3117	135,4864	1568000	1404000	4,4032	0,1251	0,00883	1,23633
	3	1,1512	0,7554	414,3257	1013000	875000	10,0514	0,2080	0,00636	2,70354
	4	1,4475	1,1512	763,0321	459500	415000	9,2800	0,1835	0,00433	3,34490
	5	1,6132	1,4475	1054,9165	81000	78700	8,5352	0,0784	0,00220	2,33976

Все вычисления расположены в таблице 2.

Таблица 2.

Стержень	кг. см		∫ ₀ ^{l_r} y _v ² dx	μ _r ∫ ₀ ^{l_r} y _v ² dx
	M _l	M _r		
I	1558000	10000	0,43647	0,002082
II	1456000	1222000	0,48000	0,002289
III	1081000	713000	0,53095	0,002532
IV	634000	269000	0,4,588	0,001934
V	277000	40500	0,16376	0,000781

Сумма величин для всех стержней (эта сумма равна сумме величин последнего вертикального столбца в таблице 2, умноженная на 2) будет равна:

$$\sum \mu_r \int_0^{l_r} y_v^2 dx = 0,01934.$$

Определение $\sum \mu_r l_r y_k^2$. Масса ригеля длиной 12 метров будет равна $\mu_r \cdot 2l_r = 0,0047706 \cdot 2 \cdot 600 = 5,72472$.

$$\sum y_k^2 = 0,3117^2 + 0,7554^2 + 1,1512^2 + 1,4475^2 + 1,6132^2 = 6,690717.$$

Следовательно, $\sum \mu_r l_r y_k^2 = 5,72472 \cdot 6,690717 = 38,30248$.
Следующие три члена уравнения (74): $\sum m_k y_k^2 + \sum m_l y_k^2 + \sum m_r y_k^2$ могут быть выражены одним членом $\sum m y_k^2$, если через m обозначим сумму всех масс, сосредоточенных в семи точках соединения продольных балок с двенадцатиметровым ригелем. Эти массы могут быть определены по опорным давлениям пяти средних второстепенных балок и обеих крайних балок и в данном случае дают величину:

$$m = 5 \cdot 3,27 + 2 \cdot 6,54 = 29,43 \frac{\text{кг/сек.}^2}{\text{см}}$$

При подсчете веса перекрытия была учтена цементная смазка толщиной 2 см и вес парапетов.

Если сделать допущение, что все пять ригелей имеют равномерную нагрузку, то будем иметь:

$$\sum m y_k^2 = m \sum y_k^2 = 29,43 \cdot 6,690717 = 196,907801.$$

Теперь остается вычислить по уравнениям (77) и (78) два последних члена суммы уравнения (74). Подстановкой числовых величин находим:

$$\Sigma m_l y_{vl}^2 = 0,0493156 \text{ и } \Sigma m_r y_{vr}^2 = 0,0094144.$$

Сложением полученных величин находим удвоенную относительную кинетическую энергию

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \mu_s \int_0^{l_s} y_h^2 dx &= 52,21536 \\ \Sigma \mu_r \int_0^{l_r} y_v^2 dx &= 0,01934 \\ \Sigma \mu_r l_r y_k^2 &= 38,30248 \\ \Sigma m y_k^2 &= 196,90780 \\ \Sigma m_l y_{vl}^2 &= 0,04932 \\ \Sigma m_r y_{vr}^2 &= 0,00941 \end{aligned} \right\} +$$

$$2T = 287,50371.$$

Половина потенциальной энергии, накопленной при отклонении рамы несущей конструкции, будет:

$$\Sigma W y_k = 2025 \cdot 1,6132 + 4050 \cdot (1,4475 + 1,1512 + 0,7554 + 0,3117) = 18113,22.$$

Следовательно, квадрат круговой частоты горизонтального колебания будет по уравнению (79) равен:

$$\omega^2 = \frac{\Sigma W y_k}{2T} = \frac{18113,22}{287,50371} = 63,0016$$

$$\omega = 7,9373.$$

Частота колебаний определится по формуле:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{7,9373}{2 \cdot 3,14159} = 1,262 \text{ сек.}^{-1}$$

А период колебаний многоэтажной рамы:

$$\tau = \frac{1}{1,2656} = 0,7916 \text{ сек.}$$

Теперь следует произвести вычисление периода колебаний несущей конструкции в предположении, что все пять перекрытий полностью загружены равномерно распределенной полезной нагрузкой 500 кг на квадратный метр.

При определении удвоенной относительной кинетической энергии 2T теперь учитываются и возникшие от полезного груза массы, действующие на ригеля в местах соединения продольных балок с ригелями рам.

На ригель длиной в 12 м при расстоянии между рамами в 6 м приходится полезная нагрузка:

$$q = 6 \cdot 12 \cdot 0,5 = 36 \text{ т}$$

$$\text{Этой нагрузке соответствует масса } m = \frac{36000}{981} =$$

$$= 36,6972 \frac{\text{кг}}{\text{см}} \text{ сек}^2.$$

Горизонтальное движение этой массы дает для 2T дополнительную сумму:

$$\Sigma m y_k^2 = m \Sigma y_k^2 = 36,6972 \cdot 6,690717 = 245,53058.$$

Полезный груз увеличивает массы m_l и m_r , сосредоточенные в третних точках (а) ригеля на 87%, следовательно, должны быть увеличены и члены $\Sigma m_l y_{vl}^2$ и $\Sigma m_r y_{vr}^2$ против прежних величин на 87%, а это составит $0,04932 \cdot 0,87 = 0,04291$ и $0,00941 \cdot 0,87 = 0,00819$.

Увеличение 2T вследствие наличия полезного груза составляет таким образом:

$$245,53058 + 0,04291 + 0,00819 = 245,58168.$$

Следовательно, при учете полезного груза удвоенная относительная кинетическая энергия будет равна:

$$2T = 287,50371 + 245,58168 = 533,0854$$

$$\omega^2 = \frac{\Sigma W y_k}{2T} = \frac{18113,22}{533,0854} \approx 34;$$

$$\omega \approx 5,83$$

$$\text{Частота колебаний } f = \frac{5,83}{6,2832} = 0,9277 \text{ сек.}^{-1}$$

$$\text{и период колебаний } \tau = \frac{1}{0,9277} = 1,07791 \text{ сек.}$$

Увеличение масс введением полезного груза увеличило и период колебаний на целых 36% против периода колебаний при отсутствии полезного груза. Поэтому, если при экспериментальных измерениях чисел колебаний в зданиях, произведенных в различное время, получатся расхождения в количестве колебаний, необходимо установить, не связаны ли изменения периода колебаний с иным распределением полезного груза.

Если допустить, что продолжительность урагана происходит в среднем около 2 сек., то добавочная нагрузка, получаемая от интенсивности ветровых порывов в раме, составляет к статическому давлению ветра в несущей конструкции без временной нагрузки около 10%, в зданиях с временной нагрузкой на всех перекрытиях до 14%.

§ 24. Допускаемые упрощения при расчете колебаний. Из рассмотрения приведенных выше числовых значений отдельных частных сумм величины $2T$ видно, что не все члены правой части уравнения (74) имеют одинаково важное значение.

$$\text{Члены } \sum_{r} \int_{0}^{l_r} y_v^2 dx, \sum m_l y_{vl}^2 \text{ и } \sum m_r y_{vr}^2, \text{ которые учиты-}$$

вают величину относительной кинетической энергии от вертикальных прогибов элементов стержней, имеют столь малое значение в сравнении с другими величинами, что ими можно пренебречь.

Точно так же при вычислении первой суммарной величины

$$\sum_{s} \int_{0}^{l_s} y_n^2 dx = I_s A + \frac{I_s^3}{EJ_s} B + \frac{0,0021164}{(EJ_s)^2} C I_s^5$$

можно всегда выбрасывать третий член с коэффициентом C .

Пренебрежение этими величинами сильно упрощает вычисление, причем невязка в окончательных результатах по точному и упрощенному способу получается весьма незначительная.

В отношении вышеупомянутой рамы, если расчет вести без учета полезной нагрузки, то получились бы следующие результаты:

$$\sum_{s} \int_{0}^{l_s} y_n^2 dx = 52,19647, \text{ а по точному расчету} = 52,21536$$

$$\sum_{r} m_r y_k^2 = 38,30248, \text{ а по точному расчету} = 38,30248$$

$$\sum m y_k = 196,90780, \text{ а по точному расчету} = 196,90780$$

$$2T = 287,40675, \text{ а по точному расчету} = 287,50371$$

$$\text{Тогда } \omega^2 = \frac{18113,22}{287,40675} = 63,0229 \text{ и } \omega = 7,9387.$$

$$\text{Частота собственных колебаний } f = \frac{\omega}{2\pi} = 1,26348, \text{ полу-}$$

ченная способом упрощенного вычисления, будет отличаться от частоты $f = 1,2632$, полученной точным способом пятым знаком.

Вывод: С достаточной для практических целей точностью при вычислении частоты или периода основного вида собственных колебаний можно учитывать только следующие силы инерции:

- 1) горизонтальные сплошные силы инерции стоек рамы;
- 2) горизонтальные сплошные силы инерции ригелей рамы, которые складываются по каждому ригелю в одну сосредоточенную силу, линии действия которых совпадают с осями ригелей, причем в число сил инерции входят силы инерции сосредоточенных масс на ригелях от второстепенных балок.

§ 25. Пример расчета основных собственных горизонтальных колебаний конструкции, изображенной на черт. 25. Эта конструкция получена из предыдущей путем удвоения отверстия, т. е. ширины здания. Пролеты ригелей, высота этажей, размеры поперечных сечений и полезных грузов в обоих случаях одинаковы. Применяя упрощения при подсчете $2T$, будем, как и прежде, вычисления располагать в таблице 3. Из этой „рабочей таблицы“ делаем сводную таблицу 4.

Напоминаем, что в таблице 3:

$$A = y_u^2 + y_u (y_o - y_u) + \frac{(y_o - y_u)^2}{3};$$

$$B = 0,0833333 y_u (M_o - M_u) + (y_o - y_u) (0,044445 M_o - 0,038888 M_u);$$

Стержень	$(Y_o - Y_u)^2$	$\frac{(Y_o - Y_u)^2}{3}$	A	I_s	$I_s A$
2	0,056169	0,018723	0,082801	"	37,260450
3	0,051984	0,017328	0,266476	"	119,914200
4	0,036100	0,012033	0,522849	"	235,282050
5	0,014641	0,004880	0,769472	"	346,262400
1			0,008640	450	3,888000
2			0,082801	"	37,260450
3			0,266476	"	119,914200
4			0,522849	"	235,282050
5			0,769472	"	346,262400
1			0,008640	450	3,888000
2			0,082801	"	37,260450
3			0,266476	"	119,914200
4			0,522849	"	235,282050
5			0,769472	"	346,262400

Стержень	кг. см		с.м ⁴ J_s	$M_o - M_u$	$Y_u (M_o - M_u)$
	M_o	M_u			
1	347000	712500	1080000	-365500	0,000000
2	440000	470000		-30000	-4830,000000
3	404000	376000		28000	11144,00000
4	354000	269000		85000	53210,00000
5	217,000	96000		121000	28736,00000
1	765000	1270000	178000	-505000	000,000000
2	805000	738000	1080000	67000	10787,000
3	548000	483000	563000	65000	25870,000
4	271000	246500	259000	24500	15337,000
5	52000	51000	67500	1000	816,000
1	752000	1263500	1780000	-511000	0000000
2	763000	713000	1080000	50000	8050,000
3	494000	443000	563000	51000	20298,000
4	229000	210000	259000	19000	11894,000
5	41000	38000	67500	3000	2448,000

Стержень	α	$\alpha Y_u (M_o - M_u)$	X_1	X_2	$X_1 - X_2$
	0,0833333		0,044445 M_o	0,038888 M_u	
1	0,083333	0,0000000	15422,415	27707,700	-12285,285
2	0,083333	-402,499839	19555,800	18277,360	+1278,440
3	"	928,666295	17955,780	14621,888	+3333,892
4	"	4434,104893	15733,530	10460,872	+5272,658
5	"	8227,996709	9644,565	3733,248	+5911,317
1	0,083333	0,0000000	34000,425	49387,760	-15387,335
2	"	898,916307	35778,225	28699,344	7078,881
3	"	2155,832471	24355,860	18782,904	5572,956
4	"	1278,082822	12044,595	9585,892	2458,703
5	"	67,999973	2311,140	1983,288	327,852
1	0,083333	0,000000	33422,640	49115,544	-15692,904
2	"	670,883065	33911,535	27727,144	6184,391
3	"	1691,499323	22955,830	17227,384	5728,446
4	"	991,166270	10177,905	8166,480	2011,425
5	"	203,999918	1822,245	1477,744	344,501

Стержень	$(X_1 - X_2)(Y_o - Y_u)$	B	l_s^3	$l_s^3 B$
1	-1977,930885	-1977,930885	91125000	-180238951,440
2	302,990280	-99,509559	"	-9067808563,875
3	760,127376	1688,793671	"	153891113178,750
4	1001,805020	5435,969913	"	495352758048,750
5	715,269357	8943,266066	"	814955119717,500
1	-2467,360935	-2467,360935	"	-224838265637
2	1677,694797	2576,611104	"	234793687398
3	1270,633968	3426,466435	"	312236753433
4	467,153570	1745,236392	"	159034666039
5	39,670092	107,670065	"	9811434218
1	-2526,557544	-2526,557544	"	-230232555832
2	1465,700667	2136,553732	"	194691636146
3	1306,085688	2997,585011	"	273154934036
4	382,170750	1373,337020	"	125145335948
5	41,684621	245,684539	"	22388003708

Стержень	EJ	$I_s^3 B$		$I_s A + \frac{I_s^3 B}{EJ}$	$\mu_s \int_0^{l_s} y_h^2 dx$
		$\frac{I_s^3 B}{EJ}$	$\frac{\text{кг сек}^2}{\text{см}^2 \mu_s}$		
1	22680000000	-0,79470	0,00883	3,09330	0,027314
2	" "	-0,03998		37,220470	0,328657
3	" "	0,67853		120,592730	1,064834
4	" "	2,18410		237,466150	2,096826
5	" "	3,59327		349,855770	3,089226
1	2738.10 ⁸	-0,82118	0,01131	3,058820	0,034595
2	2268.10 ⁸	1,03524	0,00883	38,295690	0,338151
3	1182,3.10 ⁸	2,64093	0,00636	122,555130	0,779451
4	543,9.10 ⁸	2,92397	0,00433	238,206020	1,031432
5	141,75.10 ⁸	0,69216	0,00220	346,954560	0,763300
1	27.38.10 ⁸	-0,84088	0,01131	3,047120	0,034463
2	2268.10 ⁸	0,85842	0,00883	38,118870	0,336590
3	1182.10 ⁸	2,31087	0,00636	122,225070	0,777351
4	543,9.10 ⁸	2,30089	0,00433	237,582940	1,028734
5	141,75.10 ⁸	1,57940	0,00220	347,841800	0,765252
					12,49617

Таблица 4.

Стержень	$I_s A$	кг. см		J_s	$\frac{I_s^3 B}{EJ_s}$	$\frac{\text{кг. сек.}^2}{\text{см}^2 \mu_s}$	$\mu_s \int_0^{l_s} y_h dx$
		M_o	M_u				
1	3,88800	347000	712500	1080000	-0,79470	0,01131	0,027314
2	37,26450	440000	470000	1080000	-0,03998	0,00883	0,328657
3	119,91420	404000	376000	563000	0,67853	0,00636	1,064834
4	235,28205	354000	269000	259000	2,18410	0,00433	2,096826
5	346,26240	217000	96000	67500	3,59327	0,00220	3,089226
1	3,88800	165000	1270000	1780000	-0,82118	0,01131	0,034595
2	37,26450	305000	738000	1080000	1,03524	0,00883	0,338151
3	119,91420	548000	483000	563000	2,64093	0,00636	0,779451
4	235,28205	271000	246500	259000	2,92397	0,00433	1,031432
5	346,26240	52000	51000	67500	0,69216	0,00220	0,763300
1	3,88800	752000	1263000	1780000	-0,84088	0,01131	0,034463
2	37,26450	763000	713000	1080000	0,85842	0,00883	0,336590
3	119,91420	494000	443000	563000	2,31087	0,00636	0,777351
4	235,28205	229000	210000	259000	2,30089	0,00433	1,028734
5	346,26240	41000	38000	67500	1,57940	0,00220	0,765252

Суммирование по всем стержням колонн дает:

$$\sum \mu_s \int_0^{l_s} y_h^2 dx = 22,05295$$

Определение $\sum \mu_r l_r y_k^2$.

Масса ригеля длиной 24 м будет:

$$\mu_r 4l_r = 0,0047706 \cdot 2 \cdot 600 = 11,44944.$$

$$\sum y_k^2 = 0,161^2 + 0,398^2 + 0,626^2 + 0,816^2 + 0,937^2 = 2,12003.$$

Потому $\sum \mu_r l_r y_k^2 = 11,44944 \cdot 2,12003 = 24,27281$.

Определение $\sum \mu y_k^2$

$$m = 11 \cdot 3,27 + 2 \cdot 6,54 = 49,05.$$

Следовательно,

$$\sum \mu y_k^2 = 49,05 \cdot 2,12003 = 103,98600.$$

Итого, $2T = 150,31176$.

Половина потенциальной энергии, накопленной системой при отклонении рамы конструкции здания, будет:

$$\begin{aligned} \Sigma W y_k &= 2025 \cdot 0,937 + 4050 (0,816 + 0,626 + 0,398 + 0,161) = \\ &= 1897,425 + 4050 \cdot 2,001 = 9997,425. \end{aligned}$$

Следовательно, квадрат круговой частоты горизонтального основного колебания по уравнению (79) будет:

$$\omega^2 = \frac{\Sigma W y_k}{2T} = 66,511; \omega = 8,1554;$$

$$f = \frac{8,15542}{6,28318} = 1,29797; \tau = 0,7704.$$

Учет полезной нагрузки.

На ригель длиной 24 м при расстоянии между рамами 6 м приходится полезная нагрузка $6,24 \cdot 0,5 = 72$ т.

$$\text{Масса этого груза } m = \frac{72000}{981} = 73,3944 \frac{\text{кг.}}{\text{см}} \text{ сек.}^2.$$

Горизонтальное движение этой массы дает для $2T$ дополнительную сумму:

$$\Sigma \mu y_k^2 = m \Sigma y_k^2 = 73,3944 \cdot 2,12003$$

$$\Sigma \mu y_k^2 = 155,59613.$$

Полная кинетическая энергия с учетом полезного груза будет равна:

$$2T = 150,31176 + 155,59613 = 305,90789$$

$$\omega^2 = \frac{\Sigma W y_k^2}{2T} = \frac{9997,425}{305,90789} = 32,681; \omega = 5,717;$$

$$f = \frac{5,717}{6,28318} = 0,90989; \tau = 1,099.$$

Итоги расчета по двухпольной и четырехпольной раме располагаем в виде сравнительных таблиц.

Таблица по точному расчету 5

	Четырехпольная рама черт. 25.		Двухпольная рама черт. 23.	
	Без учета полезного груза	С учетом полезного груза	Без учета полезного груза	С учетом полезного груза
Частота колебаний $f \frac{1}{\text{сек.}}$	1,2982	0,91101	1,2632	0,9277
Период колебаний $\tau \text{ сек.}$	0,7703	1,0988	0,7916	1,07791

Таблица по приближенному расчету 6

	Четырехпольная рама черт. 25.		Двухпольная рама черт. 23.	
	Без учета полезного груза	С учетом полезного груза	Без учета полезного груза	С учетом полезного груза
Частота колеб. f	1,29797	0,90989	1,26348	0,92820
Период колебаний τ	0,7704	1,09900	0,79146	1,07734

Из сопоставления результатов расчета для двухпольной и четырехпольной рам вытекает, что глубина здания играет очень незначительную роль в определении частоты свободных колебаний равноэтажных конструкций.

в размере 36% от статического давления ветра, а с учетом полезного груза в размере 55%.

§ 27. Точность энергетического метода. Энергетический метод вычисления основного собственного колебания конструкции дает весьма точные результаты, если при определении количества энергии A и T мы будем оперировать с фактической формой собственных колебаний несущей конструкции, соответствующей основному тону. Ввиду того, что точная форма собственных колебаний рамы с самого начала нам неизвестна, мы для нее ввели, как первое приближение, упругую кривую рамы от ветровой нагрузки. Чем ближе будет подходить уравнение упругой кривой к уравнению кривой собственных колебаний, тем точнее будет результат от применения энергетического метода, т. е. тем больше приближается величина ω к своему действительному значению.

Во всех случаях, когда применяется упругая кривая с отклонением от действительной формы собственных колебаний, энергетический метод дает для ω приближенную величину, всегда *большую*, чем точная величина круговой частоты колебаний. Однако применение энергетического метода при расчете целого ряда конструкций показало, что можно получить весьма точные величины для основного тона даже при довольно больших первоначальных расхождениях между предполагаемой и действительной формой собственных колебаний.

Эта задача решается применением метода приближенных вычислений, который является естественным продолжением и развитием энергетического метода.

Сущность вопроса состоит в следующем: представим себе, что наша упругая система находится под воздействием какой-либо статической нагрузки (в данном случае — под действием сосредоточенных сил в виде давления ветра, приложенных в узлах рамы).

Если мы мгновенно освободим раму от нагрузки, то упругая система придет в колебательное движение и будет находиться уже под воздействием сил инерции в виде непрерывно распределенной нагрузки по оси стержней. Величина интенсивности этой нагрузки будет в любом месте, как известно, равна произведению массы на ускорение. Для нахождения ускорения нужно иметь форму собственных колебаний, которую мы себе представляем кривой с ординатой y .

Если теперь мы обозначим массу единицы длины стержня через μ , то на элемент стержня длиной единица действует

$$\text{нагрузка } q = -\mu \frac{d^2v}{dt^2}.$$

Так как мы наперед знаем, что колебательное движение у нас есть движение гармоническое, уравнение которого $v = y \sin \omega t$, то:

$$\frac{dv}{dt} = \omega y \cos \omega t \text{ и } \frac{d^2v}{dt^2} = -\omega^2 y \sin \omega t.$$

В момент наибольшего отклонения упругой системы от положения равновесия $\sin \omega t = 1$ и мы будем иметь:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -\omega^2 y,$$

а следовательно

$$q = \mu \omega^2 y \dots \dots \dots (80).$$

В этом выражении ω^2 — квадрат круговой частоты — величина постоянная, μ — тоже постоянная величина для данной конструкции. Поэтому интенсивность нагрузки пропорциональна ординате y .

Следовательно, когда мы принимаем упругую кривую от статической нагрузки интенсивности q с ординатами y за форму собственных колебаний упругой системы, то у нас должно

$$\text{существовать равенство } \frac{q}{\mu y} = \omega^2.$$

Однако, как правило, это равенство полностью не имеет места.

Исходя из упругой кривой от давлений ветра, можно путем последовательных приближений найти действительную форму собственных колебаний, удовлетворяющих вышеуказанному равенству.

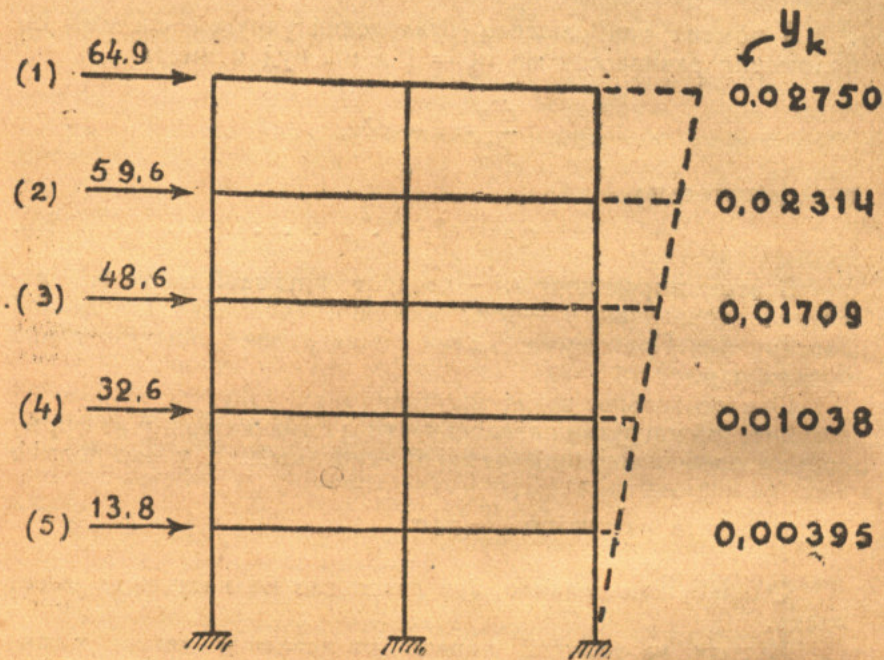
Если ординату y упругой кривой от давлений ветра умножить на соответствующие массы μ , то получим новую нагрузку для рамы $q = \mu y$, которая уже больше соответствует требуемым условиям в уравнении (80), чем первая от нагрузки ветровыми силами W . Новым нагрузкам интенсивностью q соответствует упругая кривая с ординатами y' , которая представляет уже большее приближение к форме собственных колебаний конструкции и поэтому даст более точную величину ω_1 круговой частоты.

Если теперь нагрузить конструкцию интенсивностью $q_1 = \mu y'$, то получается вновь исправленная упругая кривая с ординатами y'' и еще более точной величиной ω'' . Этот прием можно продолжать неограниченное число раз, но он дает быструю сходимость. Покажем это на выше разобранный

двухпольной раме. Указанные на черт. 23 горизонтальные перемещения узловых точек u_k необходимо умножить на сосредоточенно действующие массы в узлах рамы и получим нагрузки.

Нагрузки:

Величины:



Черт. 27.

Узлы	Масса колонн m_1	Масса ригеля m_2	Масса продольных балок m_3	Σm	$q = \Sigma m u_k$ кг
1	4,842	5,72472	29,43	40,00	64,9
2	6,045	5,72472	29,43	41,20	59,6
3	7,040	5,72472	29,43	42,20	48,6
4	8,040	5,72472	29,43	43,20	32,6
5	9,240	5,72472	29,43	44,40	13,8

По этим нагрузкам вновь вычисляем горизонтальные перемещения узловых точек по ранее выведенным формулам и разобранному для этой же рамы примеру.

Вычисленные величины показаны на черт. 27 справа.

Вновь сделанное вычисление потенциальной и кинетической энергий для исправленной упругой кривой дало $\omega_1 = 7,7685$, а частота колебаний $f' = 1,2364$.

Эта величина отличается от ранее полученной $f = 1,2632$, когда мы за форму собственных колебаний приняли упругую кривую от ветровой нагрузки, всего лишь на 2%. Такая степень точности достаточна.

Энергетический метод дает, таким образом, весьма точные результаты при помощи применения упругой кривой от ветровой нагрузки, как приближение для формы собственных колебаний.

Во всех исследованиях не учитывалось влияние нормальных сил на частоту колебаний, что вполне допустимо за малостью эффекта от них. Касаясь вопроса о желательной степени точности расчета при определении частоты и периода колебаний железобетонных конструкций, следует сказать, что согласование числа собственных колебаний между вычисленными и полученными путем наблюдений в зданиях *нельзя* ожидать уже по одному тому, что предположение об однородном изотропном строительном материале, лежащем в основе расчета железобетонных конструкций, точно не оправдывается.

§ 28. Приемы расчета многоэтажной рамы высотой 100 м на давление ветра. При определении горизонтального основного колебания многоэтажных рамных конструкций главная работа состоит в определении перемещений узловых точек u_k от ветровой нагрузки. Вычисление же частоты колебаний требует сравнительно небольшой затраты времени и может быть произведено при необходимости одновременно с расчетом рамы на ветровую нагрузку.

Для точного расчета многоэтажных рам на давление ветра подходит лучше всего метод деформации. Преимущество этого метода для наших целей состоит еще и в том, что перемещения узловых точек u_k могут быть легко вычислены по углам вращения стержней.

Нами рассматривается на черт. 26 пятипанельная рама высотой 100 м с равными пролетами панелей 6 м и высотой этажей 4 м. Расстояние между рамами равно 5,5 м. Полезный груз всех перекрытий 350 кг на м. Величина узловой нагрузки от ветра $W = 5,5 \cdot 4 \cdot 0,15 = 3,3$ т. При таких высокой степени статически неопределимых системах наличие соответственного метода хотя бы приближенного расчета на давление

ветра становится насущной потребностью проектировщика. Метод этот при условии, что отношение момента инерции любого стержня к своей длине есть постоянное число для

всех элементов, т. е. $\frac{J}{l} = \text{const}$, уже разработан для очень

высоких зданий, которым можно пользоваться при любом количестве этажей и пролете панелей. Этот прием является методом приближений при расчете узловых моментов при

$$\frac{J}{l} = \text{const}.$$

Установлено, что в очень высоких многоэтажных рамах можно практически довольно точно произвести расчет, если принять линейное изменение узловых моментов, считая в направлении от кровли до нижнего этажа. Поэтому моменты защемления ригелей и колонн могут быть выражены линейными уравнениями такого вида:

$$M_{ks} = [a + b(n-1)] \frac{Wh}{2},$$

где

M_{ks} — искомая величина момента;

n — число этажей, считая от кровли;

W — узловая нагрузка от ветра;

h — высота этажей,

a и b — две постоянные величины, имеющие разные значения по отдельным колоннам и рядам ригелей и зависящие от числа панелей.

Для пятипанельной рамы на черт. 26 эти уравнения будут:

Для ряда колонн А:

$$\text{Головная часть опоры: } M = [+0,08 + 0,12(n-1)] \frac{Wh}{2}.$$

$$\text{Пята опоры } M = [-0,02 - 0,12(n-1)] \frac{Wh}{2}.$$

Для ряда колонн В:

$$\text{Головная часть опоры: } M = [+0,13 + 0,196(n-1)] \frac{Wh}{2}.$$

$$\text{Пята опоры } M = [-0,08 - 0,196(n-1)] \frac{Wh}{2}.$$

Для ряда колонн С:

$$\text{Головная часть опоры: } M = [+0,12 + 0,188(n-1)] \frac{Wh}{2}.$$

$$\text{Пята опоры: } M = [-0,08 - 0,188(n-1)] \frac{Wh}{2}.$$

Для ряда ригелей АВ:

$$\text{Левый опорный момент: } M = [+0,08 + 0,228(n-1)] \frac{Wh}{2}.$$

$$\text{Правый опорный момент: } M = [-0,07 - 0,200(n-1)] \frac{Wh}{2}.$$

Для ряда ригелей ВС:

$$\text{Левый опорный момент: } M = [+0,06 + 0,182(n-1)] \frac{Wh}{2}.$$

$$\text{Правый опорный момент: } M = [+0,06 - 0,182(n-1)] \frac{Wh}{2}.$$

Из условия равновесия вырезанных узлов по линии колонн С получаются величины для моментов закрепления ряда ригелей С — С.

Пример:

Вычислить изгибающие моменты в узле К (четырнадцатый сверху) наружного ряда колонн А (черт. 26). Опорный момент ригеля получим, полагая $n = 14$:

$$M = [0,08 + 0,228(14-1)] \frac{3,4 \cdot 4,0}{2} = +20,090 \text{ т/м.}$$

Момент головной части наружной колонны в 14-м этаже под кровлей будет:

$$M = [0,08 + 0,12(14-1)] \frac{3,3 \cdot 4,0}{2} = +10,824 \text{ т/м.}$$

Момент в пяте наружной колонны в 13-м этаже под кровлей будет:

$$M = [-0,02 - 0,12(13-1)] \frac{3,3 \cdot 4,0}{2} = -9,636 \text{ т/м.}$$

Вычисленные величины моментов обозначены на черт. 26 возле узла К в скобках. Расчеты дали для 25-этажной рамы весьма хорошую согласованность величин узловых моментов, найденных из линейных уравнений моментов, с величинами моментов, определенных при помощи метода деформации

при $\frac{J}{l} = \text{const}$.

Однако линейное изменение узловых моментов недействительно для нижнего этажа. Это следует отнести за счет

прочного закрепления нижних пят колонн в фундаментах; следовательно, величины, определенные по уравнениям моментов для самого нижнего этажа можно рассматривать как приближенные величины с большим расхождением от точных

величин при $\frac{J}{I} = \text{const.}$

Определенные по линейным уравнениям моментов для рамы, изображенной на черт. 26, за исключением более значительных расхождений в трех нижних этажах, все узловые моменты имеют небольшие отклонения от точных значений порядка нескольких процентов. Поэтому вычисленные моменты могут в данном случае служить как подходящие приближенные величины для рамы с постоянным отношением жесткости стержней. В зданиях с небольшим числом этажей уравнения моментов дают менее точные приближения, почему упомянутый метод особенно подходит для очень высоких многоэтажных рамных конструкций.

§ 29. Заключение. Настоящая работа представляет собой обработанный материал конспекта лекций по Основам динамического расчета сооружений, читанных автором в 1936, 1937 годах студентам старших курсов Воронежского инженерно-строительного института.

Порядок изложения и содержание книги в основном соответствуют программе по строительной механике для строительных вузов конструкторской специальности. Однако эта книга может служить пособием и для инженеров-проектировщиков, так как содержит решение ряда практических задач, имеющих, по нашему мнению, большое значение.

Материалом для составления книги послужили главным образом работы советских ученых, часть данных взята из иностранной технической литературы. В частности, следует отметить работы сейсмологического отделения Академии наук и Фундаментстроля.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
1. Динамическая нагрузка	5
I. Колебания упругих систем с одной степенью свободы	6
2. Свободные поперечные колебания	—
3. Несвободные колебания. Резонанс	9
4. Энергетический метод	16
II. Колебания упругих систем с несколькими степенями свободы	19
5. Свободные колебания	—
6. Определение коэффиц. частоты колебания	24
III. Колебания упругих тел	31
7.	—
8. Приблж. методы определения частот собственных колебаний	37
9. Метод Рейля	—
IV. Расчет фундаментов на динамическую нагрузку	40
10.	—
11. Расчет фундаментов под машины	42
V. Расчет балок и рам при ударе	50
12. Явление удара	—
13. Вывод формул	51
14. Расчет на прочность при ударе	53
15. Примеры	54
VI. Динамическое действие подвижной нагрузки	59
16.	—
17. Катящаяся без толчков нагрузка	60
18. Ударное действие неуравновеш. грузов	63
19. Ударное действие на-за неровности пути	64
VII. Энергетический метод	65
20.	—
21. Значение интеграла для стойки рамы	69
22. То же, для стержня ригеля	71
23. Применение метода к расчету	72
24. Допускаемые упрощения	82
25. Пример расчета горизонтальных колебаний	83
26. Пример расчета колебаний рамы высотой 100 метр.	94
27. Точность метода	96
28. Пример расчета рамы на ветер	99
29. Заключение	102

Ответств. редактор доцент Е. Е. Дольский.
 Техн. редактор М. А. Чесноков.
 Корректор З. В. Орлова.

Сдано в набор 21/IX 1938 г. Подписано к печати 10/XII 1938 г. Формат 62x94¹/₁₆. Бум. листов 3¹/₄. Печати. листов 6¹/₂. Учетно авт. листов 8,3. Звак. в бум. листе 108750. Тираж 1150 экз. Изд. инд. 6-Н. Изд. № 217 Уполн. обллита № 7717. Зак. № 3549.

Типография изд-ва „Коммуна“. Воронеж, пр. Революции, 51.

О П Е Ч А Т К И
 в книге КАРГАШИНСКОГО В. Н. „Основы динамического расчета сооружений“.

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
7	7 снизу			редактора
10	10 "	$v_1 = -\delta_{11} m \frac{d^2 v_1}{dt^2}$	$v_1 = -\delta_{11} m_1 \frac{d^2 v_1}{dt^2}$	редакции
14	7 "	$v_1 = C^1 \cos (rt + \beta)_2$	$v_1 = C_1 \cos (rt + \beta)$	редактора
18	2 сверху	$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m}}$	$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m_1}}$	редакции
		$\frac{m y_1^2 \omega_2}{2}$	$\frac{m y_1^2 \omega^2}{2}$	
25	11 "	Уравнение частоты	Уравнение частот	автора
38	9 снизу	$Y_c = y_1 \sqrt[3]{\frac{3 c l^2 - c^3}{l^3}}$	$Y_c = y_1 \sqrt[3]{\frac{3 c l^2 - 4 c^3}{l^3}}$	автора
59	10 "	$\delta_2 = \frac{M_2}{W}$	$\sigma_2 = \frac{M_2}{W}$	редакции
59	8 "	$\delta_g = \frac{1}{3W} \sqrt[3]{\frac{M_2}{W}}$	$\sigma_g = \frac{1}{3W} \sqrt[3]{\frac{M_2}{W}}$	редакции
70	7 сверху	$y_h = y_1 - y_2 = y_u + \frac{(y_0 - y_u)x}{s}$	$y_h = y_1 - y_2 = y_u + \frac{(y_0 - y_u)x}{l_s}$	редакции
73	3 "	$y_0 = y_k = \frac{11,69883}{EI} m \cdot m^3$	$y_0 = y_k = \frac{11,69883}{EI} m$	редактора
84	3 "	$\int_0^{l_s} y_u^2 dx$	$\int_0^{l_s} y_u^2 dx$	редакции
	Чертеж 2	Нижняя буква A ₁	A	автора

