СТАТИКА СООРУЖЕНІЙ.

НАЧАЛЬНОЕ РУКОВОДСТВО

ПО БАЛОЧНЫМЪ ФЕРМАМЪ, ПОДПОРНЫМЪ СТѢНКАМЪ И СВОДАМЪ.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЯ СТАТЬИ КЪ КУРСУ СТАТИКИ

НИКОЛАЕВСКАГО ИНЖЕНЕРНАГО УЧИЛИЩА.

СОСТАВИЛЪ
С. П. БОБРОВСКІЙ,
военный инженеръ.

Пособіе для начинающихъ изученіе строительной механики, для офицеровъ инженерныхъ войскъ, студентовъ и техниковъ.

Съ приложеніемъ 32 примѣровъ
и
185 чертежами въ текстѣ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Изданіе К. Л. Риккера.
Невскій пр., 14.
1906.

Типо-литографія
ШРЕДЕРА
С.-Петербургъ, Гороховая 49.

Дозволено цензурою. С.-Петербургъ, 24 сентября 1905 года.

Предисловіе.

Настоящее руководство имѣетъ цѣлью служить пособіемъ для начинающихъ изученіе строительной механики и для практическаго пользованія при статическомъ изслѣдованіи простѣйшихъ сооруженій.

Ближайшая же задача руководства есть дополненіе курса статики Николаевскаго Инженернаго Училища вопросами, которые не могутъ быть по недостатку времени включены въ программу училища въ объемѣ настоящаго руководства, (составляющаго такимъ образомъ II часть статики), но знакомство съ которыми для офицера инженерныхъ войскъ является часто весьма полезнымъ.

Дѣйствительно, саперному офицеру приходится имѣть дѣло съ техническими расчетами временныхъ мостовъ, вышекъ, стропилъ, простѣйшихъ видовъ сводчатыхъ покрытій и подпорныхъ стѣнокъ. При этихъ расчетахъ офицеры пользуются или спеціальными наставленіями, или курсомъ военныхъ сообщеній, въ которыхъ главное вниманіе обращено на конструкцію сооруженій и для расчета даются лишь готовыя формулы; между тѣмъ, въ весьма многихъ случаяхъ, знакомство съ теоріей равновѣсія сооруженія даетъ возможность, пользуясь тѣми или другими способами, рѣшить задачу и быстрѣе и полнѣе. Напримѣръ, многія задачи статики сооруженій рѣшаются весьма просто графическимъ путемъ и потому знакомство съ нимъ является въ настоящее время весьма необходимымъ.

Для облегченія практическаго пользованія, руководство кромѣ теоретическаго изложенія заключаетъ въ себѣ два приложенія. *Приложеніе первое* составляютъ численные примѣры и задачи съ рѣшеніями; *приложеніе второе* — данныя о нагрузкахъ и вѣсѣ сооруженій, необходимыя для ихъ проектированія.

Въ текстѣ встрѣчаются ссылки на курсъ статики. Эти ссылки обозначены такъ: (I, 35), т. е. часть I стр. 35. Жирныя цифры указываютъ не страницу, а номеръ, въ которомъ трактуется о данномъ вопросѣ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

§ 3. Изгибающіе моменты.

А. Непосредственная передача груза.

а) Постоянная нагрузка.

b) Временная нагрузка.

В. Узловая передача грузовъ.

а) Постоянная нагрузка.

b) Временная нагрузка.

§ 4. Балка со свѣсами.

Глава II.

Рѣшетчатая балочная ферма на двухъ опорахъ.

§ 5. Статически опредѣлимая ферма.

§ 6. Изслѣдованіе усилій въ рѣшетчатыхъ фермахъ.

§ 7. Стропильная ферма.

Глава III.

Подпорныя стѣны.

§ 8. Распоръ земли.

А. Теорія Ребгана.

В. Опредѣленіе распора въ частныхъ случаяхъ.

§ 9. Нагрузка, дѣйствующая на насыпь.

§ 10. Расчетъ подпорныхъ стѣнокъ.

§ 11. Отпоръ земли.

Глава IV.

Цилиндрическій сводъ.

§ 12. Равновѣсіе свода.

§ 13. Расчетъ свода.

§ 14. Опоры сводовъ.

ПРИЛОЖЕНІЕ I.

Задачи и примѣры.

Къ главамъ I и II.

Къ главѣ II.

Рѣшетчатая балочная ферма.

Къ главѣ III.

Къ главѣ IV.

ПРИЛОЖЕНІЕ II.

Данныя о нагрузкахъ сооруженій.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

ВВЕДЕНІЕ.

Законы статики, изложенные въ I части являются основаніемъ для механическаго расчета всякаго рода инженерныхъ сооруженій. Такими расчетами занимается Строительная механика, состоящая изъ двухъ отдѣловъ: Статики сооруженій и Сопротивленія матеріаловъ (въ обширномъ смыслѣ).

Строительная механика ставитъ себѣ цѣлью опредѣлить устойчивость и прочность сооруженія. Для первой цѣли необходимо знаніе внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на сооруженіе, для второй— кромѣ того знаніе силъ внутреннихъ.

Съ послѣднею цѣлью въ строительной механикѣ пользуются слѣдующимъ пріемомъ. (I, **21**). Выдѣляютъ мысленно изъ разсматриваемаго тѣла произвольную часть и изслѣдуютъ ее какъ тѣло, подверженное дѣйствію силъ активныхъ и силъ связей, т. е. внутреннія силы, (или лишь равнодѣйствующія этихъ силъ), приложенныя къ поверхностямъ сѣченій выдѣленной части, служащія связью выдѣленной частьи тѣла съ остальною, неразсматриваемою въ данный моментъ, трактуются какъ внѣшнія силы.

Если всѣ силы, дѣйствующія на всю систему, или на выдѣленную изъ нея указаннымъ способомъ часть, могутъ быть приведены къ такой совокупности, которая удовлетворяетъ условнымъ уравненіямъ равновѣсія статики, т. е. если число неизвѣстныхъ силъ связей равно числу условій равновѣсія, даваемыхъ статикой, то такая система (сооруженіе) называется статически опредѣлимою. Когда указанное равенство неизвѣстныхъ съ числомъ статическихъ условій имѣетъ мѣсто по отношенію всей системы, т. е. когда число неизвѣстныхъ есть число внѣшнихъ связей — опоръ, то статистическая опредѣлимость будетъ внѣшнею; когда же имѣетъ мѣсто равенство числа, неизвѣстныхъ силъ связей, дѣйствующихъ на любую изъ выдѣляемыхъ частей системы—съ числомъ статическихъ условій равновѣсія, то система будетъ внутренне статически опредѣлимою *).

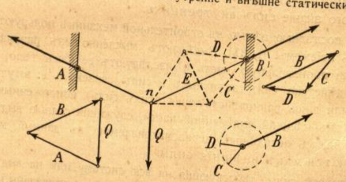
Въ этихъ случаяхъ основною посылкою для дальнѣйшихъ изслѣдованій является неизмѣняемость системы (I, Введеніе).

Если число неизвѣстныхъ силъ связей (внѣшнихъ или внутреннихъ), при приведеніи ихъ къ наименьшей совокупности, превышаетъ число условій равновѣсія, даваемыхъ статикой, то система будетъ внѣшне или внутренне статически неопредѣлимою. Для изслѣдованія равновѣснаго состоянія такой системы, необходимо прибавить добавочныя условія. Эти условія получаютъ изъ изученія деформаціи системы, что составляетъ предметъ особаго отдѣла сопротивленія матеріаловъ—теоріи упругости.

Пояснимъ сказанное о статической опредѣлимости примѣрами.

1) Балка свободно лежащая на двухъ опорахъ и подверженная дѣйствію грузовъ, статически опредѣлима по отношенію къ сопротивленіямъ опоръ; но если прибавить третью опору, то статическая опредѣлимость пропадаетъ, такъ какъ равнодѣйствующая грузовъ не можетъ быть средствами статики разложена на 3 составляющія (I, **23**).

2) Подвѣсимъ грузъ Q на нить, закрѣпленную своими концами въ неподвижныхъ точкахъ A и B. Сопротивленія опоръ A и B найдутся тотчасъ же разложеніемъ силы Q ни двѣ составляющія A и B для чего на черт 1, построенъ треугольникъ силъ ABQ. Эти составляющія укажутъ усилія въ каждомъ изъ концовъ нитей. Система и внутренне и внѣшне статически опредѣ-



Черт. 1.

лима. Теперь, оставивъ неизмѣннымъ положеніе точекъ A, n, B, вмѣсто нити nB возьмемъ нити C и D, закрѣпленныя къ той же точкѣ B Поддерживающія нити C и D разведемъ и скрѣпимъ между собою стержнемъ E. Сопротивленія опоръ останутся тѣ же. Усилія въ нитяхъ C и D найдутся разло-

*) Замѣтимъ, что внутренняя статическая опредѣлимость еще не даетъ возможность средствами статики изслѣдованія всѣхъ внутреннихъ силъ, ибо для этого необходимо по найденнымъ равнодѣйствующимъ умѣть опредѣлить ихъ составляющія, что относится уже къ предмету сопротивленія матеріаловъ, оперирующему съ силами, дѣйствующими на элементъ поверхности сѣченія, т. е. съ такъ называемыми напряженіями.

женіемъ опорнаго сопротивленія B на двѣ составляющихъ C и D. Дѣйствительно, если выдѣлить опорную точку съ приложенными къ ней силами, какъ указано на чертежѣ, то найдемъ, что на неподвижную точку B дѣйствуютъ три силы: два неизвѣстныхъ натяженій (внутреннія силы) C и D и одна (внѣшняя) сила—сопротивленіе опорной точки B. Задача разрѣшается средствами статики построеніемъ треугольника силъ BCD,—система внутренне статически опредѣлима. Наконецъ, вмѣсто двухъ нитей прибавимъ еще третью, удерживающую нить, оставивъ неизмѣннымъ положеніе точекъ A, n, B и грузъ Q; внѣшняя статическая опредѣлимость снова имѣетъ мѣсто; но система станетъ внутренне статически неопредѣлимою. Дѣйствительно, выдѣляя сѣченіемъ узелъ B, какъ сдѣлано выше, найдемъ что на выдѣленную точку B будетъ дѣйствовать одна извѣстная и три неизвѣстныхъ силы; но силу нельзя разложить опредѣленнымъ образомъ на три направленія, т. е. средства статики не даютъ опредѣленнаго рѣшенія для нахожденія внутреннихъ силъ.

Итакъ статика сооруженій изучаетъ равновѣсіе несвободныхъ системъ, т. е. занимается отысканіемъ силъ связей. Знаніе внѣшнихъ силъ связей необходимо для изслѣдованія устойчивости сооруженія, въ его цѣломъ и для опредѣленія внутреннихъ силъ связей. По этимъ даннымъ, пользуясь пріемами сопротивленія матеріаловъ, получаютъ, по равнодѣйствующимъ, составляющія этихъ внутреннихъ силъ, и опредѣляютъ прочность частей сооруженія *).

Въ настоящемъ курсѣ разсмотрѣны простѣйшія статически опредѣлимыя системы, служащія основаніемъ большого числа всякаго рода сооруженій.

Всѣ эти системы составляютъ задачу равновѣсія силъ на плоскости, такъ какъ разсматриваемыя сооруженія всѣ имѣютъ плоскость симметріи, и силы, на нихъ дѣйствующія, располагаются въ этой плоскости.

*) Статика сооруженій имѣетъ дѣло съ силами, а сопротивленіе матеріаловъ, для рѣшенія своихъ задачъ вводитъ новое понятіе—напряженіе.

ГЛАВА I.

Балка свободно лежащая на двухъ опорахъ.

1. Общія замѣчанія.

Стержень свободно лежащій на двухъ горизонтальныхъ опорахъ и нагруженный грузами, производитъ вертикальныя давленія на опоры, направленныя внизъ. Такой стержень будемъ называть балкою. Въ тоже время по началу противодѣйствія, опорныя точки оказываютъ на балку давленія равныя и противоположныя предыдущимъ; эти давленія называются сопротивленіями опоръ. Грузы и сопротивленія опоръ называются внѣшними силами, въ отличіе отъ силъ внутреннихъ, проявляющихся въ частяхъ самой балки.

Нагрузка можетъ состоять или изъ отдѣльныхъ грузовъ, какъ обыкновенно говорятъ — сосредоточенныхъ грузовъ P, или изъ нагрузки непрерывно распредѣленной по части балки, или по всей ея длинѣ. Мы будемъ разсматривать равномѣрно распредѣленную нагрузку p. Само собою нагрузка сосредоточенными грузами можетъ существовать одновременно съ равномѣрно распредѣленной.

Нагрузка можетъ быть приложена къ балкѣ непосредственно, тогда имѣемъ дѣло съ непосредственно нагруженной балкой, или же нагрузка передается, тѣмъ или другимъ способомъ, всегда лишь опредѣленнымъ точкамъ, тогда имѣемъ балку съ узловой нагрузкой. Напримѣръ, потолочная балка несетъ обыкновенно равномѣрно распредѣленную нагрузку, а главныя балки въ мостѣ получаютъ нагрузку черезъ посредство второстепенныхъ балокъ, т. е. имѣютъ узловую нагрузку. Разстояніе между узлами называютъ **панелью**.

Далѣе, различаютъ нагрузки постоянную, дѣйствующую постоянно и временную, каковая обыкновенно бываетъ подвижная. Такъ, собственный вѣсъ балки есть нагрузка постоянная, а нагрузка отъ повозки подвижная; давленіе на крышу снѣга временная неподвижная.

Временную сосредоточенную нагрузку разсматриваютъ обыкновенно въ видѣ системы неизмѣнно между собою связанныхъ подвижныхъ грузовъ, напримѣръ колесъ поѣзда, повозки, гдѣ разстоянія между колесами при ихъ передвиженіи—не измѣняются. Въ дальнѣйшемъ для краткости такая нагрузка называется просто системою сосредоточенныхъ грузовъ.

Въ зависимости отъ расположенія опорныхъ точекъ, различаютъ балки на двухъ опорахъ, простыя—если балка опирается своими концами и консольныя балки, или балки со свѣшивающимися концами, когда опорныя точки располагаются между концами балокъ.

Когда балка служитъ основаніемъ болѣе или менѣе сложной конструкціи, то ее также называютъ балочной фермою. Болѣе точное опредѣленіе термина «ферма» указано въ главѣ II.

Пусть имѣемъ балку AB, на которую дѣйствуетъ одинъ грузъ P. Гдѣ бы этотъ грузъ ни былъ помѣщенъ, мы съумѣемъ опредѣлить тѣ сопротивленія опоръ, которыя онъ вызоветъ. Обыкновенно, разсматривая равновѣсіе балки считаютъ направленіе сопротивленія опоръ вверхъ положительнымъ, а внизъ отрицательнымъ. Мы уже замѣтили что сопротивленія опоръ въ данномъ случаѣ должны быть направлены вверхъ, т. е. будутъ положительными.

Черт. 2.

Для рѣшенія же вопроса о внутреннихъ силахъ или напряженіяхъ вызываемыхъ внутри балки, необходимыхъ для опредѣленія прочности балки, при помощи средствъ «сопротивленія матеріаловъ», поступимъ слѣдующимъ образомъ, уже указаннымъ во введеніи.

Проведемъ на черт. 2 вертикальное сѣченіе mn въ произвольномъ разстояніи отъ лѣвой опоры и предположимъ, что правая часть балки мысленно отброшена. Тогда, чтобы разсматриваемая лѣвая часть осталась въ равновѣсіи, придется въ сѣченіи mn къ ней прибавить нѣкоторыя силы, которыя и будутъ замѣнять воздѣйствіе на лѣвую часть правой, отброшенной части. Для равновѣсія, какъ мы знаемъ, необходимо, чтобы сумма проекцій силъ на каждую изъ двухъ прямоугольныхъ осей равнялась нулю, и чтобы сумма моментовъ силъ относительно произвольной точки плоскости равнялась нулю. За ось координатъ возьмемъ данное сѣченіе $m\ n$, а за начало координатъ центръ тяжести сѣченія балки. Тогда *) условія равновѣсія статики даютъ:

$$\begin{aligned} Y + A &= 0; \\ M + Ax &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Уравненія (1) даютъ зависимость между силами связей и внѣшними силами и составляютъ переходъ къ ученію о прочности. Задача же статики сооруженій умѣть такъ оперировать съ внѣшними силами, чтобы привести ихъ къ суммѣ силъ, дѣйствующихъ по одну сторону сѣченія и къ суммѣ моментовъ силъ, дѣйствующихъ по одну сторону сѣченія, относительно нѣкотораго центра. Сумма внѣшнихъ силъ, дѣйствующая напр. на лѣвую часть балки и, въ данномъ частномъ случаѣ равная A, называется поперечною или перерѣзывающею силою, а сумма моментовъ внѣшнихъ силъ относительно данной точки сѣченія, т. е., въ данномъ частномъ случаѣ, количество Ax, называется изгибающимъ моментомъ. Если къ лѣвой части балки приложена сила A, дѣйствующая вверхъ, то для равновѣсія, вмѣсто правой части, въ сѣченіи mn должна быть приложена сила $= -A$, т. е. значитъ на правую часть дѣйствуетъ сила равная A, но текущая внизъ; поэтому поперечныя силы по сторонамъ сѣченія равны по величинѣ, но знакопротивоположны. Тоже самое можно сказать и про изгибающіе моменты.

Итакъ, при принятыхъ нами ограниченіяхъ т. е. когда балка подвержена дѣйствію грузовъ и сѣченіе проведено вертикально, опредѣленія терминовъ: поперечная сила и изгибающій моментъ будутъ слѣдующія:

Поперечная сила въ данномъ сѣченіи равна суммѣ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на отсѣченную часть балки.

Изгибающій моментъ для даннаго сѣченія равенъ суммѣ моментовъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на отсѣченную часть балки, относительно произвольной точки плоскости сѣченія.

Изъ вышеизложеннаго слѣдуетъ, что совершенно достаточно разсматривать равновѣсіе одной изъ частей балки. Въ послѣдующемъ мы всегда будемъ изслѣдовать равновѣсіе лѣвой части балки и обозначать изгибающій моментъ черезъ M_i, а поперечную силу черезъ S_i, причемъ значки i указываютъ абсциссу сѣченія относительно лѣвой опоры.

*) Третье уравненіе $X = o$, при дѣйствіи грузовъ, обращается въ тожество.

Для нахожденія количествъ S и M необходимо знать сопротивленія опоръ. Итакъ, предстоящая задача состоитъ въ опредѣленіи сопротивленій опоръ, поперечныхъ силъ и изгибающихъ моментовъ.

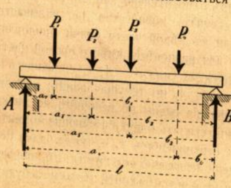
§ 1.

Сопротивленія опоръ.

а. Непосредственная нагрузка.

2. Сосредоточенная непосредственная нагрузка.

Пусть имѣемъ балку AB съ сосредоточенными грузами P_1, P_2, P_3, P_4. Назовемъ сопротивленіе лѣвой опоры черезъ A и сопротивленіе правой черезъ B. Для опредѣленія величинъ A и B, вообще говоря, удобнѣе всего воспользоваться условіями равновѣсія моментовъ силъ, такъ какъ неизвѣстныхъ сопротивленій опоръ двѣ, а уравненій моментовъ, въ которыхъ бы входили эти неизвѣстныя, мы можемъ составить также не меньше двухъ. Если-же воспользоваться условіями равновѣсія проекцій силъ, то получимъ одно уравненіе (проекція на вертикальную ось) съ двумя неизвѣстными. Для опредѣленія сопротивленія опоры A, беремъ сумму моментовъ всѣхъ внѣшнихъ силъ относительно опоры B. Такъ какъ балка AB подъ вліяніемъ всѣхъ силъ находится въ равновѣсіи, то эта сумма должна равняться 0.


Черт. 3.

$$Al - P_1 b_1 - P_2 b_2 - P_3 b_3 - P_4 b_4 = 0,$$

или

$$Al = \sum_1^4 P_i b_i.$$

Совершенно также написали-бы и второе условіе

$$Bl = \sum_1^4 P_i a_i.$$

Если-бы имѣли не 4, а n силъ, то указатель у знака $\sum$ вмѣсто 4 былъ-бы n. Такимъ образомъ, выраженія для величины сопротивленій опоръ имѣютъ видъ:

$$\boxed{A = \frac{1}{l}\sum Pb \quad \text{и} \quad B = \frac{1}{l}\sum Pa\ ,} \tag{2}$$

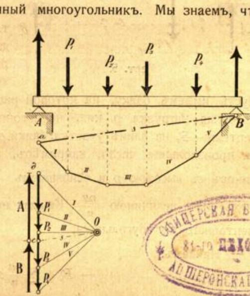
гдѣ для краткости значки у суммы и указатели i у буквъ опущены.

Поэтому имѣемъ общее правило опредѣленія сопротивленія опоры: надо взять сумму моментовъ всѣхъ внѣшнихъ силъ относительно второй опоры и раздѣлить ее на величину пролета.

Конечно, совершенно тоже получили-бы пользуясь и правиломъ сложенія параллельныхъ силъ, но вычисленія были-бы утомительнѣе. Въ частномъ случаѣ, если-бы всѣ грузы были симметричны относительно точекъ опоръ, какъ по расположенію силъ, такъ и по величинѣ, то очевидно и сопротивленія опоръ были-бы между собой равны и тогда для ихъ опредѣленія, проще было-бы написать условіе равновѣсія проекцій силъ, т. е.

$$A + B = \sum P \qquad \text{и} \qquad A = B = \frac{1}{2}\sum P.$$

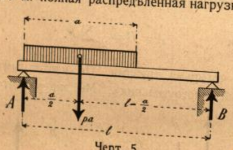
Возьмемъ ту-же балку съ четырьмя грузами. По извѣстнымъ правиламъ построимъ веревочный многоугольникъ. Мы знаемъ, что если всѣ силы находятся въ равновѣсіи, то, какъ многоугольникъ силъ, такъ и веревочный многоугольникъ, должны быть сомкнутыми. Крайніе бока веревочнаго многоугольника, построеннаго на силахъ P_1, P_2, P_3 и P_4 пересѣкаютъ силы сопротивленія опоръ, съ которыми и должны уравновѣшиваться. Веревочный многоугольникъ будетъ сомкнутымъ, если точка пересѣченія боковъ I и V съ направленіями сопротивленій опоръ A и B соединить между собой. Получимъ замыкающій бокъ, которому въ многоугольникѣ Вариньона долженъ соотвѣтствовать лучъ. Проводя изъ полюса лучъ Oc, получимъ силы cd, ce, которыя и будутъ сопротивленіями опоръ A и B.


Черт. 4.

Дѣйствительно, всѣ силы, проходящія черезъ точку a, должны быть въ равновѣсіи и потому должны составлять сомкнутый многоугольникъ. Силы cd, dO и Oc образуютъ сомкнутый треугольникъ, потому $cd=A$ и есть сопротивленіе лѣвой опоры и теченіе ея направлено вверхъ. Точно также $bc=B$ есть сопротивленіе правой опоры, текущее тоже вверхъ.

3. Равномѣрно распредѣленная непосредственная нагрузка.

Пусть теперь нагрузка будетъ равномѣрно распредѣленная. Такая нагрузка изобразится въ видѣ прямоугольника, высота котораго равна величинѣ нагрузки на единицу длины; тогда площадь прямоугольника даетъ величину всей равномѣрно распредѣленной нагрузки. Напримѣръ, если имѣемъ равномѣрно распредѣленную нагрузку въ 500 кил. на погонный метръ длины балки, тогда очевидно на длинѣ 10 м. полная распредѣленная нагрузка составитъ 5000 кил., поэтому, если построить прямоугольникъ съ условной высотою изображающею 500 кил., то площадь прямоугольника на длинѣ тѣхъ-же 10 м. составитъ 5000 кв. ед., т. е. число единицъ площади дастъ число единицъ равномѣрно распредѣленной нагрузки на протяженіи данной части балки.



Черт. 5.

Пусть имѣемъ балку, на которой расположена равномѣрно распредѣленная нагрузка p кил. на погонный метръ, какъ показано на чертежѣ—5, на длинѣ участка балки a. Площадь pa можемъ разбить на произвольное число, напримѣръ, на n отдѣльныхъ прямоугольниковъ съ высотою p и основаніемъ $\frac{a}{n}$. Тогда получимъ n отдѣльныхъ силъ величиною $\frac{pa}{n}$. Каждая пройдетъ черезъ середину элементарнаго прямоугольника.

Найдемъ:

$$-Bl+\sum\frac{pa}{n}x_i=0\ ;$$

гдѣ x_i есть разстояніе середины произвольнаго прямоугольника i отъ точки A.

Но мы знаемъ, что сумма моментовъ составляющихъ равна моменту равнодѣйствующей. Величина равнодѣйствующей есть pa, а

разстояніе ея точки приложенія отъ лѣвой опоры $\frac{a}{2}$, такъ какъ очевидно она пройдетъ черезъ середину прямоугольника pa. Поэтому предыдущее уравненіе напишется такъ:

$$-Bl+pa\cdot\frac{a}{2}=0,\ \text{ и }\ B=\frac{pa^2}{2l}.$$

Въ предѣлѣ, при безконечно малой величинѣ участковъ dx, моментъ отъ равномѣрно распредѣленной нагрузки изобразится такъ:

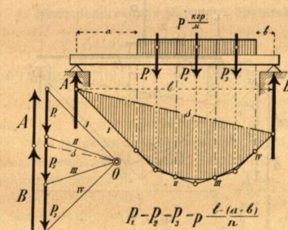
$$\int_0^a pdx\cdot x=p\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a=\frac{pa^2}{2}.$$

Сопротивленіе опоры A проще всего получить изъ уравненія проекціи силъ.

$$A+B-pa=0\ ;\ A=pa-\frac{pa^2}{2l}.$$

Если нагрузка распредѣлена по всей длинѣ пролета, то $a=l$.

$$\boxed{A=B=\frac{pl}{2}}. \qquad (3)$$



Черт. 6.

Для графическаго рѣшенія вопроса при равномѣрно распредѣленной нагрузкѣ, на основаніи вышесказаннаго, можно было бы равномѣрно распредѣленную нагрузку замѣнить ея равнодѣйствующею и слѣдовательно построить веревочный многоугольникъ для трехъ силъ: величины полной нагрузки и двухъ сопротивленій опоръ и затѣмъ провести замыкающій бокъ. Можно также равномѣрно распредѣленную нагрузку замѣнить не одною равнодѣйствующею, а разбить площадь нагрузки на произвольные участки и построить соотвѣтствующіе имъ грузы; построеніе указано на чертѣжѣ 6. Само собой, не представляетъ затрудненія опредѣлить, какъ аналитически, такъ и графически, сопротивленія опоръ въ случаѣ смѣшанной нагрузки (начало независимости дѣйствія силъ), т. е. когда на балку дѣйствуетъ, какъ непрерывно распредѣленная нагрузка, такъ и сосредоточенные грузы.

b. Узловая нагрузка.

4. Произвольная узловая нагрузка.

Если дѣйствіе груза P передается балкѣ AB не непосредственно, а при помощи двухъ поперечныхъ балокъ C и D, то эти балки служатъ опорами для вспомогательной балки CD и принимаютъ давленія, величина которыхъ согласно вышеизложенному будетъ:

$$C=P\frac{\lambda-z}{\lambda} \quad \text{и} \quad D=P\frac{z}{\lambda},$$

гдѣ λ есть разстояніе между точками C и D и z разстояніе груза P

Черт. 7.

отъ точки C. Пусть a есть разстояніе балки C отъ лѣвой опоры и b ея разстояніе отъ правой, тогда сопротивленія опоры A будетъ:

$$A=C\frac{b}{l}+D\frac{b-\lambda}{l} \quad \text{и} \quad B=C\frac{a}{l}+D\frac{a+\lambda}{l}.$$

Подставляя сюда найденныя значенія для C и D, найдемъ

$$A=P\frac{b-z}{l}, \quad \text{и} \quad B=P\frac{a+z}{l}.$$

Но изъ чертежа видно, что если назовемъ разстояніе груза отъ лѣвой опоры черезъ x, то $b-z=l-x$, и $a+z=x$, значитъ

$$A=P\frac{l-x}{l} \quad \text{и} \quad B=P\frac{x}{l},$$

какъ и для непосредственной нагрузки.

Этого и слѣдовало ожидать, если припомнить, что моментъ равнодѣйствующей параллельныхъ силъ, относительно произвольной точки, равенъ суммѣ моментовъ силъ составляющихъ, относительно того-же центра.

Поэтому, для опредѣленія сопротивленій опоръ балки съ узловою нагрузкою, слѣдуетъ воспользоваться правиломъ опредѣленія сопротивленій опоръ балки съ непосредственною нагрузкою, не обращая вниманія на узловую передачу.

Если нагрузка распредѣлена равномѣрно, то очевидно придемъ къ тому-же выводу.

§ 2.

Поперечныя силы.

A. Непосредственная передача грузовъ.

a. Нагрузка постоянная.

5. Поперечныя силы отъ сосредоточенныхъ грузовъ.

Поперечная или перерѣзывающая **сила въ данномъ сѣченіи**, какъ видѣли, **равна суммѣ силъ, дѣйствующихъ на отдѣленную сѣченіемъ, разсматриваемую часть балки.** Такъ, пусть имѣемъ балку AB, на которую дѣйствуютъ четыре сосредоточенныхъ груза, и положимъ, мы желаемъ узнать величину поперечной силы для сѣченія mn. На часть балки лѣвѣе сѣченія mn дѣйствуетъ лишь одна сила — сопротивленія опоры A, текущее вверхъ, поэтому поперечная сила въ сѣченіи mn

Черт. 8.

очевидно равна сопротивленію лѣвой опоры A и для лѣвой части она положительна. Такъ какъ нахожденіе поперечныхъ силъ сводится къ опредѣленію суммы внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ по одну сторону сѣченія, то поперечныя силы для взятыхъ сѣченій будутъ:

Сѣченіе *mn* поперечная сила $S_1 = A$;
» *pp* » » $S_2 = A - P_1$;
» *qr* » » $S_3 = A - P_1 - P_2$;
» *st* » » $S_4 = A - P_1 - P_2 - P_3$;
» *uv* » » $S_5 = A - P_1 - P_2 - P_3 - P_4$.

Вообще

$$S_x = A - \sum_1^k P, \tag{4}$$

гдѣ P_1 до P_k грузы, дѣйствующіе на лѣвую часть. Изъ условія равновѣсія слѣдуетъ, что на правую часть дѣйствуютъ совершенно такія-же силы, но текущія въ противоположную сторону. Изъ выраженія для S_x видно, что для опредѣленія поперечной силы надо изъ сопротивленія опоры, лежащей со стороны разсматриваемаго участка балки, вычесть всѣ грузы, расположенные между опорой и даннымъ сѣченіемъ. Отсюда слѣдуетъ, что *наибольшая* (по абсолютной величинѣ) *поперечная сила будетъ надъ опорою*. Если дать величинамъ A и P нѣкоторое опредѣленное значеніе, то легко видѣть, что поперечная сила, при приближеніи къ серединѣ балки, постепенно уменьшается и наконецъ становится отрицательной. Такъ какъ она измѣняется не обращаясь въ безконечность, то, очевидно, должна пройти черезъ значеніе = 0. Пояснимъ это примѣромъ. Пусть, напримѣръ, имѣемъ балку съ однимъ сосредоточеннымъ грузомъ по серединѣ, P. Возьмемъ сѣченіе вблизи силы, но чуть-чуть лѣвѣе ея; сумма силъ дѣйствующихъ на лѣвую часть балки будетъ

$$S_x = A = \frac{P}{2} > 0;$$

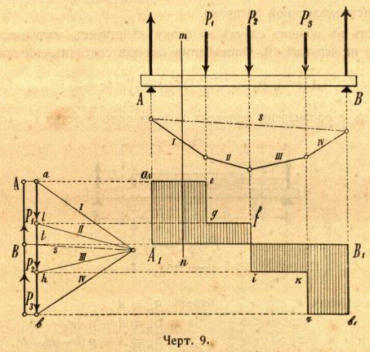
затѣмъ возьмемъ сѣченіе безконечно близко къ прежнему, но непосредственно правѣе силы P, тогда,

$$S_x = A - P = \frac{P}{2} - P = -\frac{P}{2} < 0.$$

Такимъ образомъ, поперечная сила, при переходѣ сѣченія черезъ точку приложенія силы P, измѣнила свой знакъ; а это можетъ быть только въ томъ случаѣ, если въ сѣченіи проведенномъ черезъ силу P, величина S_x прошла черезъ значеніе 0.

Поэтому, *при сосредоточенной нагрузкѣ поперечная сила измѣняетъ свой знакъ въ сѣченіи, проходящемъ черезъ одинъ изъ грузовъ.*

При графическомъ рѣшеніи вопроса, воспользуемся слѣдующимъ построеніемъ. Пусть имѣемъ балку, на которую дѣйствуютъ сосредоточенные грузы, какъ показано на черт. 9. Построимъ веревочный многоугольникъ; опредѣлимъ сопротивленія опоръ. Изъ точки t проводимъ линію параллельную балкѣ AB и на эту линію проектируемъ точки опоры A и B въ точкахъ A_1 и B_1. Разсмотримъ силы, дѣйствующія на лѣвую часть балки. Лѣвѣе сѣченія mn дѣйствуетъ лишь сопротивленіе опоры A. Эта поперечная сила дѣйствуетъ на всемъ протяженіи вплоть до сѣченія, проходящаго вблизи P_1, лѣвѣе ея. Поэтому проектируемъ весь отрѣзокъ ta на линію AA_1 и изъ полученной точки a_1 проводимъ линію a_1e до пересѣченія съ продолженной



Черт. 9.

силой P_1; ординаты этого участка діаграммы дадутъ величину поперечной силы, для любого сѣченія, проведеннаго между опорою A и силою P_1.

Въ сѣченіи правѣе силы P_1 поперечная сила будетъ $S_2 = A - P_1$. Поэтому проектируемъ конецъ силы P_1 многоугольника силъ въ точку g на вертикаль силы P_1. Изъ полученной точки g, проведемъ линію gf до пересѣченія съ вертикалью силы P_2, т. к. во всѣхъ сѣченіяхъ между силами P_1 и P_2 дѣйствуетъ поперечная сила $S_2 = A - P_1$. Въ сѣченіи, проходящемъ правѣе силы P_2 дѣйствуетъ уже сила $S_3 = A - P_1 - P_2$. Ее получимъ вычтя изъ предыдущей ординаты силу P_2, для чего поступимъ по указанному. Поступая такимъ образомъ и дальше увидимъ, что подъ силою P_2 поперечная сила перемѣнитъ знакъ, и дальнѣйшія ординаты станутъ отрицательными. Наконецъ между силой P_4 и опорой B поперечная сила будетъ $S_5 = A - \sum_1^4 P_i = -B$. На правую-же часть балки дѣйствуетъ сила $-S_5$, т. е. $+B$.

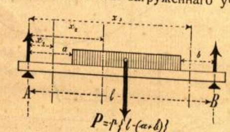
6. Поперечныя силы отъ равномѣрно распредѣленной нагрузки.

Величина суммы силъ въ этомъ случаѣ измѣняется непрерывно. Найдемъ ея величину, какъ для частичной, такъ и для полной равномѣрно распредѣленнной нагрузки.

Пусть въ общемъ случаѣ на балку дѣйствуетъ нагрузка, какъ показано на чертежѣ 10. Опредѣлимъ сначала сопротивленіе опоры A.

$$A = \frac{P}{l}\left(b + \frac{l-a-b}{2}\right) = \frac{p}{l}\left(bc + \frac{c^2}{2}\right),$$

гдѣ черезъ c обозначена величина загруженнаго участка $l-(a+b)$



Черт. 10.

Для сѣченія $x_1 < a$ будетъ $S_{x_1} = A$,

» » $x_2 > a < a + c$ » $S_{x_2} = A - p\,(x_2 - a)$,

» » $x_3 > l - b$ » $S_{x_3} = A - p\,(l - a - b)$. (5)

Сдѣлаемъ теперь въ выраженіи для S, $a = o$ и $b = o$, т. е. положимъ $c = l$, значитъ равномѣрно распредѣленная нагрузка распредѣлена по всему пролету; къ такой нагрузкѣ относится, напримѣръ, собственный вѣсъ балки. Поперечная сила въ любомъ сѣченіи будетъ:

$$S_x = A - px = p\left(\frac{l}{2} - x\right) \tag{6}$$

Это уравненіе принадлежитъ прямой линіи; т. е. можно сказать что: поперечная сила отъ постоянной равномѣрно распредѣленной нагрузки измѣряется ординатами прямой линіи, выраженной уравненіемъ (5).

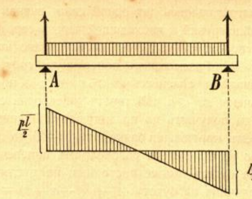
Эту прямую линію легко построить по двумъ точкамъ:

при $x = 0$:

$S_0 = A = \frac{pl}{2}$;

при $x = l$:

$S_l = B = -\frac{pl}{2}$.

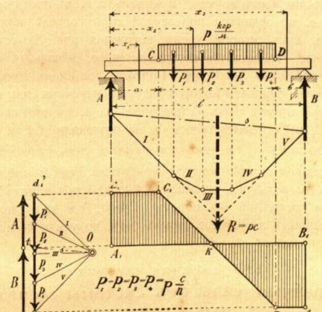


Черт. 11.

Прямая эта пересѣкаетъ ось абсциссъ при $x = \frac{l}{2}$; т. е. для середины балки поперечная сила отъ постоянной равномѣрно распредѣленной нагрузки $= O$.

Покажемъ теперь графическое опредѣленіе поперечныхъ силъ при равномѣрно распредѣленной нагрузкѣ.

Положимъ, что на балкѣ расположена равномѣрно распредѣленная нагрузка, расположенная, какъ видно на чертежѣ 12. Сначала найдемъ сопротивленія опоръ, для чего разобьемъ площадь равномѣрно-



Черт. 12.

распредѣленной нагрузки на произвольное число участковъ, къ серединамъ которыхъ приложимъ грузы равные величинѣ соотвѣтствующихъ площадей и, для полученной системы сосредоточенныхъ грузовъ построимъ веревочный многоугольникъ; достаточно также построить многоугольникъ для одной силы, равной всей равномѣрно-распредѣленной нагрузкѣ и проходящей черезъ середину грузовой площади. Затѣмъ расположимъ чертежъ, какъ указано на стр. 15, и проведемъ линію $A_1 B_1$. Разсмотримъ поперечную силу, какъ и при аналитическомъ выводѣ въ сѣченіяхъ: $x_1 \leqq a$, $x_2 > a$, но $< l - b$, и $x_3 > l - b$. Лѣвѣе сѣченія $x_1 < a$ дѣйствуетъ лишь одна сила A. Ординату поперечной силы получимъ по предыдущему. Ордината эта будетъ постоянна на всемъ протяженіи балки отъ $x = 0$ до $x = a$ и опредѣлитъ собою линію $d_1 C_1$. Теперь разсмотримъ поперечную силу въ сѣченіи $x_3 > l - b$; она будетъ также постоянна на протяженіи отъ $x = l - b$ до $x = l$. Величина ея будетъ $A - p\,(l - a - b) = A - pc$; величина эта отрицательна и, какъ видно изъ многоугольника силъ, равна $-B$. Для разсматриваемаго участка балки получимъ линію $b_1 D_1$, опредѣляющую ординаты поперечной силы между точками D и B. Остается построить линію поперечныхъ силъ для участка CD. Мы видѣли, что на протяженіи этого участка, поперечная сила будетъ $S_2 = A - p\,(x_2 - a)$ гдѣ x_2 нужно брать въ предѣлахъ отъ a до $a + c$. Ординату поперечной силы A, мы уже получили, а второй членъ начинаетъ измѣнять ординаты той-же линіи отъ точки C_1 и вліяетъ на всемъ протяженіи участка CD, т. е. до ординаты поперечной силы, опредѣляемой точкою D_1; а такъ какъ второй членъ выраженія для S_2 есть уравненіе линейное, то остается построить линію, начальная и конечная точки которой намъ извѣстны. Поэтому, соединивъ точки C_1 и D_1 получимъ линію, ординаты которой дадутъ поперечныя силы на участкѣ CD. Если-бы нагрузка была распредѣлена на всемъ протяженіи балки, то точки C_1 и D, перемѣстились бы на вертикали AA_1 и BB_1; $d_1't$ оказалось бы $= b_1 t = \frac{pl}{2}$ и линія поперечныхъ силъ получила бы видъ уже намъ знакомый изъ предыдущаго чертежа. Если бы имѣли нагрузку смѣшанную, то пользуясь независимостью дѣйствія такихъ нагрузокъ, при помощи построеній указанныхъ на черт. 9 и 12 и сложивъ ординаты, полученныхъ линій поперечныхъ силъ, получили бы искомыя ихъ величины для любого сѣченія.

b. Временная нагрузка.

7. Поперечныя силы отъ системы сосредоточенныхъ грузовъ.

Въ этомъ случаѣ величина поперечной силы въ данномъ сѣченіи будетъ во все время движенія системы грузовъ измѣняется. Дѣйствительно, въ выраженіи

$$S_x = A - \sum_1^k P_i,$$

первый членъ уже не будетъ постояннымъ и измѣняется вмѣстѣ съ малѣйшимъ перемѣщеніемъ системы грузовъ. Въ тоже время второй членъ, т. е. величина суммы грузовъ, лежащихъ по одну сторону даннаго сѣченія (напр. влѣво) измѣнится лишь, когда одинъ изъ грузовъ перейдетъ черезъ это сѣченіе. Напр. на черт. 13, при передвиженіи системы грузовъ влѣво, въ то время какъ величина сопротивленія лѣвой опоры будетъ мѣняться непрерывно, величина $\sum_1^k P_i$ равна P_1 во все время пока грузъ P_2 не подойдетъ къ точкѣ C и не станетъ непосредственно лѣвѣе ея. Отсюда слѣдуетъ, что количество S_x измѣняется во все время движенія системы. Въ частномъ случаѣ, если бы имѣли одинъ подвижной грузъ, напр. P_2 то пока этотъ грузъ будетъ правѣе сѣченія, второй членъ выраженія для S_x будетъ имѣть значеніе 0, и

Черт. 13.

слѣдовательно величина $S_x = A$ будетъ положительна. При этомъ изъ значенія $A = P\,\frac{l-a}{l}$ легко видѣть, что разсматриваемая величина поперечной силы S_x увеличивается съ уменьшеніемъ a, т. е. съ приближеніемъ груза P_2, лежащаго правѣе сѣченія mn къ этому сѣченію. Но когда этотъ грузъ, подойдя къ сѣченію, станетъ чуть лѣвѣе его, второй членъ выраженія для S_x измѣнитъ свое значеніе 0 въ P и тогда будетъ

$$S = P_2\,\frac{l - x}{l} - P_2,$$

что очевидно < 0.

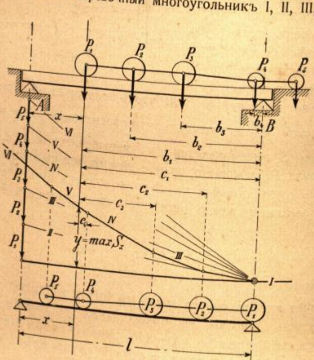
Если-бы вмѣсто одного груза мы имѣли нѣсколько, то по независимости ихъ дѣйствія мы точно также увидѣли-бы что: всякій грузъ лежащій правѣе даннаго сѣченія вызываетъ положительную поперечную силу, а всякій грузъ влѣво отъ сѣченія дастъ отрицательную поперечную силу.

Поэтому для полученія въ любомъ сѣченіи наибольшаго положительнаго значенія поперечной силы, слѣдуетъ устанавливать на балкѣ систему подвижныхъ сосредоточенныхъ грузовъ такимъ образомъ, чтобы была нагружена часть балки правѣе даннаго сѣченія, причемъ первый грузъ располагаютъ надъ самимъ сѣченіемъ. Слѣдуетъ замѣтить, что можетъ случиться, что наибольшее значеніе S_{max} произойдетъ иногда и при расположеніи перваго груза лѣвѣе даннаго сѣченія, что будетъ въ томъ случаѣ, когда первый грузъ сравнительно малъ, а слѣдующіе за нимъ сравнительно велики. Такимъ образомъ можетъ быть

$$S = A - P_1 = \frac{1}{l}\sum_1^{n-1} Pb - P_1 > \frac{1}{l}\sum_1^{n} Pb'.$$

Графическій способъ для нахожденія величины наибольшей поперечной силы для различныхъ сѣченій балки указанъ германскимъ профессоромъ Винклеромъ. Онъ состоитъ въ слѣдующемъ:

На вертикали лѣвой опоры строимъ многоугольникъ силъ, для чего величину перваго изъ крайнихъ грузовъ, который предполагаемъ устанавливать надъ сѣченіемъ откладываемъ первою вверхъ (или внизъ), затѣмъ послѣдовательно величины остальныхъ грузовъ, помѣщающихся на балкѣ. Полюсъ выбирается въ точкѣ противоположной опоры; проведя лучи, затѣмъ строятъ веревочный многоугольникъ I, II, III, IV, V и VI



Черт. 14.

на грузахъ, причемъ первый грузъ P_1 располагается надъ опорой B, а остальные послѣдовательно влѣво, такъ что система грузовъ является повернутой вокругъ вертикальной оси на 180° отъ своего невыгоднѣйшаго положенія. Первый бокъ веревочнаго многоугольника сольется съ линіей балки. Ординаты, ограниченные съ одной стороны боками веревочнаго многоугольника, а съ другой линіею балки, дадутъ

по величинѣ наибольшія положительныя значенія поперечныхъ силъ въ соотвѣтствующихъ сѣченіяхъ. Такъ, для сѣченія въ разстояніи x отъ лѣвой опоры

$$\max S_x = y\,.$$

Это легко доказать; дѣйствительно, имѣемъ:

$$Al = P_1 b_1 + P_2 b_2 + P_3 b_3\,;$$

но по построенію имѣемъ

$$b_1 = c_1\,;\; b_2 = c_2\,;\; b_3 = c_3 \text{ и } b_4 = c_4\,;$$

стало быть:

$$Al = P_1 c_1 + P_2 c_2 + P_3 c_3\,.$$

Вторая часть есть сумма моментовъ параллельныхъ силъ относительно проведеннаго сѣченія. Согласно извѣстной теоремы графической статики (I. 8) эта сумма моментовъ равна произведенію изъ полюснаго разстоянія на ординату, отсѣкаемую соотвѣтственными боками веревочнаго многоугольника, построеннаго на силахъ. Въ данномъ случаѣ полюсное разстояніе есть l, поэтому:

$$M = yl = Al,$$

т. е.

$$\boxed{\max S_x = y = A.} \tag{7}$$

Веревочный многоугольникъ I, II, III, IV, V, VI, построенный указаннымъ способомъ, называется **многоугольникомъ опорныхъ сопротивленій**.

8. Поперечныя силы отъ равномѣрно распредѣленной нагрузки.

Положимъ на черт. 10, $b = o$ и $x_2 = x = a$, т. е. загрузимъ равномѣрно распредѣленною нагрузкой всю правую часть балки, тогда выраженіе (5) приметъ значеніе:

$$\boxed{\max S_x = A = \frac{p\,(l-x)^2}{2l}\,.} \tag{8}$$

Случай этотъ имѣетъ мѣсто при расчетѣ мостовъ, когда подвижная нагрузка можетъ занимать часть пролета. Изъ послѣней формулы видно, что **величина наибольшей поперечной силы отъ равномѣрно-распредѣленной подвижной нагрузки, подвигающейся отъ одной опоры къ другой, измѣняется по закону параболы,** т. е. наибольшая поперечная сила измѣряется ординатой параболы, выраженной уравненіемъ (8). Вершина этой параболы на опорѣ B ибо при $x=l$ имѣетъ $S=o$. Наибольшая ордината этой параболы будетъ при $x=o$

$$\max S_0 = A = \frac{pl}{2}.$$

Точки этой параболы могутъ быть опредѣлены такъ. Найдемъ величину $max\ S_x$, т. е. когда подвижная нагрузка занимаетъ протяженіе балки отъ B до D, черт. 15. Отложимъ $A_1C=\frac{pl}{2}$, проведемъ CB_1. Изъ точки E пересѣченія CB_1 съ вертикалью точки D проведемъ $EF \parallel A_1B_1$. Точку F соединимъ съ B_1; тогда въ пересѣченіи съ вертикалью точки D получимъ ординату искомой параболы $GD_1=S_x$. Дѣйствительно, изъ подобія треугольниковъ $\triangle FA_1B_1$ и $\triangle GD_1B_1$ имѣемъ:

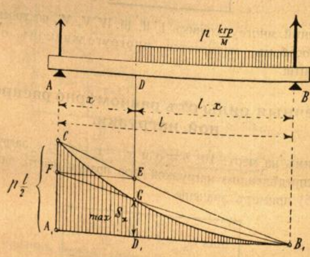
$$\frac{D_1G}{A_1F}=\frac{l-x}{l},$$

но

$$A_1F=D_1E,$$

слѣд.

$$\frac{D_1G}{D_1E}=\frac{l-x}{l}, \text{ но и } \frac{D_1E}{A_1C}=\frac{l-x}{l}.$$



Черт. 15.

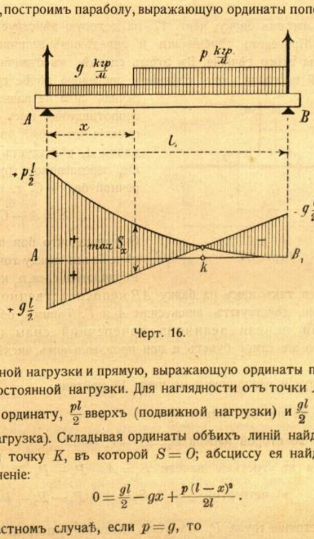
Перемножимъ эти пропорціи почленно:

$$\frac{D_1G}{A_1C}=\frac{(l-x)^2}{l^2};\quad A_1C=\frac{pl}{2},$$

и слѣдовательно

$$D_1G=p\,\frac{(l-x)^2}{2l}=\max\ S_x.$$

Выше было указано, что если на балку дѣйствуетъ постоянная нагрузка, то $S_x=O$ имѣетъ мѣсто для середины балки. Въ присутствіи подвижной нагрузки нулевая точка передвигается въ сторону, именно по направленію опоры, со стороны которой нагрузка надвигается. Дѣйствительно, построимъ параболу, выражающую ординаты поперечной силы



Черт. 16.

отъ подвижной нагрузки и прямую, выражающую ординаты поперечныхъ силъ отъ постоянной нагрузки. Для наглядности отъ точки A отложимъ начальную ординату, $\frac{pl}{2}$ вверхъ (подвижной нагрузки) и $\frac{gl}{2}$ внизъ (постоянная нагрузка). Складывая ординаты обѣихъ линій найдемъ въ ихъ пересѣченіи точку K, въ которой $S=O$; абсциссу ея найдемъ разрѣшивъ уравненіе:

$$0=\frac{gl}{2}-gx+\frac{p\,(l-x)^2}{2l}. \qquad (9)$$

Въ частномъ случаѣ, если $p=g$, то

$$x=0{,}586\,l.$$

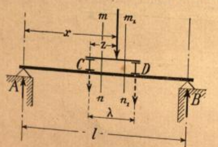
Если бы имѣли систему подвижныхъ грузовъ, то вмѣсто параболы, представленной на этомъ чертежѣ 16, слѣдовало бы построить многоугольникъ опорныхъ сопротивленій, какъ на черт. 14.

B. Узловая передача грузовъ.

а. Постоянная нагрузка.

9. Поперечная сила отъ сосредоточенныхъ грузовъ.

Пусть имѣемъ балку, черт. 17, на которую дѣйствуетъ нѣкоторый грузъ. Проведемъ сѣченіе mn и опредѣлимъ величину поперечной силы для этого сѣченія. Въ этомъ случаѣ, въ отличіе отъ непосредственной передачи, хотя сѣченіе и проведено лѣвѣе груза, поперечная сила не равна опорному сопротивленію, такъ какъ лѣвѣе сѣченія mn кромѣ сопротивленія опоры A, дѣйствуетъ еще давленіе, передаваемое грузомъ поперечной балкѣ C, т. е.



Черт. 17.

$$S = A - C.$$

Очевидно, что при перемѣщеніи сѣченія mn между точками C и D въ положеніе, $m_1 n_1$ количество S не измѣнится, такъ какъ на балку AB непосредственно, лѣвѣе взятыхъ сѣченіи, дѣйствуютъ лишь силы A и C. Такимъ образомъ, на протяженіи панели величина поперечной силы постоянна. Очевидно то же самое будетъ и при произвольномъ числѣ грузовъ.

Для случая указанннаго на черт. 18 найдемъ:

для сѣченія въ первой панели $S_1 = A$;

для сѣченія во второй панели $S_2 = A - P_1 \frac{\lambda_1 - z_1}{\lambda_1}$;

для сѣченія въ третьей панели $S_3 = A - P_1 - P_2 \frac{\lambda_2 - z_2}{\lambda_2}$;

» » » четвертой » $S_4 = A - P_1 - P_2 - P_3 \frac{\lambda_3 - z_3}{\lambda_3}$;

гдѣ z_i разстояніе груза P_i отъ узла лежащаго непосредственно лѣвѣе этого груза.

Такимъ образомъ въ общемъ видѣ можно написать:

$$S_x = A - \sum_1^k P - \sum_1^m P \frac{\lambda - z}{\lambda} \tag{10}$$

гдѣ $\sum\limits_1^k$ есть сумма грузовъ лежащихъ въ панеляхъ лѣвѣе даннаго сѣченія, а послѣдній членъ—сопротивленіе ближайшаго къ сѣченію лѣваго узла, причемъ m число грузовъ въ этой панели.

Черт. 18.

Для построенія діаграммы для поперечныхъ силъ, въ этомъ случаѣ поступаемъ, какъ и въ случаѣ непосредственной нагрузки. Построивъ веревочный многоугольникъ на данныхъ силахъ, черт. 18, затѣмъ проводимъ вертикали чарезъ узлы; точки пересѣченія этихъ вертикалей съ боками веревочнаго многоугольника соединяемъ между собою, тогда вписанный многоугольникъ представитъ собою веревочный многоугольникъ, построенный на составляющихъ отъ данныхъ силъ по узламъ. На черт. 18 онъ прочерченъ жирной линіей. Проведя въ многоугольникѣ силъ пунктирные лучи, параллельные бокамъ новаго веревочнаго многоугольника, получимъ величины составляющихъ, дѣйствующихъ въ узлахъ. Остается поступить дальше какъ указано на стр. 15, что понятно изъ разсмотрѣнія чертежа.

Въ балкѣ съ равными или симметричными панелями и когда нагрузка симметрична, численная величина поперечныхъ силъ получается особенно просто. Разсмотримъ такой случай, ибо ниже, при равныхъ панеляхъ, намъ придется имѣть дѣло.

При четномъ числѣ панелей, поперечная сила въ среднихъ паняхъ, т. е. лѣвѣе и правѣе середины балки, равна половинѣ нагрузки средняго узла (со знаками $+$ и $-$); при нечетномъ числѣ панелей, поперечная сила въ средней панели равна нулю. Поперечныя силы въ прочихъ панеляхъ получаются послѣдовательнымъ прибавленіемъ величинъ узловыхъ нагрузокъ отъ середины къ концамъ балки. Назовемъ черезъ P_i узловую нагрузку узла i, т. е. узла, ограничивающаго панель i справа; тогда найдемъ напр.

для балки съ 6 панелями; для балки съ 5 панелями

$$S_3 = \frac{1}{2} P_3; \qquad S_3 = 0;$$
$$S_2 = S_3 + P; \qquad S_2 = P_2;$$
$$S_1 = S_2 + P_1; \qquad S_1 = S_2 + P_1.$$

Вообще будетъ:

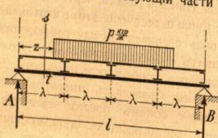
$$S_i = S_{i+1} + P_i,$$

гдѣ для лѣвой половины балки $i \leqq \frac{n}{2}$.

10. Поперечныя силы отъ равномѣрно распредѣленной нагрузки.

Отличіе отъ поперечныхъ силъ для непосредственной нагрузки заключается въ томъ, что величина поперечныхъ силъ измѣняется не по закону прямой линіи, а по линіи ступенчатой, такъ какъ на протяженіи панели величина $S = Const.$

Въ выраженіи для S всегда необходимо прибавлять отрицательный членъ соотвѣтствующій части нагрузки, передающейся узлу, ограничивающему панель слѣва. Такъ, на черт. 19, поперечная сила для сѣченія st проведеннаго въ первой панели будетъ



Черт. 19.

$$S = A - p\,\frac{(\lambda - z)^2}{2\lambda},$$

хотя лѣвѣе сѣченія st и не имѣется непосредственной нагрузки.

Если нагрузка g распредѣлена равномѣрно по всему пролету, то при равныхъ панеляхъ, величины поперечныхъ силъ будутъ:

$$S_1 = A - \frac{g\lambda}{2};$$
$$S_2 = A - \frac{3}{2} g\lambda;$$

$$S_3 = A - \frac{5}{2} g\lambda;$$

. . . .

. . . .

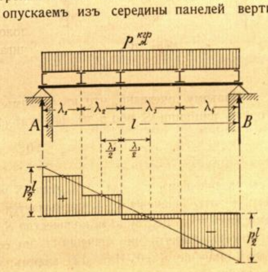
$$S_m = A - \left\{ m - \frac{1}{2} \right\} g\lambda.$$

Если желаемъ выразить S_m взависимости отъ номера панели m, при полномъ числѣ равныхъ панелей n,—изъ послѣдняго выраженія найдемъ:

$$S_m = \left\{ \frac{n+1}{2} - m \right\} g\lambda. \qquad (11)$$

Если число панелей нечетное, то $S_m = 0$ для средней панели, когда число панелей четное, то поперечная сила равна нулю для сѣченія, проведеннаго черезъ средній узелъ.

Для построенія линіи поперечныхъ силъ для полной равномѣрно распредѣленной нагрузки, строимъ линію какъ для непосредственной нагрузки, черт. 20; затѣмъ опускаемъ изъ середины панелей вертикали и черезъ точки пересѣченія этихъ вертикалей съ построенной линіей проводимъ горизонтальныя отрѣзки, которые въ пересѣченіи съ вертикалями узловъ и дадутъ ступенчатую линію поперечныхъ силъ.



Черт. 20.

Если нагрузка расположена не на всемъ пролетѣ, то не представляетъ затрудненія построить діаграмму, какъ то указано для сосредоточенной нагрузки. Построивъ веревочный многоугольникъ какъ при непосредственной нагрузкѣ и опустивъ вертикали узловъ до пересѣченія съ боками этого веревочнаго многоугольника, найдемъ новый веревочный многоугольникъ, а затѣмъ, проведя новые лучи въ многоугольникѣ силъ, по извѣстнымъ уже правиламъ, построимъ діаграмму поперечныхъ силъ.

При равныхъ панеляхъ и полной равномѣрно распредѣленной нагрузкѣ, слѣдуетъ пользоваться указаніями предыдущаго номера.

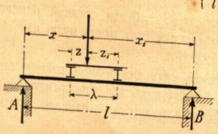
ѣ. Временная нагрузка.

11. Поперечныя силы отъ сосредоточенныхъ грузовъ.

Разсмотримъ черт. 21. При перемѣщеніи груза, члены въ правой части выраженія (10) измѣняются. Изслѣдуемъ каково должно быть положеніе груза на протяженіи панели, чтобы получить наибольшую величину поперечной силы.

Обозначимъ разстояніе груза отъ правой опоры и узла, ограничивающаго панель справа черезъ x_1 и z_1, найдемъ (10):

$$S = P\left\{\frac{x_1}{l} - \frac{z_1}{\lambda}\right\}, \qquad (12)$$



Черт. 21.

Если $z_1 = 0$, т. е. грузъ расположенъ надъ узломъ, ограничивающимъ панель справа, то

$$S' = P\frac{x_1}{l} > 0;$$

Если $z_1 = \lambda$, т. е. грузъ расположенъ надъ узломъ, ограничивающимъ панель слѣва, то

$$S'' = P\left(\frac{x_1}{l} - 1\right) < 0.$$

Поэтому очевидно, что въ первомъ случаѣ будетъ $S = \max$. во второмъ minimum S, ибо z_1 въ формулѣ (12)

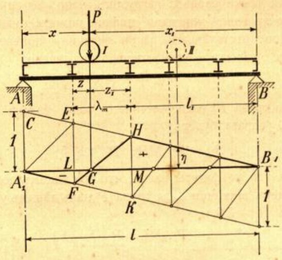
$$z_1 \gtreqless 0; \quad z_1 \lesseqgtr \lambda;$$

и съ увеличеніемъ z_1 — да отъ нуля, S уменьшается, и съ уменьшеніемъ z_1 отъ значенія λ — уменьшается по абсолютной величинѣ. Такъ какъ по существу дѣла количество S, при измѣненіи своего знака, не можетъ принять ни значенія $^0/_0$ ни ∞, то оно должно пройти черезъ значеніе $S = 0$. Изъ (12) видимъ, что это будетъ при существованіи пропорціи

$$\frac{x_1}{l} = \frac{z_1}{\lambda} \qquad (13)$$

Та точка въ каждой панели, для которой S мѣняетъ свой знакъ, называется точкою раздѣла нагрузки. Если грузъ P расположить надъ этой точкой, то поперечная сила равна нулю. Если грузъ расположенъ правѣе этой точки, поперечная сила имъ вызываемая положительна, если-же грузъ лѣвѣе этой точки, поперечная сила будетъ отрицательна.

Написанная пропорція указываетъ, что точка раздѣла нагрузки дѣлитъ панель и пролетъ на части между собою пропорціональныя. Ихъ весьма легко опредѣлить геометрическимъ путемъ.



Черт. 22.

Изъ концовъ A и B возставляемъ перпендикуляры въ противоположныя стороны и откладываемъ на нихъ произвольныя, но равныя между собою величины.

Концы отложенныхъ отрѣзковъ соединяемъ съ противоположными опорами и проводимъ вертикали черезъ узлы. Точки пересѣченія этихъ вертикалей, съ построенными наклонными, соединяемъ въ каждой панели между собою какъ указано на черт. 22. Въ пересѣченіи послѣднихъ отрѣзковъ съ линіею A_1B_1 находимъ точки раздѣла нагрузокъ.

Дѣйствительно, изъ подобія

$$\Delta A_1FG \infty \Delta GHB_1 \text{ и } \Delta GHM \infty \Delta LGF:$$

$$\frac{B_1G}{A_1G} = \frac{HM}{LF} = \frac{GM}{GL},$$

т. е.

$$\frac{x_1}{x} = \frac{z_1}{z};$$

но по свойству пропорціи

$$\frac{x_1}{x + x_1} = \frac{z_1}{z + z_1},$$

т. е.

$$\frac{x_1}{l} = \frac{z_1}{\lambda},$$

что именно и требовалось доказать.

Если отрѣзки, отложенные на перпендикулярахъ равны единицѣ, то построенный чертежъ дастъ возможностъ рѣшить и другую задачу. Ординаты фигуры, ограниченной линіями A_1K и CB_1 и наклонными, опредѣляющими точки раздѣла нагрузокъ, напр. для панели λ_m—ордината фигуры очерченной жирными линіями помноженная на величину груза P ей соотвѣтствующаго, дастъ величину поперечной силы S, такъ какъ эта ордината η удовлетворяетъ уравненію

$$\eta=\frac{x_1}{l}-\frac{z_1}{\lambda};$$

Напр. для груза P, расположеннаго надъ узломъ ограничивающимъ панель λ_m справа будетъ

$$S'_m=P\,.\,MH=P\,.\,1\,.\,\frac{l_1}{l};$$

при этомъ изъ той же фигуры видно, что при такомъ положеніи груза значеніе S_m будетъ maximum; для груза P надъ лѣвымъ узломъ той же панели, будетъ $(l_1'=LB_1)$.

$$S''_m=-P\,.\,FL=P\left(\frac{l_1'}{l}-1\right);$$

Наконецъ для груза P въ положеніи II — будетъ $S_m'''=\eta P$.

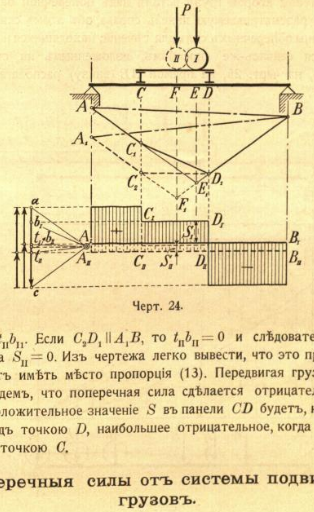
Если имѣемъ дѣло съ балкой, подраздѣленной на n равныхъ панелей, то для нахожденія точекъ раздѣла нагрузки надо балку раздѣлить на $n-1$ равныхъ частей; точки дѣленія опредѣлятъ точки раздѣла нагрузки. Это слѣдуетъ изъ предыдущаго построенія.

Черт. 23.

Изслѣдуемъ зависимость между измѣненіемъ величины S и перемѣщеніемъ груза въ панели—графическимъ путемъ. Возьмемъ балку AB съ однимъ грузомъ въ панели CD. Построивъ $ac=P$, выбравъ произвольный полюсъ O*), строимъ на силѣ P веревочный многоугольникъ. Проведя вертикали CC_1 и DD_1 и соединивъ точки C_1 и D_1, получимъ новый веревочный многоугольникъ AC_1D_1B, соотвѣтствующій данной узловой нагрузкѣ. Проведя лучъ $Ot_I \parallel AB$ находимъ сопротивленія опоръ $at_I=A$ и $ct_I=B$, затѣмъ проводимъ $Ob_I \parallel C_1D_1$; наконецъ строимъ діаграмму поперечныхъ силъ. Поперечная сила въ панели CD будетъ $S_I=b_It_I$. Теперь оставляя неизмѣннымъ многоугольникъ силъ, перемѣстимъ грузъ P въ точку F и построимъ новый ве-

*) На чертежѣ 24 эта буква за недостаткомъ мѣста не проставлена.

ревочный многоугольникъ. Для этого продолжаемъ BE_1 до пересѣченія съ FF_1 въ точкѣ F_1 и проводимъ $F_1A_1 \parallel$ лучу Oa, затѣмъ соединяемъ точку C_2 съ D_1. Чѣмъ болѣе влѣво будетъ продвигаться грузъ P, тѣмъ ниже будетъ опускаться бокъ D_1C_2. Проведя лучъ $Ob_{II} \parallel D_1C_2$ и лучъ $Ot_{II} \parallel BA_1$ найдемъ новую величину поперечной силы въ па-



Черт. 24.

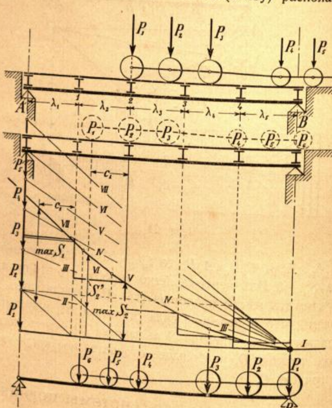
нели: $S_{II}=t_{II}b_{II}$. Если $C_2D_1 \parallel A_1B$, то $t_{II}b_{II}=0$ и слѣдовательно поперечная сила $S_{II}=0$. Изъ чертежа легко вывести, что это произойдетъ, когда будетъ имѣть мѣсто пропорція (13). Передвигая грузъ P далѣе влѣво, найдемъ, что поперечная сила сдѣлается отрицательной. Наибольшее положительное значеніе S въ панели CD будетъ, когда грузъ станетъ надъ точкою D, наибольшее отрицательное, когда грузъ станетъ надъ точкою C.

12. Поперечныя силы отъ системы подвижныхъ грузовъ.

Грузъ, лежащій правѣе точки раздѣла, вызываетъ, по только что доказанному, въ панели, образованной двумя смежными поперечными балками, появленіе положительныхъ поперечныхъ силъ, грузъ же лежащій лѣвѣе ея—появленіе силъ отрицательныхъ. Наибольшая положительная поперечная сила появится въ этой панели въ томъ случаѣ, когда система подвижныхъ грузовъ, передвигаясь влѣво отъ правой опоры, придетъ своимъ первымъ грузомъ въ узелъ, ограничивающій панель справа; наибольшая-же отрицательная—когда система грузовъ, передвигаясь вправо отъ лѣвой опоры, придетъ своимъ первымъ грузомъ въ узелъ, ограничивающій ту-же панель слѣва.

Можетъ, однако, случиться, что поперечная сила получитъ еще большую величину, если систему грузовъ передвинуть далѣе влѣво настолько, чтобы второй грузъ всталъ надъ поперечной балкой, ограничивающей разсматриваемую панель справа; объ этомъ сказано ниже.

Величины поперечныхъ силъ для сѣченій, находящихся надъ узлами, опредѣляются сейчасъ-же способомъ, изложеннымъ на стр. 20. Съ этою цѣлью, на черт. 25, на прямой AB (внизу) располагаютъ грузы



Черт. 25.

въ обратномъ порядкѣ такъ, чтобы грузъ P_1 приходился въ точкѣ B, и соединяютъ ихъ послѣдовательно на вертикали точки A въ многоугольникъ силъ. Выбравъ затѣмъ за полюсъ точку B, проводятъ лучи и строятъ веревочный многоугольникъ I, II...... VII.

Отрѣзки ординатъ, соотвѣтствующихъ узламъ, заключенные между горизонтальной прямой и веревочнымъ многоугольникомъ, представляютъ собой величины наибольшихъ поперечныхъ силъ въ

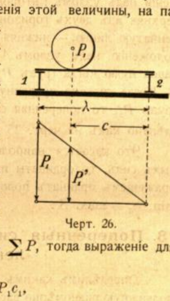
узловыхъ точкахъ, при расположеніи перваго груза надъ даннымъ узломъ. Напримѣръ, на черт. 25 ордината, измѣренная подъ поперечною балкою 2, представляетъ наибольшую поперечную силу S_2 для сѣченій въ панели λ_2.

Если систему грузовъ передвинуть по балкѣ влѣво такъ, чтобы надъ поперечной балкой 2 всталъ второй грузъ, то грузъ P_1 на узелъ 1 произведетъ давленіе:

$$P_1' = \frac{P_1\ c_1}{\lambda},$$

гдѣ c_1 разстояніе между двумя первыми грузами, а λ—длина панели.

Поэтому поперечная сила въ разсматриваемой панели будетъ $S_2' = A_2' - P_2'$. Для графическаго опредѣленія этой величины, на панели 2 строимъ треугольникъ съ высотою P. На черт. 26 построеніе это сдѣлано отдѣльно. Ордината подъ грузомъ P_1 даетъ величину P_1'. Это же построеніе сдѣлано и на черт. 25 для полученія величины $S_2' = A_2' - P$. Если S'_2 окажется больше S_2, то второе расположеніе подвижной нагрузки болѣе опасно и принимается для расчета балки.



Черт. 26.

Аналитически вопросъ о томъ, какое расположеніе системы подвижныхъ грузовъ дастъ $S_{max.}$ въ данной панели, рѣшается слѣдующимъ образомъ. Обозначимъ сумму всѣхъ грузовъ, лежащихъ на балкѣ черезъ $\sum P$, тогда выраженіе для поперечной силы дастъ

$$S_m = \frac{1}{l}\sum Pb - \frac{1}{\lambda}P_1 c_1,$$

гдѣ c_1 есть разстояніе между первымъ и вторымъ грузами, а b_i разстояніе груза P_i до правой опоры. Передвинувъ систему влѣво на безконечно малую величину Δb найдемъ, что $b' = b + \Delta b$ и $c' = c_1 + \Delta b$, т. е. приращеніе величины поперечной силы будетъ

$$\Delta S_m = \Delta b\left(\frac{1}{l}\sum P - \frac{1}{\lambda}P_1\right).$$

Приращеніе это положительно, когда существуетъ соотношеніе

$$\frac{\Sigma P}{P_1} > \frac{l}{\lambda}. \tag{14}$$

Поэтому, если это отношеніе существуетъ, для полученія $S_{max.}$ слѣдуетъ надъ узломъ, ограничивающимъ панель справа, поставить второй грузъ. Это обыкновенно происходитъ при большихъ панеляхъ.

Въ частномъ случаѣ можетъ оказаться, что наибольшее значеніе $S_{max.}$ получается и при расположеніи двухъ грузовъ на панели; это будетъ, когда

$$\frac{\Sigma P}{P_1 + P_2} > \frac{l}{\lambda} \text{ и т. д.}$$

Наибольшія положительныя поперечныя силы для другихъ панелей опредѣлятся подобнымъ же образомъ. Такъ какъ на протяженіи панели величина S постоянна, то діаграмма поперечныхъ силъ выразится ступенчатою кривою, вписанною въ многоугольникъ опорныхъ сопротивленій. Построеніе этой линіи для среднихъ панелей не требуетъ поясненій; въ первой панели max. S_1 получается при расположеніи надъ узломъ 1 второго груза. Этой величинѣ S_1 соотвѣтствуетъ верхняя изъ двухъ горизонтальныхъ прямыхъ, ограничивающихъ ступенчатую линію, — нижняя же горизонтальная черта соотвѣтствуетъ положенію надъ узломъ 1 груза P_1. Въ панели λ_5 поперечная сила равна нулю когда грузъ P_1 надъ правымъ узломъ, т. е. надъ опорой B. Когда система продвинута влѣво, такъ что надъ опорой B стоитъ грузъ P_2, то поперечная сила въ панели λ_5 отрицательна. Построеніе сдѣлано какъ на черт. 25 для λ_2; $S'_5 = A'_5 - P'_1 = P_1\left(\frac{c_1}{l} - \frac{c_1}{z}\right) < 0$.

Что касается наибольшихъ значеній отрицательныхъ поперечныхъ силъ, то ординаты ихъ опредѣляющія будутъ зеркальнымъ изображеніемъ ординатъ положительныхъ поперечныхъ силъ. Такъ напр., min. S_4 = max. S_2.

13. Поперечныя силы при равномѣрно распредѣленной нагрузкѣ.

Опредѣлимъ какимъ образомъ слѣдуетъ установить на балкѣ подвижную равномѣрно распредѣленную нагрузку, чтобы получить наибольшую величину поперечной силы въ произвольной панели. Выше уже видѣли, что для этого слѣдуетъ загрузить всю правую часть, причемъ при сосредоточенной нагрузкѣ слѣдуетъ первый грузъ ставить надъ узломъ, ограничивающимъ панель справа. При равномѣрно-распредѣленной нагрузкѣ ее слѣдуетъ продвинуть и лѣвѣе того узла до точки, которую мы выше назвали точкою раздѣла нагрузки. Это легко доказать. Пусть нагрузка расположена, какъ указано на черт. 27. Разстояніе между точкой начала нагрузки и узломъ, ограничивающемъ панель справа, назовемъ черезъ z_1, разстояніе между той-же точкою и правой опорой черезъ x_1 и разстояніе отъ той-же опоры до указаннаго узла черезъ l_1. При принятыхъ обозначеніямъ и показанномъ расположеніи нагрузки, сопротивленіе лѣвой опоры будетъ:

$$A = \frac{p x_1^2}{2l};$$

Сопротивленіе узла, ограничивающаго панель слѣва

$$P_1 = \frac{p z_1^2}{2\lambda};$$

Поэтому поперечная сила

$$S = \frac{p}{2}\left(\frac{x_1^2}{l} - \frac{z_1^2}{\lambda}\right).$$

Это уравненіе принимаетъ наибольшее значеніе, когда удовлетворено равенство (13) *):

$$\frac{x_1}{l} = \frac{z_1}{\lambda}.$$

Пропорція эта, какъ выше было указано, опредѣляетъ собою положеніе точки раздѣла нагрузки. Поэтому **наибольшая положительная поперечная сила** въ данной панели будетъ имѣть мѣсто, когда равномѣрно распредѣленная нагрузка займетъ всю **правую** часть балки отъ точки раздѣла нагрузки до правой опоры, **наибольшая отрицательная**—когда нагрузку займетъ часть балки **влѣво** отъ той-же точки до лѣвой опоры.

Для подвижной равномѣрно распредѣленной нагрузки можно построить площадь наибольшихъ положительныхъ поперечныхъ силъ, какъ это было указано при непосредственной передачѣ, но въ этомъ случаѣ слѣдуетъ опредѣлить лишь по одной точкѣ параболы въ каждой панели, такъ какъ на протяженіи панели величина поперечной силы постоянна. Очевидно, что искомыя точки должны соотвѣтствовать точкамъ раздѣла нагрузокъ.

Построеніе сдѣлано на черт. 27 и легко доказать, что ордината $G_1G_2 = S_{max}$.

Выраженіе для S_{max}, принявъ во вниманіе (13) и выразивъ z_1 въ x_1 напишется такъ:

$$max\ S_x = \frac{p x_1}{2l} l_1.$$

---

*) Дѣйствительно, замѣняя x_1 черезъ $l_1 + z_1$, найдемъ, что

$$S = \frac{p}{2}\left\{\frac{(l_1 + z_1)^2 \lambda - z_1^2 l}{\lambda l}\right\}$$

S будетъ max, когда числитель max. Взявъ производную по z, и приравнявъ нулю:

$$l_1\lambda + z_1\lambda - z_1 l = 0,$$

или

$$x_1\lambda = z_1 l.$$

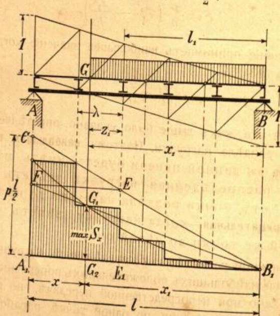
Вторая производная < 0, потому имѣемъ дѣло съ *maximum*'омъ функціи.

Изъ чертежа имѣемъ:

$$\frac{E_1E}{A_1C} = \frac{l_1}{l},$$

но

$$EE_1 = A_1F \text{ и } A_1C = \frac{pl}{2},$$



Черт. 27.

откуда

$$A_1F = \frac{pl_1}{2};$$

далѣе

$$\frac{G_1G_2}{A_1F} = \frac{x_1}{l},$$

слѣдовательно

$$G_1G_2 = \frac{px_1}{2l}\,l_1 = max\ S_x.$$

Если данная балка подраздѣлена на равныя панели, удобно выразить S_m взависимости отъ числа панелей $= n$ и номера разсматриваемой панели m. Имѣемъ

$$x_1 = (n - m)\,\lambda + z_1;$$

подставля сюда вмѣсто x_1 его значеніе изъ пропорціи (13) и замѣчая, что $\frac{l}{\lambda} = n$, найдемъ:

$$z_1 = \frac{n - m}{n - 1}\lambda;$$

подставляя эти значенія въ выраженіе для max S, окончательно найдемъ

$$\max\ S_m = \frac{p\lambda}{2}\,\frac{(n - m)^2}{n - 1}\,. \tag{15}$$

Весьма часто необходимо бываетъ знать въ какой панели поперечная сила измѣняетъ свой знакъ, когда на балку дѣйствуетъ и постоянная и временная равномѣрно-распредѣленныя нагрузки? Если назовемъ постоянную нагрузку черезъ g, а временную черезъ p, то согласно (11) и (15) составимъ квадратное уравненіе:

$$\frac{p\lambda}{2}\,\frac{(n - m)^2}{n - 1} + g\lambda\left(\frac{n + 1}{2} - m\right) = 0, \tag{15'}$$

которое слѣдуетъ разрѣшить относительно m. Въ случаѣ равныхъ значеній p и g получаемъ

$$m_0 = 2n - 1 - \sqrt{2n\,(n - 2)},$$

причемъ m необходимо округлить до цѣлаго числа.

§ 3.

Изгибающіе моменты.

А. Непосредственная передача грузовъ.

а. Постоянная нагрузка.

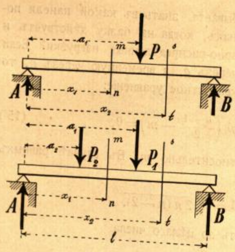
14. Изгибающіе моменты при сосредоточенныхъ грузахъ.

Изгибающій моментъ въ данномъ сѣченіи, есть сумма моментовъ силъ, дѣйствующихъ на отсѣченную часть балки, относительно какой либо точки плоскости сѣченія балки.

Обыкновенно моментъ вычисляется относительно центра тяжести сѣченія балки и считается положительнымъ тогда, когда кажущееся вращеніе совпадаетъ съ вращеніемъ часовой стрѣлки.

Понятно, что моментъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на разсматриваемую, напримѣръ лѣвую часть балки, долженъ по абсолютной величинѣ равняться моменту внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на правую часть балки. Что-же относится до знака, то съ переходомъ отъ разсматриваемой части балки къ другой, знакъ момента измѣняется на противоположный; это слѣдуетъ изъ начала противодѣйствія, по которому, если лѣвая часть балки дѣйствуетъ на правую въ одномъ направленіи, то эта послѣдняя дѣйствуетъ на первую въ направленіи противоположномъ.

Пусть имѣемъ простѣйшій случай—балку AB съ однимъ грузомъ. Возьмемъ сѣченіе mn между лѣвой опорой и грузомъ и разсмотримъ моментъ внѣшнихъ силъ дѣйствующихъ на лѣвую часть балки, относительно сѣченія mn, или, что то же, изгибающій моментъ въ данномъ сѣченіи. Лѣвѣе сѣченія mn дѣйствуетъ лишь одна сила —сопротивленіе опоры A, направленное вверхъ. Пользуясь условіемъ сдѣланнымъ раньше для опредѣленія знака момента, мы видимъ, что моментъ этотъ положительный, т. е.



Черт. 28.

$$M_{x1} = Ax_1.$$

Взявъ сѣченіе st, правѣе груза, напишемъ:

$$M_{x2} = Ax_2 - P\ (x_2 - a_1).$$

Если бы имѣли не одинъ грузъ, а нѣсколько, то воспользовавшись началомъ независимости, для каждой силы написали бы подобное выраженіе. Такъ, если бы лѣвѣе сѣченія mn расположена была бы еще сила P_2, то для сѣченія st написали бы:

$$M_1 = A_1 x_2 - P_1\ (x_2 - a_1),$$
$$M_2 = A_2 x_2 - P_2\ (x_2 - a_2),$$

гдѣ значки 1 и 2 при A и M означаютъ количества, вызываемыя соотвѣтственно грузами P_1 и P_2.

Такое же выраженіе написали бы и для каждой изъ n силъ. Припомнивъ, что моментъ равнодѣйствующей равенъ суммѣ моментовъ составляющихъ, вообще напишемъ:

$$M = \sum_1^n M_i = \sum_1^n A_i x - \sum_1^k P_i\ (x - a_i),$$

или

$$M = Ax - \sum_1^k P_i\ (x - a_i), \qquad (16)$$

гдѣ A_i сопротивленіе опоры, вызываемое грузомъ P_i, а A полное сопро-

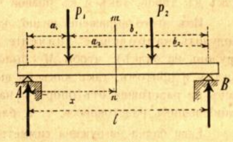
тивленіе опоры и k указатель послѣдняго груза (считая отъ лѣвой опоры), лежащаго лѣвѣе сѣченія.

Однако этимъ выраженіемъ не всегда удобно пользоваться, такъ какъ часто приходится опредѣлить изгибающій моментъ не зная сопротивленій опоръ. Пусть на балку дѣйствуютъ два сосредоточенныхъ груза P_1 и P_2, черт. 29. Возьмемъ сѣченіе между этими грузами въ разстояніи x отъ лѣвой опоры и разсмотримъ моментъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на лѣвую часть балки:

$$M_x = Ax - P_1\ (x - a_1).$$

Имѣемъ

$$A = \frac{P_1 b_1}{l} + \frac{P_2 b_2}{l}.$$



Черт. 29.

Подставивъ это значеніе въ выраженіе для M_x и замѣтивъ, что $b_1 = l - a_1$, получимъ

$$M_x = -P_1 \frac{a_1}{l} x + P_2 \frac{b_2}{l} x + P_1 a_1,$$

откуда

$$M_x = \frac{l - x}{l} P_1 a_1 + \frac{x}{l} P_2 b_2;$$

Здѣсь: $P_1\ a_1$ есть моментъ силы лежащей лѣвѣе сѣченія относительно лѣвой опоры, а $P_2\ b_2$ моментъ силы, лежащей правѣе сѣченія, относительно правой опоры. Воспользовавшись замѣчаніемъ, указаннымъ при выводѣ формулы (16), напишемъ выраженіе изгибающаго момента для произвольнаго числа, напримѣръ, для n грузовъ:

$$M = \frac{l - x}{l} \sum_1^k Pa + \frac{x}{l} \sum_n^{k+1} Pb,$$

гдѣ силы отъ 1 до k-ой лежатъ лѣвѣе сѣченія, а отъ $k+1$ до n правѣе его; указатель у M для краткости опущенъ.

Обыкновенно, для удобства запоминанія этой формулы знаки у $\sum$ ставятъ такимъ образомъ, чтобы они показывали ту часть балки, на которую дѣйствуютъ грузы, дающіе лѣвые и правые опорные моменты, т. е. ставятъ знаки o до x и отъ l до $l-x$, т. е.

$$\boxed{M = \frac{l - x}{l} \sum_o^x Pa + \frac{x}{l} \sum_l^{l-x} Pb.} \qquad (17)$$

Изгибающій моментъ для балки, свободно лежащей на двухъ опорахъ равенъ суммѣ моментовъ грузовъ, лежащихъ по сторонамъ сѣченія, относительно соотвѣтственныхъ опоръ, умноженныхъ на отношенія разстоянія сѣченія отъ противоположной опоры къ длинѣ пролета.

Грузъ, дѣйствующій въ самомъ сѣченіи, можетъ быть отнесенъ, какъ къ лѣвой, такъ и къ правой части балки.

Изъ этого выраженія видно, какъ нужно грузить балку, чтобы получить наибольшее значеніе M_x (самое невыгодное положеніе грузовъ на балкѣ): чтобы M_x было *max*-омъ, нужно грузить всю балку и притомъ, такъ какъ въ выраженіе входятъ произведенія грузовъ на разстоянія отъ опоръ,— наибольшіе грузы должны быть на наибольшихъ разстояніяхъ, т. е. близь середины балки.

Если балка нагружена симметричными относительно опоръ грузами, то $a=b$. Въ этомъ случаѣ для сѣченія между средними грузами

$$M=\sum_{1}^{\frac{1}{2}n} Pa,$$

гдѣ n полное число грузовъ. При двухъ симметричныхъ грузахъ находимъ:

$$M=Pa,$$

Въ случаѣ одного груза формула (17), для сѣченія подъ грузомъ, принимаетъ видъ:

$$M_x=P\frac{x(l-x)}{l}. \qquad (18)$$

Если этотъ грузъ по серединѣ балки, то имѣемъ часто встрѣчающееся на практикѣ выраженіе:

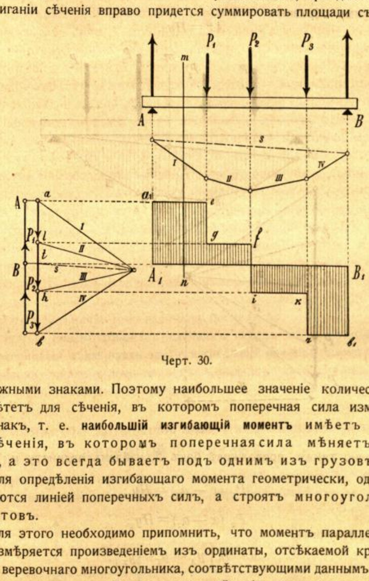
$$\boxed{M_{\frac{l}{2}}=\frac{Pl}{4}.}$$

Во всѣхъ этихъ частныхъ случаяхъ количество M есть maximum. Найдемъ признакъ, по которому мы всегда могли бы опредѣлить сѣченіе, для котораго имѣетъ мѣсто наибольшій изгибающій моментъ, т. е. опредѣлить опасное сѣченіе.

Для этого воспользуемся выраженіемъ (16), и разсмотримъ діаграмму для поперечныхъ силъ черт. 30. Эта діаграмма взята съ черт. 9 стр. 15, гдѣ указаны правила ея построенія. Изъ чертежа видно, что выраженіе

$$M_x=Ax-\sum_{1}^{k}P\,(x-a),$$

есть площадь, ограниченная линіей поперечныхъ силъ и линіей A_1B_1. Передвигая сѣченіе отъ лѣвой опоры къ правой, мы замѣтимъ, что количество M_x все время увеличивается пока мы не дойдемъ до сѣченія, гдѣ поперечная сила становится отрицательною; при дальнѣйшемъ передвиганіи сѣченія вправо придется суммировать площади съ проти-



Черт. 30.

воположными знаками. Поэтому наибольшее значеніе количество M_x пріобрѣтетъ для сѣченія, въ которомъ поперечная сила измѣняетъ свой знакъ, т. е. **наибольшій изгибающій моментъ** имѣетъ мѣсто для сѣченія, въ которомъ поперечная сила мѣняетъ свой знакъ, а это всегда бываетъ подъ однимъ изъ грузовъ.

Для опредѣленія изгибающаго момента геометрически, однако не пользуются линіей поперечныхъ силъ, а строятъ многоугольникъ моментовъ.

Для этого необходимо припомнить, что моментъ параллельныхъ силъ измѣряется произведеніемъ изъ ординаты, отсѣкаемой крайними боками веревочнаго многоугольника, соотвѣтствующими даннымъ силамъ на вертикали, проходящей черезъ данное сѣченіе,—на полюсное разстояніе. Пусть имѣемъ балку съ указаннымъ на черт. 31 четырьмя грузами.

Найдемъ изгибающій моментъ въ сѣченіи mn. Построимъ веревочный многоугольникъ на данныхъ грузахъ и проведемъ замыкающій бокъ. Изъ выраженія (16) выводимъ:

$$M=Ax-P_1\,(x-a_1)-P_2\,(x-a_2).$$

Моментъ сопротивленія опоры получимъ, продолживъ крайніе бока веревочнаго многоугольника соотвѣтствующіе силѣ A, — это будетъ замыкающій бокъ и бокъ I, — и опредѣлимъ произведеніе изъ найденной ординаты на полюсное разстояніе (I, стр. 47).

Такимъ образомъ

$$Ax = Hy_A.$$

Черт. 31.

Точно также, продолживъ бокъ II, найдемъ ординату y_1; слѣдовательно,

далѣе — $$P_1\,(x - a_1) = Hy_1;$$

сложивъ получимъ: $$P_2\,(x - a_2) = Hy_2;$$

т. е. $$M = H\left\{y_A - y_1 - y_2\right\},$$

$$\boxed{M = Hy.} \qquad (19)$$

Многоугольникъ A I, II, III, IV, V B и называется многоугольникъ моментовъ, а (заштрихованную) площадь его иногда называютъ также площадью моментовъ.

Итакъ, **изгибающій моментъ** для балки на двухъ опорахъ равенъ **произведенію изъ полюснаго разстоянія на ординату**, соотвѣтствующую данному сѣченію, заключенную между боками многоугольника моментовъ.

Въ выраженіи (19) одинъ изъ множителей долженъ быть измѣренъ по масштабу силъ, а другой по линейному масштабу.

Изъ чертежа можно наглядно видѣть, что значеніе наибольшаго изгибающаго момента, получается всегда подъ грузомъ, а также, что при переходѣ отъ одного сѣченія къ другому—моментъ измѣняется непрерывно, слѣдуя между двумя сосѣдними грузами по закону прямой линіи, и наконецъ, что для опоръ изгибающій моментъ равенъ нулю. Въ балкѣ со свѣсами послѣднее не имѣетъ мѣста, напротивъ моментъ надъ опорами можетъ быть наибольшимъ; объ этомъ см. ниже. Для отысканія, по чертежу наибольшаго значенія момента достаточно провести параллельно замыкающей касательную къ многоугольнику моментовъ. Касательная эта можетъ коснуться или какого-нибудь одного угла веревочнаго многоугольника — тогда наибольшей изгибающій моментъ въ соотвѣтствующемъ сѣченіи балки, лежащемъ подъ грузомъ, или же касательная совпадаетъ съ однимъ изъ боковъ многоугольника моментовъ—если этотъ бокъ параллеленъ замыкающей—и тогда изгибающій моментъ для сѣченій, проведенныхъ между смежными вершинами веревочнаго многоугольника, есть величина постоянная.

Во всѣхъ разсмотрѣнныхъ случаяхъ, когда мы разсматривали условіе **равновѣсія лѣвой части балки, изгибающій моментъ положителенъ**, еслибы разсматривали условіе равновѣсія правой части балки нашли бы, что изгибающій моментъ отрицателенъ.

15. Изгибающіе моменты при равномѣрно распредѣленной нагрузкѣ.

Выводъ формулъ въ этомъ случаѣ остается совершенно тотъ же, принимая во вниманіе, что равномѣрно-распредѣленную нагрузку можно

Черт. 32.

разсматривать какъ систему элементарныхъ сосредоточенныхъ грузовъ, и что моментъ равнодѣйствующей равенъ суммѣ моментовъ составляющихъ. Поэтому, если имѣемъ случай изображенный на черт. 32, то моментъ для сѣченія проведеннаго въ разстояніи x отъ лѣвой опоры будетъ:

$$M_x = Ax - p\,(x-a)\,.\,\frac{x-a}{2};$$

$$M_x = Ax - p\,\frac{(x-a)^2}{2} \qquad (20)$$

Если $a=0$ и $b=0$, то есть для нагрузки равномѣрно распредѣленной по всей длинѣ пролета, $M_x = A_x - \frac{px^2}{2}$, а потому, подставивъ $A=\frac{pl}{2}$, найдемъ:

$$M_x = p\,\frac{x\,(l-x)}{2} \qquad (21)$$

Что касается формулы вида (17), то конечно не представляетъ затрудненія составить въ каждомъ частномъ случаѣ ей подобную и при равномѣрно распредѣленной нагрузкѣ. Разсматривая выраженія для изгибающихъ моментовъ отъ равномѣрно распредѣленной нагрузки, можно замѣтить, что при данныхъ нагрузкахъ, величина момента измѣняется отъ перехода одного сѣченія балки къ другому непрерывно.

Давая различныя значенія x при опредѣленныхъ величинахъ и расположеніи нагрузки p, мы будемъ получать различныя величины изгибающихъ моментовъ, то возрастающіе, то убывающіе съ возрастаніемъ x. Изслѣдуемъ здѣсь аналитически вопросъ: при какомъ значеніи x мы получимъ наибольшее выраженіе для M, т. е. опредѣлимъ сѣченіе, для котораго имѣетъ мѣсто наибольшій изгибающій моментъ. Для опредѣленія $max\,M$ поступимъ по извѣстнымъ правиламъ дифференціальнаго исчисленія.

Возьмемъ общую формулу (20) для выраженія изгибающаго момента при равномѣрно-распредѣленной нагрузкѣ,

$$M = Ax - \frac{p}{2}\,(x-a)^2;$$

Приравнивая нулю производную по x,

$$\frac{dM}{dx} = A - p\,(x-a) = 0;$$

Сравнивъ это выраженіе съ формулой (5) мы видимъ, что

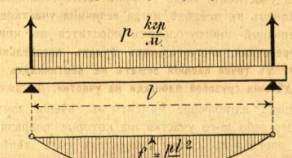
$$\frac{dM}{dx} = S_x.$$

Поэтому **наибольшій изгибающій моментъ имѣетъ мѣсто для сѣченія, въ которомъ поперечная сила** $=0$, т. е. мы получимъ то же, что выше было изслѣдовано на линіи поперечныхъ силъ графически.

Наибольшій изгибающій моментъ отъ равномѣрно-распредѣленной нагрузки p по всей длинѣ балки имѣетъ мѣсто въ сѣченіи по серединѣ балки, ибо въ этой точкѣ поперечная сила обращается въ нуль; изъ формулы (20) найдемъ положивъ $x=\frac{l}{2}$

$$\boxed{M_{\frac{l}{2}} = \frac{pl^2}{8}.} \qquad (22)$$

Формула (20) есть уравненіе параболы; поэтому изгибающій моментъ отъ сплошной равномѣрно-распредѣленной нагрузки из-



Черт. 33.

мѣряется ординатами параболы со стрѣлкою по серединѣ пролета $=\frac{pl^2}{8}$.

Такъ какъ моментъ отъ равномѣрно распредѣленной нагрузки измѣняется по закону кривой линіи, то, если построимъ веревочный многоугольникъ при полюсномъ разстояніи H, онъ обратится въ кривую линію со стрѣлкою $y=\frac{pl^2}{8}$. Дѣйствительно имѣемъ:

$$M = Hy;$$

съ другой стороны, если нагрузка равномѣрно-распредѣлена по всему пролету, то для середины пролета

$$M = \frac{pl^2}{8},$$

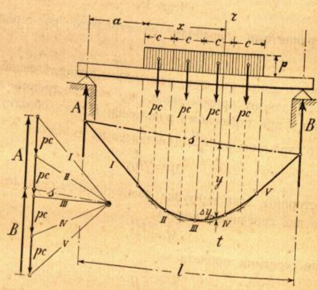
поэтому для середины пролета —

$$y = \frac{pl^2}{8H}.$$

Слѣдовательно при нагрузкѣ равномѣрно распредѣленной по всей балкѣ, веревочный многоугольникъ обратится въ параболу со стрѣлкою $\frac{pl^2}{8}$. Если равномѣрно распредѣленная нагрузка занимаетъ не всю балку, то видимъ изъ уравненій (16) и (20), что веревочный многоугольникъ обратится въ кривую линію лишь на протяженіи участка, занятаго нагрузкой, а по сторонамъ—въ прямыя, касательныя къ этой кривой. Пусть имѣетъ случай нагрузки изображенной на черт. 34. Грузовую площадь раздѣлимъ на нѣкоторое число участковъ и къ центрамъ тяжести ихъ приложимъ силы равныя площадямъ соотвѣтственныхъ участковъ. На полученныхъ силахъ строимъ многоугольникъ моментовъ, какъ описано было выше.

Очевидно, что чѣмъ число участковъ будетъ больше, тѣмъ величина момента будетъ опредѣлена точнѣе, т. к. ординаты веревочнаго многоугольника будутъ ближе къ дѣйствительнымъ. Съ возрастаніемъ числа участковъ, число сторонъ многоугольника будетъ возрастать и наконецъ въ предѣлѣ, когда величина участковъ подойдетъ къ нулю, веревочный многоугольникъ обратится въ кривую. Первоначальный **веревочный многоугольникъ будетъ касательный** къ этой кривой; при этомъ **точки касанія лежатъ на вертикаляхъ, проходящихъ черезъ точки дѣленія грузовой площади на участки.** Докажемъ это:

Разсмотримъ изгибающіе моменты въ сѣченіи взятомъ правѣе середины какого-либо m-го участка, на которые подраздѣлена грузовая площадь, опредѣливъ суммы моментовъ силъ лѣвѣе сѣченія tr черт. 34, при двухъ предположеніяхъ: 1) при нагрузкѣ непрерывно



Черт. 34.

распредѣленной на протяженіи отъ заданной точки на балкѣ до взятаго сѣченія; 2) при равнозначущей ей нагрузкѣ ввидѣ сосредоточенныхъ, въ центрахъ тяжести участковъ грузовой площади, силахъ. Пусть для простоты рывода величины участковъ (т. е. прямоугольни-

ковъ, на которые раздѣлена грузовая площадь) будутъ между собою равны; обозначимъ ихъ длину черезъ c.

Разстояніе x сѣченій будемъ отсчитывать отъ начала грузовой площади. Тогда выраженіе для изгибающаго момента въ случаѣ 1) т. е. для равномѣрно распредѣленной нагрузки будетъ:

$$M_1 = A\ (a+x) - p\frac{x^2}{2} = Hy_1;$$

для случая 2), т. е. для системы сосредоточенныхъ грузовъ, равнозначущихъ нагрузкѣ равномѣрно распредѣленной:

$$M_2 = A\ (a+x) - pc\left\{\left(x-\frac{c}{2}\right)+\left(x-\frac{3}{2}c\right)+\ldots+\left[x-\left(n-\frac{1}{2}\right)c\right]\right\};$$

припомнивъ выраженіе для суммы членовъ ариѳметической прогрессіи, найдемъ:

$$M_2 = A\ (a+x) - pc\left(mx - \frac{m^2c}{2}\right) = Hy_2.$$

Въ этомъ выраженіи m есть номеръ участка грузовой площади, опредѣляемой грузомъ, лежащимъ непосредственно лѣвѣе сѣченія. Если, напр. сѣченіе проведено между вторымъ и третьимъ грузомъ, то $m=2$, если-же сѣченіе проведено во второмъ участкѣ лѣвѣе груза этого участка, то $m=1$. Для случая, указаннаго на черт. 34, $m=3$. Остается сравнить, которое изъ выраженій для M имѣетъ большую величину. Вычтя изъ второго выраженія первое и называя разность y_2-y_1, черезъ Δy, найдемъ:

$$H\,.\,\Delta y = \frac{p}{2}\,(x-mc)^2.$$

Такъ какъ по смыслу вопроса H положительно, то изъ послѣдняго выраженія слѣдуетъ, что Δy всегда положительно. Слѣдовательно, ординаты веревочнаго многоугольника, соотвѣтствующаго отдѣльнымъ сосредоточеннымъ нагрузкамъ, приложеннымъ въ центрахъ тяжести участковъ грузовой площади, всегда больше ординатъ веревочнаго многоугольника, построеннаго для нагрузки непрерывно распредѣленной, соотвѣтствующей той-же грузовой площади. Когда сѣченіе проведено черезъ точки раздѣла отдѣльныхъ участковъ грузовой площади, то имѣемъ $x=mc$, гдѣ m можетъ быть произвольное число, причемъ $m \leq n$; принимая во вниманіе, что и p и H величины конечныя, изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ, что при $x=mc$ и

$$\Delta y = 0;$$

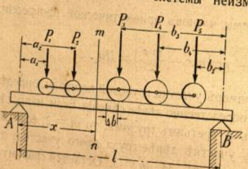
это значитъ, что для взятыхъ сѣченій, многоугольники, какъ для равномѣрно распредѣленной нагрузки, такъ и для эквивалентной ей—системы сосредоточенныхъ грузовъ—касательны между собой, т. е. теорема доказана.

b. Временная нагрузка.

Изгибающіе моменты отъ системы подвижныхъ сосредоточенныхъ грузовъ.

16. Опредѣленіе наибольшаго изгибающаго момента въ данномъ сѣченіи.

Въ этомъ случаѣ слѣдуетъ пользоваться формулой (17). Остается изслѣдовать, какъ измѣняется величина изгибающаго момента съ измѣненіемъ положенія системы неизмѣнно между собою связанныхъ грузовъ, дѣйствующихъ на балку. Это необходимо для того, чтобы знать при какомъ положеніи системы грузовъ, въ данномъ сѣченіи, значеніе изгибающаго момента будетъ наибольшимъ.



Черт. 35.

Предположимъ, что имѣется балка AB, черт. 35, на которую дѣйствуетъ система грузовъ $P_1 \ldots P_n$. Опредѣлимъ при какомъ положеніи системы, величина изгибающаго момента для сѣченія mn будетъ наибольшая. Имѣемъ:

$$M_x = \frac{l-x}{l} \sum_0^x P\,a + \frac{x}{l} \sum_l^{l-x} Pb.$$

Допустимъ, что система грузовъ, неизмѣнно между собою связанныхъ, продвинулась относительно точки сѣченія mn влѣво на величину Δb. Условимся грузъ ставшій непосредственно въ сѣченіи mn относить къ числу грузовъ, дѣйствующихъ съ лѣвой стороны сѣченія. При указанномъ передвиженіи системы влѣво, величина M_x измѣнится въ $M_x + \Delta M_x$. Эта величина опредѣлится, если подставить въ выраженіи для M_x (17) вмѣсто a и b, соотвѣтственно $a - \Delta b$ и $b + \Delta b$. Подставивъ, найдемъ:

$$M_x + \Delta M_x = \frac{l-x}{l} \sum_0^x Pa + \frac{x}{l} \sum_l^{l-x} Pb + \frac{\Delta b}{l} \left\{ x \sum_l^{l-x} P - (l-x) \sum_0^x P_i \right\},$$

откуда

$$\Delta M_x = \frac{\Delta b}{l} \left\{ x \sum_l^{l-x} P - (l-x) \sum_0^x P \right\}. \tag{23}$$

Если Δb будемъ отсчитывать по направленію движенія системы, то величины Δb и l будутъ всегда > 0. Въ такомъ случаѣ величина ΔM_x, которая, какъ показываетъ формула (23), зависитъ отъ положенія перемѣстившихся грузовъ, будетъ > 0, когда выраженіе въ скобкахъ будетъ > 0, т. е. величина изгибающаго момента, при перемѣщеніи системы влѣво, возрастаетъ тогда, когда —

$$x \sum_l^{l-x} P > (l-x) \sum_0^x P,$$

или когда существуетъ соотношеніе:

$$\frac{\sum_l^{l-x} P}{l-x} > \frac{\sum_0^x P}{x}. \tag{24}$$

Здѣсь числитель каждой части неравенства выражаетъ собою алгебраическую сумму всѣхъ грузовъ, дѣйствующихъ правѣе и лѣвѣе сѣченія, а знаменатели длины соотвѣтствующихъ этимъ грузамъ отрѣзки балки; такого рода дроби даютъ среднія нагрузки правой и лѣвой части, а потому если средняя нагрузка правой части больше средней нагрузки лѣвой части, то для увеличенія величины изгибающаго момента надо систему передвигать влѣво. Точно также доказали-бы, что въ томъ случаѣ, когда систему двигаемъ вправо, изгибающій моментъ увеличивается, если средняя нагрузка лѣвой части больше средней нагрузки правой части, т. е. если —

$$\frac{\sum_x^l P}{l-x} < \frac{\sum_0^x P}{x}. \tag{24 bis}$$

Отсюда заключаемъ, что **наибольшая величина изгибающаго момента въ данномъ сѣченіи** наступитъ въ тотъ моментъ, когда, при малѣйшемъ передвиженіи системы грузовъ влѣво или вправо, измѣнится соотвѣтственно знакъ неравенствъ (24) или (24 bis.).

Изъ предыдущихъ изслѣдованій мы уже видѣли, что наибольшій изгибающій моментъ кромѣ того будетъ имѣть мѣсто тогда, когда надъ разсматриваемымъ сѣченіемъ непосредственно станетъ грузъ *).

Въ послѣднемъ случаѣ при расчетѣ среднихъ нагрузокъ этотъ грузъ проще не принимать во вниманіе и тогда наибольшій изгибающій моментъ въ этомъ сѣченіи будетъ имѣть мѣсто тогда, когда средняя нагрузка правой части равна средней нагрузкѣ лѣвой части.

*) Исключеніе въ послѣднемъ отношеніи представляетъ случай симметричной нагрузки, когда для всѣхъ сѣченій между средними грузами величина $M_x = const.$

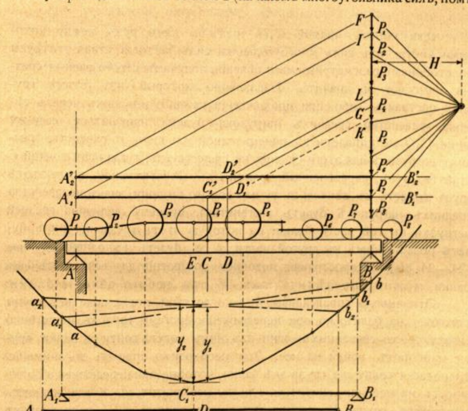
Такъ какъ съ прибавленіемъ новаго груза изгибающій моментъ вообще говоря увеличивается, то для полученія наибольшаго значенія момента въ какомъ нибудь сѣченіи балки, слѣдуетъ умѣстить на ней возможно большее число грузовъ и подвигать наибольшіе изъ нихъ насколько возможно ближе къ разсматриваемому поперечному сѣченію.

Для опредѣленія графическимъ путемъ наибольшаго изгибающаго момента въ данномъ сѣченіи пользуются способомъ Кульмана.

Положимъ, что имѣемъ балку AB, подверженную дѣйствію системы между собою связанныхъ грузовъ отъ P_1 до P_8, черт. 36; тогда для полученія $\sum$ моментовъ всѣхъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на балку влѣво отъ сѣченія, проходящаго черезъ точку C, строятъ многоугольникъ силъ, причемъ принимаются во вниманіе и тѣ грузы, которые могутъ войти на балку при передвиженіи системы грузовъ, для отысканія такого ихъ расположенія, при которомъ изгибающій моментъ для сѣченія CC'_1 принимаетъ наибольшее значеніе. Многоугольникъ силъ выразится вертикальною прямой, по которой въ масштабѣ силъ будутъ отложены всѣ дѣйствующія силы отъ P_1 до P_8; затѣмъ на данныхъ силахъ строимъ веревочный многоугольникъ. Изъ точекъ опоръ A и B проводимъ вертикальныя линіи, до пересѣченія съ крайними боками веревочнаго многоугольника, а соединяя полученныя точки a и b, получимъ замыкающій бокъ ab. Если теперь черезъ точку C провести вертикальную линію, и полученный отрѣзокъ ея между боками многоугольника моментовъ умножить на величину полюснаго разстоянія H, то такое произведеніе, какъ уже знаемъ, дастъ сумму моментовъ силъ, дѣйствующихъ съ лѣвой стороны разсматриваемаго сѣченія. Для полученія max. M можно было-бы передвигать систему грузовъ по балкѣ и для каждаго положенія ея строить многоугольники силъ, но тогда чертежъ сильно запутывается. Исходя изъ того положенія, что разстоянія между грузами остаются неизмѣнными, вмѣсто передвиженія системы грузовъ передвигаютъ балку, оставляя самыя силы неподвижными—отчего, конечно, результатъ не измѣнится. Построеніе же упростится, такъ какъ будетъ измѣняться только положеніе точекъ A и B, а слѣдовательно и замыкающаго бока неподвижнаго веревочнаго многоугольника. Мы видѣли раньше, что для полученія max. M_x — нужно, чтобы одинъ изъ сосредоточенныхъ грузовъ напр. P_4 или P_5 пришелся надъ точкою C, а поэтому и расположимъ всю систему такъ, чтобы выполнить это требованіе. Предположимъ сначала что это будетъ грузъ P_4. Передвинемъ балку влѣво на величину CE; тогда точка C какъ разъ придется подъ грузомъ P_4; изъ точки A_1 и B_1 (новое положеніе опоръ) проводимъ вертикали до пересѣченія въ a_1 и b_1 съ боками веревочнаго многоугольника; тогда линія a_1b_1 дастъ новое положеніе замыкающаго бока a_1b_1; а $y_1H=M_1$ гдѣ

значки $_1$ у M и y показываютъ то положеніе грузовъ, при которомъ эти количества имѣютъ мѣсто.

Теперь покажемъ какъ примѣнить сюда только что выведенное правило отысканія max. M, пользуясь изслѣдованіемъ неравенствъ (24). Многоугольникъ силъ строятъ не на произвольной прямой, а на вертикали, проходящей черезъ правую (лѣвую) опору B, и изъ конца послѣдней силы, помѣщающейся на пролетѣ ведутъ горизонтальную прямую $B_1'A_1'$. Точку A_1' соединяютъ съ точкою I (началомъ многоугольника силъ, помѣ-



Черт. 36.

щающихся на пролетѣ), а изъ точки C_1 ведутъ линію C'_1G, параллельную AI. Тогда, для удовлетворенія условія (24) или (24 bis) нужно надъ точкой C поставить именно ту силу, которую пересѣкаетъ прямая $C_1'G$, т. е. для полученія наибольшей величины изгибающаго момента, нужно всю систему двигать вправо, (т. е. балку надо передвинуть влѣво), до тѣхъ поръ, пока сила P_4 не станетъ надъ точкою C. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что для полученія max. M средняя нагрузки на правой и лѣвой частяхъ балки должны быть по возможности равны. Изъ чертежа имѣемъ: прямая C'_1G въ точкѣ G дѣлитъ многоугольникъ силъ на двѣ части: IG изображающую сумму силъ, дѣйствующихъ на лѣвую часть и GB'_1—изображающую сумму силъ, дѣйствующихъ на правую часть. Такъ какъ $C'_1G \parallel A'_1I$, то имѣемъ

$$\frac{IG}{A_1'C_1'}=\frac{GB'_1}{C_1'B_1'},$$

или

$$\frac{\sum\limits_{0}^{x} P_k}{x}=\frac{\sum\limits_{x}^{L} P_i}{L-x},$$

т. е. если конецъ прямой C'_1G упалъ-бы какъ разъ между которыми нибудь изъ силъ многоугольника силъ, то тогда, ставя эти грузы по сторонамъ разсматриваемаго сѣченія, получимъ строго равныя среднія нагрузки и значитъ безразлично который изъ этихъ грузовъ поставить, ибо при прохожденіи каждаго изъ нихъ черезъ сѣченіе, равенство среднихъ нагрузокъ будетъ нарушаться; если-же линія C'_1G не попадетъ въ конецъ одной изъ силъ, то равенства среднихъ нагрузокъ для этого сѣченія не существуетъ; тогда надъ точкой C ставятъ грузъ, пересѣченный прямой C'_1G. Дѣйствительно, когда этотъ грузъ сойдетъ съ сѣченія въ ту или другую сторону, знакъ неравенства среднихъ нагрузокъ будетъ измѣняться, причемъ величина средней нагрузки въ той части балки, на которую этотъ грузъ вступилъ, будетъ больше чѣмъ въ другой части, т. е. будетъ выполнено условіе (24—24 bis). Распространяя подобное построеніе для всякаго сѣченія балки, можно опредѣлить max. M_x для любаго сѣченія балки.

Эти выводы справедливы только до тѣхъ поръ, пока всѣ грузы остаются на балкѣ; но при передвиженіи системы грузовъ, неизмѣнно между собою связанныхъ, одни изъ нихъ могутъ сойти съ балки, другіе наоборотъ войти на нее. Это необходимо принять во вниманіе, располагая сразу два груза внѣ балки, которые при передвиженіи балки могутъ на нее или вкатиться или съ нея скатиться. Когда входитъ, напримѣръ, грузъ P_1, то проводимъ не прямую A'_1I, а соединяемъ точку A'_1 съ F, а если сходитъ грузъ P_7, то проводимъ не горизонтальную прямую $A'_1B'_1$, а черезъ конецъ P_6 силы горизонтальную прямую $A'_2B'_2$. Напр. для опредѣленія наибольшаго значенія M въ сѣченіи, проходящемъ черезъ точку D, оказывается что необходимо надъ этою точкою поставить снова грузъ P_4. Въ этомъ случаѣ при передвиженіи системы вправо (балка влѣво) входитъ грузъ P_1 и сходитъ грузъ P_7. Проводимъ линію $A'_2B'_2$, соединяемъ точку A'_2 съ F и изъ точки D'_2 линію $D_2L \parallel A'_2F$. Построеніе это даетъ указаніе, что несмотря на перемѣну грузовъ, располагающихся на балкѣ, при передвиженіи системы вправо на величину ED, всетаки и для новой системы, наибольшій изгибающій моментъ въ сѣченіи DD'_2 вызывается

грузомъ P_4. Очевидно, что для наибольшаго изъ возможныхъ max. нужно надъ точкою C или D ставить и наибольшіе грузы.

17. Опредѣленіе наибольшаго изгибающаго момента для всей балки.

Для опредѣленія наибольшаго изгибающаго момента для всей балки, недостаточно опредѣленія такого момента для даннаго сѣченія; желательно знать сѣченіе съ наибольшимъ для всей балки изгибающимъ моментомъ.

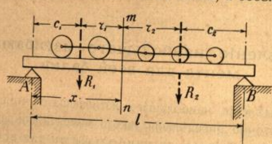
При нахожденіи на балкѣ системы подвижныхъ грузовъ, каждому изъ нихъ на балкѣ соотвѣтствуетъ опредѣленное положеніе, при которомъ, для сѣченія балки, приходящагося подъ даннымъ грузомъ имѣетъ мѣсто **частный наибольшій изгибающій моментъ**. Если число грузовъ системы вкатывающихся на балку ограничено, то такихъ частныхъ maximum'овъ будетъ столько сколько грузовъ въ системѣ. Изъ этихъ частныхъ наибольшихъ моментовъ можно выбрать самый большой — это и будетъ **наибольшій изъ наибольшихъ изгибающихъ моментовъ** (maximuma maximorum). Ему соотвѣтствуетъ какъ опредѣленное сѣченіе, такъ и положеніе опредѣленнаго груза въ этомъ сѣченіи—величины заранѣе неизвѣстныя. Когда при сходѣ съ балки одного груза могутъ входить на нее другіе въ неограниченномъ числѣ, т. е. комбинація грузовъ въ системѣ помѣщающейся на пролетѣ можетъ быть измѣняема весьма разнообразно, то частныхъ maximum'овъ можетъ быть неограниченное количество и отысканіе между ними наибольшаго изъ нихъ, съ перваго взгляда представляется весьма затруднительнымъ. Задача облегчается тѣмъ, что вопервыхъ наибольшій изъ maximum'овъ имѣетъ мѣсто для сѣченій близь середины пролета и во вторыхъ наибольшій изъ изгибающихъ моментовъ соотвѣтствуетъ сѣченіямъ, приходящимся подъ наибольшими изъ грузовъ.

Имѣемъ балку AB черт. 37; около середины балки взято сѣченіе mn въ разстояніи x отъ лѣвой опоры. Для опредѣленія величины суммы моментовъ силъ, приложенныхъ къ лѣвой части балки, имѣемъ:

$$M_x=\frac{l-x}{l}\sum_{0}^{x} Pa+\frac{x}{l}\sum_{l}^{l-x} Pb\ ;$$

выраженія $\sum\limits_{0}^{x} Pa$ и $\sum\limits_{x}^{l} Pb$ представляютъ собою суммы моментовъ силъ дѣйствующихъ влѣво и вправо отъ сѣченія mn, относительно соотвѣтствующихъ опоръ.

Зная, что сумма моментовъ силъ составляющихъ равна моменту равнодѣйствующей, относительно той-же точки, и обозначая равнодѣй-



Черт. 37.

ствующую силъ влѣво отъ взятаго сѣченія черезъ R_1, разстояніе ея до лѣвой опоры c_1, соотвѣтствующія величины для правой части черезъ R_2 и c_2 имѣемъ:

$$\sum_0^x Pa = R_1 c_1 \text{ и } \sum_l^{l-x} Pb = R_2 c_2 ;$$

подставляя, получаемъ:

$$M_x = \frac{l-x}{l} R_1 c_1 + \frac{x}{l} R_2 c_2 .$$

Замѣняя плечи c_1 и c_2 равными имъ величинами $c_1 = x - r_1$; $c_2 = l - x - r_2$, находимъ:

$$M_x = \frac{l-x}{l} R_1 (x - r_1) + \frac{x}{l} R_2 (l - x - r_2) .$$

Если будемъ двигать **сѣченіе со всею системою грузовъ** по балкѣ такъ, чтобы разстоянія частныхъ равнодѣйствующихъ отъ сѣченія не измѣнялись (т. е. оставляя r_1 и r_2 постоянными), то перемѣнной будетъ лишь x, и наибольшее значеніе для M будетъ maximum'омъ функціи отъ x, стоящей въ правой части равенства.

Взявъ первую производную и приравнявъ ее нулю, найдемъ

$$\frac{dM}{dx} = -\frac{1}{l} R_1 (x - r_1) + \frac{l-x}{l} R_1 + \frac{1}{l} R_2 (l - x - r_2) - \frac{x}{l} R_2 = 0 .$$

Чтобы удостовѣриться, maximum-ли это беремъ:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -2 \frac{1}{l} R_1 - 2 \frac{1}{l} R_2 ,$$

что всегда < 0, если l положительно, такъ какъ R_1 и $R_2 > 0$.

Слѣдовательно, при x удовлетворяющемъ равенству $\frac{dM_x}{d_x} = 0$— получится дѣйствительно max. выраженія M_x.

Беремъ въ выраженіи $\frac{dM_x}{d_x}$ величину $-\frac{x}{l}$ за скобки:

$$+\frac{x}{l}\left(2R_1 + 2R_2\right) = \frac{1}{l} R_1 r_1 + R_1 + R_2 - \frac{1}{l} R_2 r_2 ;$$

наконецъ опредѣляемъ x.

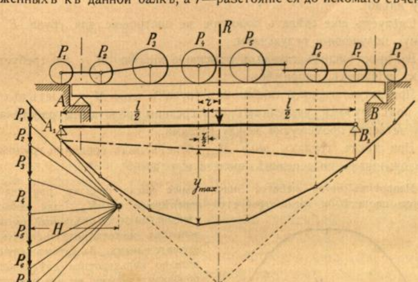
$$x = \frac{R_1 r_1 - R_2 r_2}{2\,(R + R_2)} + \frac{l}{2} .$$

Отсюда видимъ, что наиболѣе опасное сѣченіе вообще не совпадаетъ съ серединой балки; разстояніе его отъ опоры есть $\frac{l}{2}$ + нѣкоторое количество, обращающееся въ 0 лишь когда $R_1 r_1 = R_2 r_2$, т. е. когда сумма моментовъ грузовъ силъ относительно средины балки равна 0, что показываетъ симметричное расположеніе нагрузки (одинъ грузъ въ серединѣ, остальные симметрично).

Если это условіе не соблюдено, получаемъ опасныя сѣченія въ двухъ точкахъ, симметрично расположенныхъ относительно средняго сѣченія и имѣющихъ абсциссы

$$x = \frac{l}{2} \pm \frac{R_1 r_1 - R_2 r_2}{2 \cdot (R_1 + R_2)} . \tag{25}$$

Назовемъ черезъ R, черт. 38, равнодѣйствующую всѣхъ грузовъ, приложенныхъ къ данной балкѣ, а r—разстояніе ея до искомаго сѣченія x;



Черт. 38.

выраженіе $(R_1 r_1 - R_2 r_2)$ замѣнимъ моментомъ ихъ равнодѣйствующей Rr; кромѣ того имѣемъ $R_1 + R_2 = R$. Подставляя въ уравненіе (25), найдемъ

$$x = \frac{l}{2} \pm \frac{r}{2} . \tag{26}$$

Такимъ образомъ необходимо помнить, что:

Наибольшая величина M_x, соотвѣтствующая данному грузу системы, получится при такомъ ея положенiи, когда этотъ грузъ и равнодѣйствующая всей нагрузки находятся на равныхъ разстоянiяхъ отъ середины балки.

Пусть, напримѣръ, на черт. 38 имѣемъ систему грузовъ P_1-P_8, которую разсматривали въ предыдущемъ номерѣ и для которой мы ищемъ $max\ M_x$. Грузы должны быть расположены такъ, чтобы помѣститься на балкѣ, и притомъ наибольшiе около середины. Строимъ веревочный многоугольникъ, и получимъ равнодѣйствующую R. Мы уже знаемъ, что $maxM_x$ получится въ сѣченiи, проходящемъ черезъ одинъ изъ грузовъ. Всего вѣроятнѣе, что этимъ грузомъ будетъ одинъ изъ сосѣднихъ съ силою R, т. е. P_4 или P_5. Положимъ, что искомое сѣченiе проходитъ через P_4; разстоянiе отъ этого груза до равнодѣйствующей R примемъ за r, раздѣлимъ r пополамъ, и съ обѣихъ сторонъ отъ средней точки отложимъ по $\frac{l}{2}$; получимъ точки A_1 и B_1. Если при этомъ всѣ грузы придутся между A_1 и B_1 такое рѣшенiе возможно, такъ какъ удовлетворено равенство (26).

Итакъ, въ данномъ случаѣ систему надо передвинуть на $\frac{r}{2}$ вправо (балку влѣво).

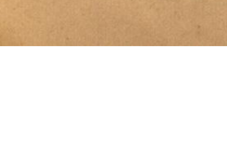
Слѣдуетъ еще сдѣлать подобное же построенiе для груза P_5 и сравнить полученные результаты.

Въ простѣйшихъ случаяхъ отысканiе $maxim\ M_{max}$ не требуетъ долгихъ попытокъ, напримѣръ:

При двухъ равныхъ связанныхъ грузахъ $max\ M_{max}$ будетъ въ сѣченiи подъ грузомъ, удаленнымъ отъ средины пролета на разстоянiи одной четверти промежутка между грузами.

При трехъ грузахъ $max\ M_{max}$ будетъ подъ среднимъ грузомъ, расположеннымъ по серединѣ пролета и т. д.

Напротивъ, когда имѣется значительное число грузовъ, при значительномъ пролетѣ, и когда требуется опредѣленiе $maxM_{max}$ для любыхъ сѣченiй балки, то указанный способъ попытокъ можетъ оказаться весьма утомительнымъ. Въ этомъ случаѣ полезно пользоваться слѣдующими приблизительными, но для практики вполнѣ достаточно точными указанiями



Черт. 39.

Кривая наибольшихъ изгибающихъ моментовъ въ различныхъ сѣченiяхъ балки, представляется двумя параболами со вставленною между ними прямой, длина которой 0,12 l. Стрѣла параболъ $f=maxM_{max}$. Для опредѣленiя $max\ M_x$, т. е. $maxM$ въ любомъ мѣстѣ пролета, можетъ служить слѣдующая таблица:

$\frac{x}{l}$	$\frac{\max M_x}{\max M_{\max}}$	$\frac{\Delta \frac{\max M_x}{\max M_{\max}}}{\Delta \frac{x}{l}}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{\max M_x}{\max M_{\max}}$	$\frac{\Delta \frac{\max M_x}{\max M_{\max}}}{\Delta \frac{x}{l}}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{\max M_x}{\max M_{\max}}$	$\frac{\Delta \frac{\max M_x}{\max M_{\max}}}{\Delta \frac{x}{l}}$
0,00	0,000		0,16	0,595		0,32	0,926	
		4,45			2,80			1,10
0,02	0,089		0,18	0,651		0,34	0,948	
		4,25			2,60			0,95
0,04	0,174		0,20	0,703		0,36	0,967	
		4,00			2,35			0,70
0,06	0,254		0,22	0,750		0,38	0,981	
		3,85			2,15			0,55
0,08	0,331		0,24	0,793		0,40	0,992	
		3,60			2,00			0,30
0,10	0,403		0,26	0,833		0,42	0,998	
		3,40			1,75			0,10
0,12	0,471		0,28	0,868		0,44	1,000	
		3,20			1,55			—
0,14	0,535		0,30	0,899		до	—	
		3,00			1,35			—
0,16	0,595		0,32	0,926		0,50	—	

B. Узловая передача грузовъ.

а. Постоянная нагрузка.

18. Изгибающiе моменты отъ сосредоточенныхъ грузовъ.

Изъ построенiя веревочнаго многоугольника на грузахъ, для этого случая, выяснено уже выше (стр. 31), что многоугольникъ моментовъ для узловой нагрузки есть вписанный въ многоугольникъ моментовъ для непосредственной нагрузки, причемъ точки касанiя лежатъ на вертикаляхъ узловъ. Отсюда слѣдуетъ, что изгибающiе моменты для сѣченiй, соотвѣтствующихъ узламъ, тожественны, какъ при непосредственной, такъ и при узловой передачѣ нагрузокъ. Это ясно и изъ общаго выраженiя (16) для изгибающаго момента, которое въ этомъ случаѣ можетъ быть написанъ такъ:

$$M_x = Ax - \sum_0^c P(x-a) - \sum_c^z P\frac{\lambda - z}{\lambda}(x-c),$$

гдѣ c есть разстоянiе отъ лѣвой опоры до узла, ограничивающаго панель съ разсматриваемымъ сѣченiемъ слѣва, а z разстоянiе до этого узла силы P_i лежащей въ той же панели. Если сѣченіе проходитъ черезъ узелъ, то будетъ $x = c$, т. е. послѣдній членъ отличающій это выраженіе отъ (16) обратится въ нуль.

Въ балкѣ съ равными панелями и съ симметричной нагрузкой, при вычисленіяхъ весьма удобно выражать величину момента въ функціи отъ поперечныхъ силъ, такъ какъ величина послѣднихъ получается весьма просто, какъ указано въ номерѣ **9.**

Для вывода зависимости между M_i и S_i составимъ выраженія для M_i, а затѣмъ для M_{i-1}. Обозначимъ узловую нагрузку узла i черезъ P_i

Имѣемъ:

$$M_i = A \cdot i\lambda - P_1\lambda(i-1) - P_2\lambda(i-2) - \ldots - P_{i-2}\lambda \cdot 2 - P_{i-1}\lambda;$$
$$M_{i-1} = A(i-1)\lambda - P_1\lambda(i-2) - P_2\lambda(i-3) - \ldots - P_{i-2}\lambda.$$

Вычтя второе равенство изъ изъ перваго и произведя необходимыя сокращенія, найдемъ:

$$M_i - M_{i-1} = \lambda(A - P_1 - P_2 \ldots - P_{i-2} - P_{i-1}).$$

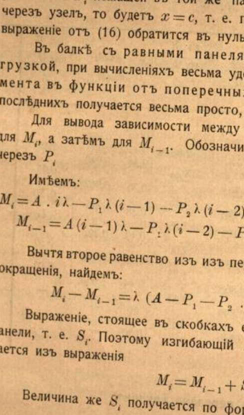
Выраженіе, стоящее въ скобкахъ есть поперечная сила въ i—той панели, т. е. S_i. Поэтому изгибающій моментъ для i панели получается изъ выраженія

$$M_i = M_{i-1} + S_i\lambda. \qquad (27)$$

Величина же S_i получается по формулѣ: $S_i = S_{i+1} + P_i$.

19. Изгибающіе моменты отъ равномѣрно распредѣленной нагрузки.

Все только что сказанное относится и къ равномѣрно распредѣленной нагрузкѣ. Отличіе отъ непосредственной передачи нагрузки



Черт. 40.

здѣсь выразится въ томъ, что многоугольникъ моментовъ уже не обратится въ кривую линію, такъ какъ это будетъ многоугольникъ вписанный въ кривую моментовъ, при непосредственной нагрузкѣ. Величина момента между двумя узлами измѣняется по закону прямой. Если въ балкѣ четное число равныхъ панелей, то M_{max} будетъ меньше, чѣмъ при непосредственной нагрузкѣ.

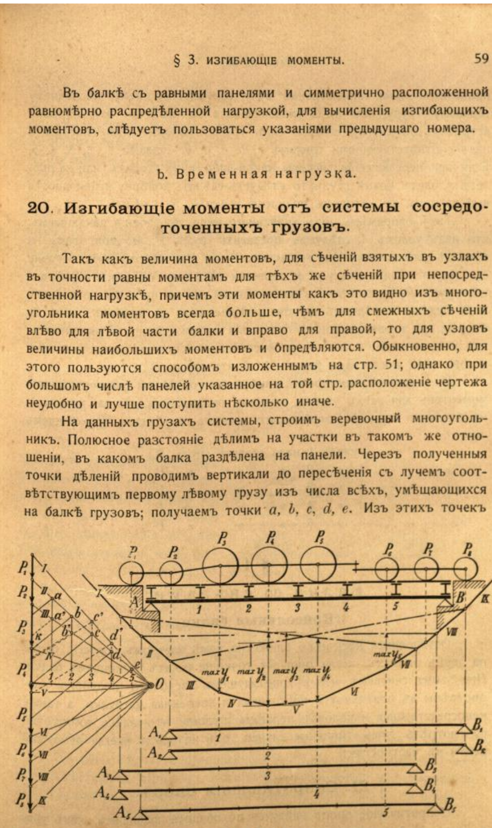
Въ балкѣ съ равными панелями и симметрично расположенной равномѣрно распредѣленной нагрузкой, для вычисленія изгибающихъ моментовъ, слѣдуетъ пользоваться указаніями предыдущаго номера.

b. Временная нагрузка.

20. Изгибающіе моменты отъ системы сосредоточенныхъ грузовъ.

Такъ какъ величина моментовъ, для сѣченій взятыхъ въ узлахъ въ точности равны моментамъ для тѣхъ же сѣченій при непосредственной нагрузкѣ, причемъ эти моменты какъ это видно изъ многоугольника моментовъ всегда больше, чѣмъ для смежныхъ сѣченій влѣво для лѣвой части балки и вправо для правой, то для узловъ величины наибольшихъ моментовъ и опредѣляются. Обыкновенно, для этого пользуются способомъ изложеннымъ на стр. 51; однако при большомъ числѣ панелей указанное на той стр. расположеніе чертежа неудобно и лучше поступить нѣсколько иначе.

На данныхъ грузахъ системы, строимъ веревочный многоугольникъ. Полюсное разстояніе дѣлимъ на участки въ такомъ же отношеніи, въ какомъ балка раздѣлена на панели. Черезъ полученныя точки дѣленій проводимъ вертикали до пересѣченія съ лучемъ соотвѣтствующимъ первому лѣвому грузу изъ числа всѣхъ, умѣщающихся на балкѣ грузовъ; получаемъ точки a, b, c, d, e. Изъ этихъ точекъ



Черт. 41.

проводимъ линіи параллельныя лучу, соотвѣтствующему послѣднему (правому) грузу, изъ числа умѣщающихся на пролетѣ; эти отрѣзки встрѣтятъ въ многоугольникѣ силъ грузы, которые надо поставить надъ соотвѣтствующими точкамъ a, b, c, d, e,—узлами 1, 2, 3, 4, 5. Если при передвиженіи системы какой-либо грузъ сходитъ, или на пролетъ входитъ новый грузъ, то слѣдуетъ сдѣлать повѣрку правильности выбора луча, на которомъ получены точки a, b, c, d и e.

Такъ напримѣръ, изъ указаннаго выше построенія заключаемъ, что надъ узломъ 1 слѣдуетъ поставить грузъ P_3, но при этомъ на пролетѣ умѣщаются лишь грузы отъ P_3 до P_7; поэтому вмѣсто точки a, слѣдуетъ взять точку a' и провести $a'k \parallel$ лучу VIII какъ и раньше, ибо грузъ P_8 лишь станетъ надъ опорой, но на пролетъ не войдетъ и P_7 будетъ послѣднимъ грузомъ умѣщаещемся на пролетѣ, какъ то было и при первоначальномъ положеніи системы. Линія $a'k$ указываетъ, что дѣйствительно и при новомъ расположеніи системы удовлетворяется условіе (24), когда надъ узломъ 1 стоитъ грузъ P_3.

На чертежѣ построены наибольшія ординаты многоугольника моментовъ для всѣхъ узловъ, причемъ оказывается, что для полученія наибольшаго значенія изгибающаго момента въ сѣченіи, проходящемъ черезъ:

узелъ	1	надо	ставить	грузъ	P_3;
»	2	»	»	»	P_4;
»	3	»	»	»	P_4;
»	4	»	»	»	P_5;
»	5	»	»	»	P_6.

§ 4.

Балка со свѣсами.

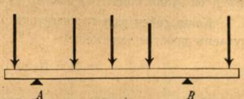
(Консольныя балки).

Остановимся нѣсколько ближе на томъ частномъ случаѣ балки на двухъ опорахъ, когда опорныя точки не лежатъ по концамъ балки. При этомъ считаемъ, что въ предыдущемъ настолько подробно разсмотрѣны въ отдѣльности постоянная и временная нагрузки, а также непосредственная и узловая передача грузовъ, что здѣсь достаточно разсмотрѣть лишь типичные случаи, отъ которыхъ всегда легко перейти къ частностямъ.

21. Сопротивленія опоръ.

Сопротивленіе опоръ найдутся по общимъ правиламъ, какъ указано въ № 1, пользуясь выраженіями (2). При примѣненіи ихъ, однако

слѣдуетъ обратить вниманіе на слѣдующее: въ балкѣ на двухъ опорахъ по концамъ выраженія (2) можно было считать ариѳметическими, ибо при дѣйствіи на балку грузовъ, сопротивленія опоръ всегда положительны; напротивъ въ балкѣ со свѣсами выраженія (2) должны быть разсматриваемы какъ алгебраическія и составляя ихъ надо обращать вниманіе на знаки слагающихъ моментовъ, вычисляемыхъ относительно опоръ. Всякій грузъ лежащій на правомъ свѣсѣ вызываетъ отрицательное сопротивленіе въ лѣвой опорѣ и грузъ на лѣвомъ свѣсѣ отрицательное сопротивленіе правой опоры; значитъ сопротивленія опоръ опредѣлятся изъ выраженій:

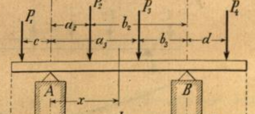


Черт. 42.

$$A = \frac{1}{l}\sum Pb, \qquad B = \frac{1}{l}\sum Pa\,,$$

если подъ $\sum$ ставить выраженія моментовъ грузовъ относительно опоръ B или A со знаками $+$ или $-$.

Чтобы оттѣнить значеніе консолей, преобразуемъ общія выраженія для A и B. Назовемъ длину лѣваго свѣса черезъ e_1, праваго — e_2, разстоянія грузовъ лѣваго свѣса отъ лѣвой опоры черезъ c_1 и для грузовъ праваго свѣса отъ правой опоры черезъ d_4 тогда для произвольнаго числа грузовъ напишемъ слѣдующія выраженія:



Черт. 43.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{l}\sum\left\{ Pb + P_1\,(c+l) - P_4 d \right\}; \\ B &= \frac{1}{l}\sum\left\{ Pa - P_1 c + P_4\,(d+l) \right\}; \end{aligned} \qquad (28)$$

здѣсь указатель $_1$ соотвѣтствуетъ грузамъ лѣваго свѣса, указатель $_4$ грузамъ праваго свѣса, прочіе грузы лежатъ въ пролетной части балки.

Для равномѣрно распредѣленной нагрузки, въ каждомъ частномъ случаѣ, составимъ выраженіе, вытекающее изъ только что указаннаго. Если равномѣрная нагрузка распредѣлена по всей балкѣ, то найдемъ:

$$A = \frac{1}{l}\left\{ p\,\frac{l^2}{2} + p_1\, e_1\left(\frac{e_1}{2} + l\right) - p_2\,\frac{e_2^{\,2}}{2} \right\}; \qquad (29)$$

$$B=\frac{1}{l}\left\{p\,\frac{l^2}{2}+p_2 e_2\left(\frac{e_2}{2}+l\right)-p_1\frac{e_1^{\,2}}{2}\right\}; \tag{29}$$

гдѣ p нагрузка пролетной части, а p_1 p_2 свѣсовъ e_1 и e_2.

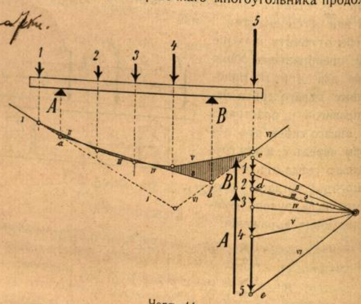
Когда свѣсы равны и нагрузка одинакова по всей балкѣ, то получаемъ простое выраженіе

$$A=B=p\left(\frac{l}{2}+e\right) \tag{30}$$

Изъ выраженія (29) для сопротивленія опоръ между прочимъ ясно видно, что для полученія наибольшей положительной величины сопротивленія опоры надо разгрузить противоположный свѣсъ. Это имѣетъ значеніе напр. при расчетѣ главныхъ фермъ мостовъ, у которыхъ тротуары расположены на кронштейнахъ.

Опредѣленіе сопротивленія опоръ помощью веревочнаго многоугольника не представляетъ затрудненія и производится, какъ указано выше. Надо только помнить, что веревочный многоугольникъ сначала строится на грузахъ, не обращая вниманія на опоры, а затѣмъ уже крайніе бока построеннаго веревочнаго многоугольника продолжить до

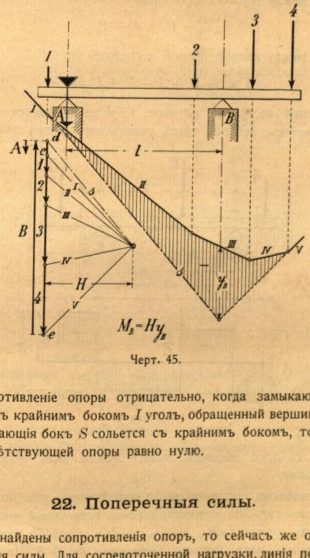
См. опечатки.



Черт. 44.

пересѣченія съ вертикалями опоръ, черт. 44. Полученныя точки опредѣлятъ замыкающій бокъ. Если въ многоугольникѣ силъ лучъ, параллельный замыкающему боку пройдетъ между крайними лучами, соотвѣтствующими грузамъ, то сопротивленія обѣихъ опоръ будутъ положительны, какъ это имѣетъ мѣсто на черт. 44; если же лучъ s пройдетъ по одну сторону лучей, соотвѣтствующихъ грузамъ, то понадо-

бится устройство отрицательной опоры. Напр. на черт. 45 опора A должна быть отрицательною, ибо ея сопротивленіе течетъ внизъ. Знакъ опоры явствуетъ также и изъ разсмотрѣнія веревочнаго многоугольника.



Черт. 45.

ника. Сопротивленіе опоры отрицательно, когда замыкающій бокъ s образуетъ съ крайнимъ бокомъ I уголъ, обращенный вершиною вверхъ. Если замыкающій бокъ S сольется съ крайнимъ бокомъ, то сопротивленіе соотвѣтствующей опоры равно нулю.

22. Поперечныя силы.

Когда найдены сопротивленія опоръ, то сейчасъ же опредѣлятся и поперечныя силы. Для сосредоточенной нагрузки, линія поперечныхъ силъ будетъ ступенчатая, пересѣкающая ось абсциссъ въ одной, или въ трехъ точкахъ. Первое будетъ когда одна изъ опоръ отрицательна, второе когда сопротивленія обѣихъ опоръ положительны. Для случая нагрузки указаннаго на чертежѣ 46, найдемъ:

Для сѣченій между грузомъ P_1 и лѣвой опорой:

$$S_{x1} = -P_1;$$

для сѣченій между лѣвой опорой и грузомъ P_2:

$$S_{x_2} = -P_1 + A;$$

для сѣченій между грузомъ P_2 и правой опорой:

$$S_{x_3} = -P_1 + A - P_2;$$

для сѣченій между правой опорой и грузомъ P_3:

$$S_{x_4} = -P_1 + A - P_2 + B = P_3.$$

Эта линія построена на черт. 46 и не нуждается въ дальнѣйшихъ поясненіяхъ. Двѣ изъ трехъ точекъ пересѣченія линіи поперечныхъ

Черт. 46.

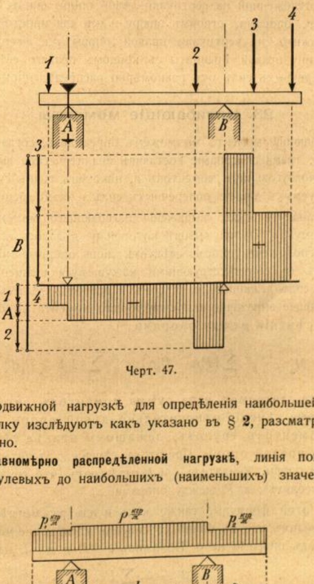
ныхъ силъ съ осью абсциссъ будутъ всегда надъ опорами, третья между опорами.

Если желаемъ построить линію поперечныхъ силъ, пользуясь многоугольникомъ силъ, по которому строили верёвочный многоугольникъ и опредѣляли сопротивленія опоръ, то имъ неудобно воспользоваться непосредственно, какъ указано было выше въ № **5**. Напр. для опредѣленія S_x въ случаѣ, разобранномъ на черт. 44, сначала перестроимъ многоугольникъ силъ, располагая ихъ по порядку: 1, A, 2, B, 3 и 4 и затѣмъ уже строимъ діаграмму поперечныхъ силъ, черт. 47.

Въ этомъ случаѣ ось абсциссъ пересѣкается лишь одинъ разъ.

Если загружены только свѣсы, поперечная сила между опорами равна нулю. Когда свѣсы разгружены, имѣемъ балку съ опорами по концамъ. Точно также, когда сопротивленія обѣихъ опоръ положи-

тельны, линія поперечныхъ силъ для пролетной части строится какъ и для простой балки.



Черт. 47.

При подвижной нагрузкѣ для опредѣленія наибольшей поперечной силы балку изслѣдуютъ какъ указано въ § **2**, разсматривая консоли отдѣльно.

При равномѣрно распредѣленной нагрузкѣ, линія поперечныхъ силъ отъ нулевыхъ до наибольшихъ (наименьшихъ) значеній измѣ-

Черт. 48.

няется по линейному закону. Пусть имѣемъ нагрузку черт. 48. Нулевую точку въ концѣ лѣвой консоли соединимъ съ концомъ ординаты p_1e_1, отложенной на вертикали лѣвой опоры внизъ. Для средней части между опорами, строимъ эпюру какъ для простой балки. Затѣмъ отложимъ на вертикали правой опоры p_2e_2 вверхъ и соединивъ вершину правой ординаты съ концомъ праваго свѣса, найдемъ линію поперечныхъ силъ отъ равномѣрно распредѣленной нагрузки.

23. Изгибающіе моменты.

Изгибающій моментъ мы можемъ опредѣлить, согласно вышеизложенному, тремя способами: составивъ аналитическое выраженіе, построивъ многоугольникъ моментовъ и, наконецъ, взявъ сумму площадей, образуемыхъ линіею поперечныхъ силъ и осью абсциссъ.

Для аналитическаго выраженія изгибающаго момента служитъ общая формула (17), при выводѣ которой не дѣлалось ограниченій въ смыслѣ расположенія опоръ; слѣдуетъ лишь опорные моменты Pa и Pb ставить съ соотвѣтствующими кажущемуся вращенію знаками. Вводя для силъ лежащихъ на лѣвомъ и правомъ свѣсахъ плечи c и d, найдемъ общее выраженіе для изгибающаго момента въ балкѣ со свѣсами для сѣченій между опорами *)

$$M_x = \frac{l-x}{l} \sum_{-e_1}^{x} \left(P_i a - P_k c\right) + \frac{x}{l} \sum_{e_2}^{x} \left(P_i b - P_k d\right), \tag{31}$$

гдѣ первое слагаемое есть сумма моментовъ грузовъ, лежащихъ лѣвѣе сѣченія относительно лѣвой опоры, а второе — сумма моментовъ грузовъ, лежащихъ правѣе сѣченія относительно правой опоры. При этомъ сѣченіе x отсчитывается всегда отъ лѣвой опоры. Указатели i и k оттѣняютъ, что грузы P_k на свѣсахъ (консоляхъ), а P_i между опорами.

Изъ этой формулы, также какъ и изъ разсмотрѣнія чертежей 44 и 45 видимъ, что въ балкѣ со свѣсами изгибающіе моменты въ сѣченіяхъ надъ опорами не 0. Положивъ $x = 0$ и $x = l$, найдемъ

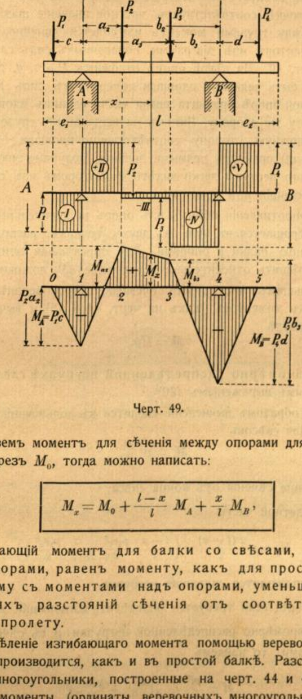
и

$$\left.\begin{aligned} M_A &= -\sum Pc, \\ M_B &= -\sum Pd; \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Указатели у $\sum$ опущены, такъ какъ ясно, что сумма должна быть распространена на всѣ грузы, дѣйствующіе на свѣсахъ.

*) Это выводится и непосредственно для черт. 49. Начало коодината въ точкѣ A.

Знакъ минусъ показываетъ, что опорные моменты знакопротивоположны изгибающимъ моментамъ (между опорами) для простой балки.



Черт. 49.

Назовемъ моментъ для сѣченія между опорами для балки безъ свѣсовъ черезъ M_0, тогда можно написать:

$$\boxed{M_x = M_0 + \frac{l-x}{l} M_A + \frac{x}{l} M_B,} \tag{33}$$

Изгибающій моментъ для балки со свѣсами, въ сѣченіи между опорами, равенъ моменту, какъ для простой балки, сложенному съ моментами надъ опорами, уменьшенными въ отношеніяхъ разстояній сѣченія отъ соотвѣтствующихъ опоръ къ пролету.

Опредѣленіе изгибающаго момента помощью веревочнаго многоугольника производится, какъ и въ простой балкѣ. Разсматривая веревочные многоугольники, построенные на черт. 44 и 45, наглядно видно, что моменты (ординаты веревочныхъ многоугольниковъ) надъ опорами и близь середины балки знакопротивоположны и достигаютъ своихъ наибольшихъ по абсолютной величинѣ значеній.

Послѣднее слѣдуетъ изъ діаграммы для поперечныхъ силъ. Каждой нулевой точкѣ соотвѣтствуетъ частное значеніе maximum'а M. Помня что между грузами моментъ измѣняется линейно, получимъ діаграмму моментовъ изъ діаграммы поперечныхъ силъ слѣдующимъ образомъ, черт. 49. На лѣвой опорѣ отложимъ $P_1 c$ т. е. площади—I (внизъ) стало быть величину площади поперечныхъ силъ для лѣваго свѣса; на правой опорѣ ордината равна числу единицъ площади V и отложена въ ту же сторону. Затѣмъ на вертикаляхъ грузовъ P_2 и P_3 въ противоположную сторону соотвѣтственно площади $+$II и $-$III. Соединивъ концы ординатъ прямыми линіями, получимъ эпюру моментовъ. Изъ этого чертежа легко видѣть въ которомъ изъ сѣченій получается наибольшій изъ моментовъ.

Когда сопротивленія обѣихъ изъ опоръ положительны, величина моментовъ обращается въ нуль въ двухъ точкахъ, расположенныхъ между серединою балки и опорами. Для опредѣленія этихъ точекъ слѣдуетъ разрѣшить относительно x уравненіе (33), положивъ $M_x = 0$.

При большомъ числѣ силъ очевидно цѣлесообразнѣе строить многоугольникъ моментовъ (какъ на черт. 44 и 45) и вычислять моментъ по формулѣ

$$M = Hy.$$

При равномѣрно распредѣленной нагрузкѣ слѣдуетъ пользоваться общимъ выраженіемъ (20).

Такимъ образомъ вычисленіе сводится къ пользованію простыми формулами. Для свѣсовъ

$$M_k = p' \frac{z^2}{2}, \tag{34}$$

гдѣ z разстояніе сѣченія отъ конца свѣса;

для пролетной части

$$M_x = p\,\frac{x(l-x)}{2} - \left(\frac{l-x}{l}\,\frac{p_1 e_1^2}{2} + \frac{x}{l}\,\frac{p_2 e_2^2}{2}\right); \tag{35}$$

причемъ вредполагается сплошная нагрузка.

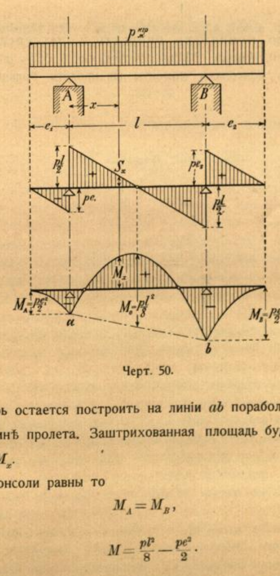
Напримѣръ, если требуется опредѣлить изгибающій моментъ отъ сплошной равномѣрно распредѣленной нагрузки p въ сѣченіи $x = \frac{l}{2}$ (между опорами), то найдемъ

$$M = \frac{pl^2}{8} - \frac{1}{2}\left(\frac{p_1 e_1^2}{2} + \frac{p_2 e_2^2}{2}\right),$$

что при одинаковой нагрузкѣ $p_1 = p_2 = p$, дастъ:

$$M = \frac{pl^2}{8} - \frac{p}{2}\left(\frac{e_1^2}{2} + \frac{e_2^2}{2}\right) = M_0 - \frac{1}{2}\left(M_A + M_B\right)$$

Отложивъ на вертикаляхъ опоръ $-\frac{pe_1^2}{2}$ и $-\frac{pe_2^2}{2}$, построивъ полупараболы на консоляхъ, найдемъ площади опорныхъ моментовъ M_A



Черт. 50.

и M_B. Теперь остается построить на линіи ab пораболу со стрѣлкою $\frac{pl^2}{8}$ по серединѣ пролета. Заштрихованная площадь будетъ площадью моментовъ M_x.

Если консоли равны то

$$M_A = M_B,$$

и

$$M = \frac{pl^2}{8} - \frac{pe^2}{2}. \tag{36}$$

Естественнымъ вопросомъ является: который изъ моментовъ $M_A = M_B$, или $M_{\frac{l}{2}}$, въ разсмотрѣнномъ частномъ случаѣ, будетъ больше по абсолютной величинѣ. Это зависитъ отъ длины свѣсовъ e. Разрѣшая уравненiе

$$\frac{pe^2}{2}=\frac{pl^2}{8}-\frac{pe^2}{2},$$

относительно e, найдемъ что опорный моментъ будетъ равенъ моменту въ серединѣ балки если

$$e=\frac{l}{\sqrt{8}}=0{,}353\ l,$$

т. е. равенство моментовъ опорнаго и для середины балки имѣетъ мѣсто, когда свѣсы составляютъ 35% отъ пролета. При меньшихъ консоляхъ моменты для пролета больше опорныхъ моментовъ.

ГЛАВА II.

Рѣшетчатая балочная ферма на двухъ опорахъ.

§ 5.

Статически опредѣлимая ферма.

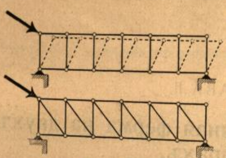
24. Общiя понятiя.

До сихъ поръ мы разсматривали балки на двухъ опорахъ, имѣющiя видъ сплошнаго прямолинейнаго стержня, или балки съ сплошною стѣнкою. Таковыя встрѣчаются въ простѣйшихъ сооруженiяхъ, какъ то: потолкахъ, полахъ, небольшихъ мостахъ и т. п. Съ увеличенiемъ и усложненiемъ конструкцiи является необходимость увеличивать и усложнять конструкцiю фермъ. Напр. для половыхъ перекрытiй достаточно простой балки; давленiе крыши передается на стѣны черезъ посредство стропильныхъ фермъ, сложность которыхъ возрастаетъ съ пролетомъ; давленiе полотна моста значительныхъ размѣровъ передается на опоры фермами, еще болѣе сложной конструкцiи. Если фермы, имѣющiя плоскость симметрiи, составлены изъ системы тѣлъ, связанныхъ между собою въ нѣкоторыхъ точкахъ такимъ образомъ, что между частями фермъ остаются сквозные промежутки, то фермы называются **рѣшетчатыми** *), такъ какъ имѣютъ въ боковомъ фасадѣ видъ рѣшетки. Въ рѣшетчатыхъ фермахъ отдѣльные стержни соединяются своими концами такъ, что образуютъ между собою систему треугольниковъ, такъ какъ только такая ферма подъ влiянiемъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ въ плоскости фермы не будетъ измѣнять своей формы, черт. 51.

При этомъ концы стержней соединены между собою подвижнымъ образомъ помощью шарнировъ; эти точки пересѣченiя стержней называются узлами. Такая именно система обыкновенно и подразумѣвается подъ словомъ «рѣшетчатая ферма». Подъ влiянiемъ

*) иногда «сквозными».

силъ, приложенныхъ къ узламъ фермы, въ ея отдѣльныхъ стержняхъ проявляются усилія, опредѣленіе которыхъ и составляетъ задачу расчета фермъ. При извѣстныхъ условіяхъ задача эта можетъ быть рѣшена средствами статики. Для этого надо во-первыхъ подчинить вопросъ требованіямъ статики, а затѣмъ изслѣдовать общія условія равновѣсія, неизмѣняемой системы. Съ первой точки зрѣнія ферму разсматриваютъ какъ систему неизмѣняемыхъ стержней. Въ дѣйствительности измѣненія длины отдѣльныхъ стержней рѣшетки настолько малы, что безъ большой для практики погрѣшности можно считать стержни рѣшетки абсолютно твердыми. Затѣмъ считаютъ, что силы, появляющіяся въ стержняхъ, при дѣйствіи на ферму внѣшнихъ силъ, совпадаютъ съ линіями центровъ тяжести стержней, т. е. съ осями стержней и что узлы фермы будутъ геометрическими точками пересѣченія этихъ линій. Наконецъ принимаютъ, что внѣшнія силы прикладываются только къ узламъ фермъ.



Черт. 51.

Такимъ образомъ въ статикѣ рѣшетчатая ферма представляетъ собою систему геометрическихъ стержней, соединенныхъ между собою своими конечными точками и образующихъ устойчивую систему. Здѣсь мы разсмотримъ плоскія фермы.

Остается посмотрѣть какимъ условіямъ, для опредѣленія усилій въ рѣшеткѣ, должны удовлетворять внѣшнія силы, къ фермѣ приложенныя, и какая зависимость должна существовать между этими силами и стержнями рѣшетки, чтобы пользуясь общими условіями равновѣсія, рѣшить предлагаемую задачу, т. е. выяснить признаки статической опредѣлимости системы.

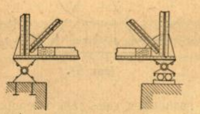
Внѣшнія силы, дѣйствующія на ферму и вызывающія въ ея стержняхъ усилія, должны прежде всего быть между собою въ равновѣсіи. Къ внѣшнимъ силамъ принадлежатъ грузы, приложенные къ узламъ фермы и вызываемыя этими грузами сопротивленія опоръ, приложенныя также къ нѣкоторымъ двумъ изъ числа всѣхъ узловъ фермы. Въ части I, въ отдѣлѣ о равновѣсіи несвободныхъ тѣлъ, мы видѣли, что если обѣ опоры будутъ удерживающія, то вопросъ остается неопредѣленнымъ.

Такъ какъ всѣ силы лежатъ въ плоскости, то для опредѣленія сопротивленія опоръ необходимо знаніе двухъ составляющихъ на вертикальную и двухъ на горизонтальную оси, т. е. всего четыре неиз-

вѣстныхъ. Но для условія равновѣсія силъ въ плоскости, мы располагаемъ лишь тремя уравненіями (I, 44)

$$X=0,\ Y=0 \text{ и } M=0. \qquad (37)$$

Поэтому одну неизвѣстную необходимо знать. Для этого одну изъ опоръ дѣлаютъ неудерживающею; на черт. 52 это правая опора, и тогда сопротивленіе опоры совпадаетъ съ нормалью къ плоскости опоры, т. е. является возможностью выбрать оси координатъ, такимъ образомъ, чтобы одна изъ четырехъ составляющихъ обратилась въ нуль.



Черт. 52.

На практикѣ это достигается тѣмъ, что одна опора, удерживающая, дѣлается въ видѣ шарнира позволяющаго фермѣ вращаться, но не перемѣщаться, а другая, позволяющая фермѣ кромѣ вращенія еще и перемѣщаться по плоскости опоры, большаю частью горизонтальной.

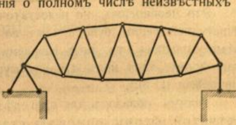
Итакъ при опредѣленіи сопротивленія опоръ имѣемъ 3 неизвѣстныхъ.

Для опредѣленія усилій въ стержняхъ нужно очевидно составить столько уравненій, сколько имѣется въ рѣшеткѣ стержней.

Такимъ образомъ, если въ фермѣ имѣются s стержней, то число неизвѣстныхъ внутреннихъ (усилій) силъ связей будетъ s, а полное число неизвѣстныхъ, которыя предстоитъ опредѣлить при расчетѣ рѣшетки:

$$n = s + 3.$$

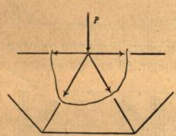
Для нагляднаго представленія о полномъ числѣ неизвѣстныхъ n можно опоры также замѣнить стержнями. Подвижная опора замѣнится однимъ стержнемъ, допускающимъ измѣненіе длины фермы, а опора неподвижная должна быть замѣнена двумя стержнями, какъ указано на чертежѣ 52 bis.



Черт. 52 bis.

Посмотримъ сколько теперь въ нашемъ распоряженіи имѣется уравненій, которыя мы можемъ составить для этой цѣли.

Для опредѣленія усилій въ частяхъ рѣшетчатыхъ фермъ пользуются способомъ сѣченій, т. е. поступаютъ какъ было указано въ изслѣдованіи, изложенномъ во введеніи. Отрѣзаютъ мысленно часть фермы, напр. стержни, пересѣкающіеся въ одномъ узлѣ и такимъ образомъ выдѣляютъ узелъ. Для того, чтобы узелъ этотъ остался въ равновѣсіи, необходимо къ перерѣзаннымъ стержнямъ приложить тѣ же силы, которыя на нихъ дѣйствовали, когда стержни составляли одно цѣлое съ остальной фермой. Такія внутреннія силы теперь по отношенію къ разсматриваемой, выдѣленной части будутъ внѣшними. Очевидно, что для равновѣсія узла необходимо, чтобы эти силы связей уравновѣшивались съ внѣшними активными силами, приложенными къ этому же узлу. А для опредѣленія равновѣсія силъ дѣйствующихъ въ одной плоскости и пересѣкающихся въ одной точкѣ, какъ извѣстно, мы имѣемъ условие



Черт. 53.

$$X=0 \text{ и } Y=0. \tag{37 bis}$$

Третье условіе, равновѣсія моментовъ силъ, обращается въ тождество. Поступая такимъ образомъ со всѣми узлами, число которыхъ пусть будетъ k, мы наконецъ, составимъ $2k$ уравненій. Если это число уравненій будетъ не меньше числа неизвѣстныхъ, т. е. если

$$2k \geqq s+3,$$

то всѣ неизвѣстные будутъ опредѣлены. Итакъ, чтобы возможно было опредѣлить усилія въ стержняхъ рѣшетчатой фермы, пользуясь средствами статики, т. е. **условіе статической опредѣлимости фермы**, выражается неравенствомъ:

$$\boxed{s \leqq 2k-3.} \tag{38}$$

Это необходимо, но недостаточно. Дѣйствительно, если фигура рѣшетчатой фермы будетъ сама по себѣ не жесткою, напримѣръ, четыреугольникъ, то, подъ вліяніемъ внѣшнихъ силъ, она измѣнитъ свою форму, такъ какъ такая фигура находится въ неустойчивомъ равновѣсіи (I, **32**).

Такимъ образомъ для опредѣленія усилій въ частяхъ рѣшетчатой фермы помощью статики, необходимо и достаточно чтобы число стержней не превышало удвоенное число узловъ безъ трехъ и чтобы ферма состояла изъ системы треугольниковъ. Въ этомъ случаѣ задача сводится къ изслѣдованію условій равновѣсія частей фермы и къ разрѣшенію составленныхъ уравненій.

Рѣшеніе этого вопроса можетъ быть произведено аналитическимъ и графическимъ путемъ. При этомъ пользуются установленными выше

понятіями о поперечныхъ силахъ и изгибающихъ моментахъ, причемъ, при дѣйствіи на ферму грузовъ, опредѣленіе количествъ M_x и S_x производится согласно вышеизложенному (§ **2,3**).

Но прежде чѣмъ переходить къ перечисленію этихъ способовъ опредѣленія усилій въ фермахъ, скажемъ нѣсколько словъ о классификаціи фермъ и терминахъ употребляемыхъ при изслѣдованіи фермъ.

Стержни фермъ имѣютъ свои опредѣленныя названія. Такъ стержни, расположенные по двумъ длиннымъ сторонамъ внѣшняго контура фермы, называются поясами; стержни, лежащіе внутри контура фермы называются вообще рѣшеткой фермы и получаютъ названіе раскосовъ при наклонномъ положеніи и стоекъ при вертикальномъ. Разстояніе между узлами по горизонтальному направленію, называется панелью. Въ стропильныхъ фермахъ вмѣсто поясовъ принято называть стержни верхняго контура ногами, а нижняго затяжкою.

По виду рѣшетки, фермы различаютъ фермы съ простою треугольною системою раскосовъ, раскосныя фермы (когда имѣются раскосы и стойки), фермы съ полураскосами и т. п. По очертанію поясовъ, различаютъ фермы съ прямолинейными, полигональными или криволинейными поясами. Въ послѣднемъ случаѣ на кривой расположены узлы, стержни-же фермы всегда прямолинейны. Подробное изслѣдованіе этихъ системъ составляетъ предметъ курса мостовъ.

§ 6.

Изслѣдованіе усилій въ рѣшетчатыхъ фермахъ.

25. Общіе пріемы.

Для аналитическаго рѣшенія уравненій равновѣсія узловъ, необходимо знать углы наклоненія стержней фермы съ вертикалью или съ горизонтомъ и тогда можно составить уравненія вида (37). Возьмемъ примѣръ, черт. 54. Сначала посмотримъ удовлетворяетъ-ли ферма неравенству (38).

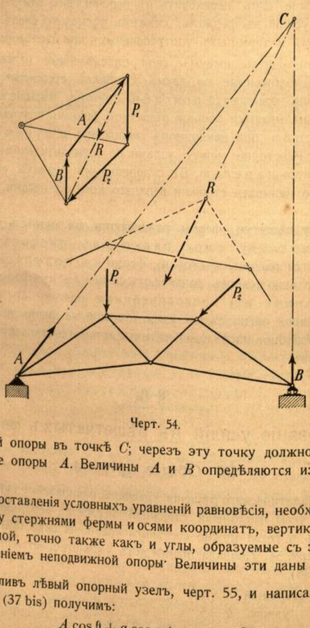
Число стержней : $s=7$;

» узловъ : $k=5$;

$$s=2k-3=7;$$

ферма статически опредѣлима.

Положимъ, что сопротивленія опоръ уже опредѣлены, либо пользуясь общими условіями равновѣсія силъ на плоскости, либо графическимъ путемъ, какъ это сдѣлано на чертежѣ: на данныхъ силахъ построенъ веревочный многоугольникъ, опредѣлена равнодѣйствующая R, которая пересѣкаетъ направленіе вертикальнаго сопротивленія подвиж-



Черт. 54.

ной правой опоры въ точкѣ C; черезъ эту точку должно пройти сопротивленіе опоры A. Величины A и B опредѣляются изъ треугольника силъ.

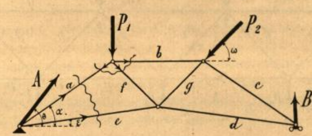
Для составленія условныхъ уравненій равновѣсія, необходимо знать углы между стержнями фермы и осями координатъ, вертикальной и горизонтальной, точно также какъ и углы, образуемые съ этими осями сопротивленіемъ неподвижной опоры. Величины эти даны на черт. 55.

Выдѣливъ лѣвый опорный узелъ, черт. 55, и написавъ уравненія равновѣсія (37 bis) получимъ:

$$A\cos\theta + a\cos\alpha + e\cos\varepsilon = 0;$$
$$A\sin\theta + a\sin\alpha + e\sin\varepsilon = 0.$$

Два уравненія съ двумя неизвѣстными, слѣдовательно неизвѣстныя опредѣлятся.

При составленіи такихъ уравненій первоначально всегда предполагаютъ, что неизвѣстная сила, дѣйствующая въ стержнѣ, направлена отъ узла, т. е. что стержень вытянутъ и въ уравненіи ставятъ поло-



Черт. 55.

жительный знакъ. Если при разрѣшеніи уравненій знакъ ея перемѣнится изъ положительнаго въ отрицательный, то значитъ предположеніе было сдѣлано неправильно и стержень оказывается сжатымъ.

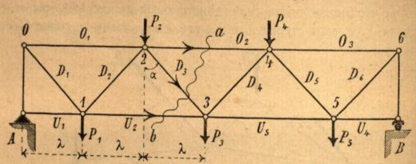
По разрѣшеніи этихъ уравненій увидимъ, что стержень a сжатъ, а e вытянутъ.

Для лѣваго верхняго узла напишемъ:

$$a\cos\alpha + b + f\cos\varphi = 0;$$
$$a\sin\alpha - P + f\sin\varphi = 0.$$

Въ первое уравненіе P не вошла, такъ какъ проекція ея на горизонтальную ось равна нулю; точно также во второе уравненіе не вошло b, такъ какъ ея проекція на вертикаль также нуль. Что касается до знаковъ, то онъ опредѣлится знакомъ косинуса угла, образуемаго стержнемъ съ горизонтомъ, причемъ при разрѣшеніи уравненій надо принять во вниманіе что a само по себѣ отрицательно. При составленіи уравненій можно-бы написать и—$a\cos\alpha$; но тогда для косинуса взять лишь ариѳметическое значеніе. Изъ этихъ уравненій опредѣляемъ усилія въ стержняхъ b и f. Первый стержень сжатъ, а второй вытянутъ.

Можно вмѣсто равновѣсія узла разсматривать равновѣсія цѣлой части рѣшетчатой фермы, т. е. поступать такъ-же, какъ дѣлали при сплошныхъ фермахъ. Пусть имѣемъ балочную ферму, AB черт. 56, съ грузами отъ P_1 до P_5. Разсѣчемъ ферму сѣченіемъ ab, отбросимъ правую часть и для сохраненія въ равновѣсіи лѣвой части, къ перерѣзаннымъ стержнямъ приложимъ силы, которыхъ величина должна равняться воздѣйствію на тѣ же стержни отброшенной правой части. Величина этихъ усилій опредѣлится изъ условныхъ уравненій равновѣсія. Такихъ условныхъ уравненій, вообще говоря, будетъ три для каждаго сѣченія, слѣдовательно рѣшеніе вопроса какъ и въ предыдушемъ случаѣ сведется на рѣшеніе системы уравненій со многими



Черт. 56.

неизвѣстными *). Называя, какъ раньше, сумму силъ, дѣйствующихъ лѣвѣе сѣченія черезъ S, при принятыхъ обозначеніяхъ получимъ:

$$-D_3 \cos\alpha + S_2 = 0;$$
$$O_2 + D_3 \sin\alpha + U_2 = 0;$$

гдѣ S_2 сумма силъ для панели 2—3.

Для составленія третьяго уравненія, за центръ моментовъ примемъ узелъ 3, тогда моменты силъ, дѣйствующихъ въ стержняхъ D_3 и U_2 обратятся въ нули, такъ какъ они проходятъ черезъ этотъ узелъ.

$$O_2 h + A \,.\, 3\lambda - P_1\, 2\lambda - P_2 \lambda = 0.$$

Здѣсь h—высота фермы, а λ горизонтальная проекція между узлами, или длина панели. Опредѣляя D_3 изъ перваго изъ написанныхъ уравненій, подставляя его значеніе во второе и, наконецъ замѣчая, что послѣдніе три члена третьяго уравненія представляютъ моментъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на лѣвую часть относительно выбраннаго узла 3, получимъ:

$$D_3 = \frac{S_2}{\cos\alpha};$$
$$O_2 + U_2 = S_2 \operatorname{tg}\alpha;$$
$$O_2 = -\frac{M_3}{h} \text{ и } U_2 = -S_2 \operatorname{tg}\alpha + \frac{M_3}{h}.$$

Вслѣдствіе того, что въ нашемъ распоряженіи имѣются три условныхъ уравненія—мы можемъ отсѣкать не больше трехъ стержней съ неиз-

*) Нагляднѣе для послѣдующихъ вычисленіи, если знакъ не входитъ въ косинусъ, т. е. ставить лишь абсолютную величину, cos или sin угла, а знакъ опредѣлять теченіемъ стрѣлокъ, относительно общепринятаго теченія положительныхъ координатъ; такимъ образомъ если разсматриваемъ равновѣсіе лѣвой части, то теченіе стрѣлокъ вверхъ и вправо будутъ соотвѣтствовать знаку +. внизъ и влѣво знакъ —

вѣстными усиліями. Поэтому этимъ способомъ можно пользоваться, если только удается провести хотя одно сѣченіе не больше, чѣмъ черезъ три стержня. При этомъ, если провести сѣченіе черезъ три стержня не представляетъ затрудненія, то нѣтъ необходимости знать усилія въ другихъ стержняхъ. Между тѣмъ при опредѣленіи усилій изъ равновѣсія узловъ, необходимо знать усилія въ предыдущихъ стержняхъ, такъ какъ кромѣ опорныхъ узловъ, обыкновенно въ прочихъ пересѣкается не меньше 3 стержней. Недостаткомъ-же обоихъ способовъ является необходимость рѣшенія системы уравненій, что всегда утомительно и представляетъ длинную работу.

26. Свойства усилій въ стержняхъ рѣшетки и поясовъ.

Ознакомимся ближе съ усиліями въ частяхъ фермы, для чего возьмемъ балочную ферму съ параллельными поясами.

Усилія въ рѣшеткѣ и поясахъ соотвѣтственно пропорціональны поперечнымъ силамъ и изгибающимъ моментамъ. Разсмотримъ ферму, имѣющую раскосы и стойки.

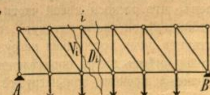
Изслѣдуемъ сначала **усиліе въ раскосахъ.**

Проведемъ сѣченіе въ любой панели и составляя выраженіе для суммы проекцій на вертикальную ось, получимъ:

$$S_i - D_i \cos\alpha_i = 0;$$

откуда

$$\boxed{D_i = \frac{S_i}{\cos\alpha_i}} \qquad (39)$$



Черт. 57 а.

Точно также для стоекъ, проводя наклонныя сѣченія и разсматривая лѣвую часть, получимъ:

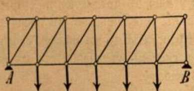
$$V_i + S_i = 0;$$

откуда

$$\boxed{V_i = -S_i.} \qquad (40)$$

Такимъ образомъ **усилія въ стойкахъ и раскосахъ прямо пропорціональны поперечной силѣ**, а **потому въ стойкахъ и раскосахъ наибольшія усилія получаются близь опоръ.** При этомъ для опредѣленія наибольшихъ по абсолютной величинѣ усилій въ раскосахъ, при дѣйствіи подвижной нагрузки, надо загружать часть формы какъ указано въ **12** и **13** такъ, чтобы въ данной панели получалось max S, или min. S.

Въ этихъ формулахъ, согласно принятому выше условію о знакахъ, пока величина суммы силъ лѣвѣе сѣченія будетъ положительною, раскосы будутъ вытянуты, а стойки сжаты. Изъ изслѣдованій поперечной силы мы знаемъ, что величина ея при переходѣ отъ одного сѣченія къ другому вообще говоря мѣняется и близь середины пролета переходитъ изъ положительной въ отрицательную. Коль скоро это случилось, то знаки въ уравненіяхъ (39) и (40) также измѣнятся и тогда получимъ, что: раскосы правой части фермы сжаты, а стойки вытянуты. Если теперь обратимся къ фермѣ черт. 57 Ь, то совершенно такимъ же образомъ изслѣдуя равновѣсіе части фермы по лѣвую сторону сѣченія получимъ:



Черт. 57 Ь.

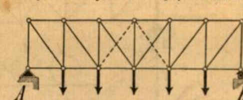
$$S_i + D_i \cos\alpha_i = 0 \;;\; D_i = -\frac{S_i}{\cos\alpha_i}, \qquad (39 \text{ bis})$$

и для стоекъ

$$V_i - S_i = 0 \;;\; V_i = S_i \;. \qquad (40 \text{ bis})$$

Примѣняя разсужденія подобно только что высказаннымъ, найдемъ, что раскосы лѣвой части фермы сжаты, а правой вытянуты, а стойки лѣвой части вытянуты, а правой сжаты. Когда на ферму дѣйствуетъ лишь постоянная нагрузка, то количество S въ данномъ сѣченіи имѣетъ всегда опредѣленное положительное или отрицательное значеніе, причемъ при нагрузкѣ равномѣрно распредѣленной положительное значеніе соотвѣтствуетъ лѣвой половинѣ, отрицательное—правой. Поэтому изъ приведенныхъ формулъ слѣдуетъ также правило: раскосы, уклоняющіеся вершинами къ опорамъ, дѣйствіемъ постоянной равномѣрно распредѣленной нагрузки всегда вытягиваются, а наклоненные вершинами къ серединѣ всегда сжимаются. При дѣйствіи временной нагрузки этого сказать нельзя, ибо въ одномъ и томъ же, сѣченіи значеніе S можетъ быть положительнымъ или отрицательнымъ, смотря потому будетъ ли загружена правая или лѣвая часть балки. Вообще же можно сказать: если раскосы въ фермѣ всѣ наклонены въ одну сторону, то при переходѣ черезъ нѣкоторое сѣченіе усилія въ нихъ и въ стойкахъ, измѣняются на противоположныя. Что касается до того сѣченія, въ которомъ происходитъ измѣненіе знака усилій, то изъ изслѣдованія поперечныхъ силъ извѣстно, что при нагрузкѣ симметричной это произойдетъ по рединѣ, а при временной по-

движной это измѣненіе произойдетъ нѣсколько отступя отъ средины, въ ту сторону откуда грузъ движется (9). Отсюда видно, что въ этомъ случаѣ нѣкоторые раскосы средней части могутъ быть то вытянуты, то сжаты, смотря по тому движется-ли грузъ слѣва или справа. Если желаютъ, чтобы всѣ раскосы имѣли усиліе одного знака, напр. всегда были вытянуты, то слѣдуетъ лѣвую часть фермы сдѣлать, какъ на черт. (57a), а правый, какъ на чер. (57b), т. е. всѣ раскосы должны уклоняться своими вершинами къ опорамъ, какъ на черт. (57c). Очевидно, что при подвижной нагрузкѣ одинаковость знака усилій въ раскосахъ недостижима, ибо средніе раскосы будутъ все-таки мѣнять знакъ усилія. Для того, чтобы этого избѣгнуть, придется лѣвые раскосы завести нѣсколько правѣе середины, именно до точки гдѣ $S=0$, а правые лѣвѣе середины до симметричной ей точкѣ, какъ показано на черт. (57c) пунктиромъ. Положеніе этой точки опредѣляется, какъ указано въ номерѣ **13**.

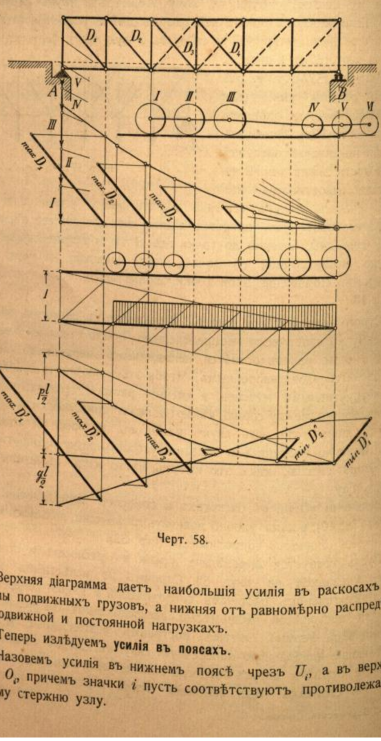


Черт. 57 c.

Строго говоря, такое введеніе перекрестныхъ раскосовъ обращаетъ ферму въ статически неопредѣленную (число стержней увеличивается, а число узловъ остается неизмѣннымъ—неравенство (38) перестаетъ быть удовлетвореннымъ). Чтобы этого избѣгнуть прибѣгаютъ къ конструктивнымъ мѣрамъ, а именно—раскосы среднихъ панелей, скрещивающіеся между собою, дѣлаются нежесткими, такъ что можетъ работать лишь тотъ изъ двухъ раскосовъ, который вытягивается. Можно конечно поступить и обратно: устроить раскосы сопротивляющіеся лишь сжатію, какъ это имѣетъ мѣсто напр. въ деревянныхъ фермахъ Гау.

Величины усилій въ раскосахъ и стойкахъ, опредѣляемыя выраженіями (39, 40), весьма удобно получить графически, пользуясь многоугольникомъ опорныхъ сопротивленій (стр. 32).

Пусть требуется опредѣлить усилія въ раскосахъ и стойкахъ фермы, указанной на черт. 58. Строимъ по извѣстнымъ правиламъ многоугольникъ опорныхъ сопротивленій и линію поперечныхъ силъ для постоянной равномѣрно-распредѣленной нагрузки (собственный вѣсъ фермы). Затѣмъ, построимъ вертикальные отрѣзки, опредѣляющіе наибольшую поперечную силу въ каждой панели; построенные отрѣзки дадутъ непосредственно величины наибольшихъ усилій въ стойкахъ. Изъ основаній этихъ отрѣзковъ проводимъ наклонные, параллельные діагоналямъ фермы, линіи, вершины отрѣзковъ которыхъ ограничены параллельными линіями, проведенными изъ противоположныхъ концовъ вертикальныхъ отрѣзковъ.



Черт. 58.

Верхняя діаграмма даетъ наибольшія усилія въ раскосахъ отъ системы подвижныхъ грузовъ, а нижняя отъ равномѣрно распредѣленной подвижной и постоянной нагрузкахъ.

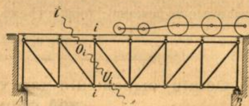
Теперь излѣдуемъ **усилія въ поясахъ**.

Назовемъ усилія въ нижнемъ поясѣ чрезъ U_i, а въ верхнемъ чрезъ O_i, причемъ значки i пусть соотвѣтствуютъ противолежащему данному стержню узлу.

Изъ условія равновѣсія лѣвой части фермы, отсѣченной сѣченіемъ tt, черт. 59, для нижняго пояса имѣемъ выраженіе

$$-U_i h + M_i = 0 \;;$$

$$\boxed{U_i = \frac{M_i}{h},} \qquad (41)$$



Черт. 59.

гдѣ M_i есть сумма моментовъ внѣшнихъ силъ лѣвѣе сѣченія tt, относительно точки i, т. е. изгибающій моментъ относительно узла i, а U_i, усиліе въ i стержнѣ нижняго пояса. Затѣмъ возьмемъ сумму проекцій на горизонтальную ось. Изъ условія равновѣсія лѣвой части найдемъ:

$$O_i + U_i = 0 \;;\; O_i = -U_i \;;$$

$$\boxed{O_i = -\frac{M_i}{h}} \qquad (42)$$

Подставляя вмѣсто i различныя значенія, найдемъ усилія въ поясахъ всѣхъ панелей.

Изъ полученныхъ выраженій заключаемъ: **усиліе въ стержняхъ поясовъ фермы прямо пропорціонально изгибающему моменту относительно противолежащаго стержню узла и обратно пропорціонально высотѣ фермы.**

Въ балочной фермѣ съ параллельными поясами величина h постоянна, величина изгибающаго момента увеличивается вообще говоря отъ опоръ къ серединѣ фермы, а потому имѣемъ правило: **въ балочныхъ фермахъ съ параллельными поясами наибольшія усилія въ поясахъ имѣютъ мѣсто въ среднихъ панеляхъ.**

Для полученія наибольшаго по абсолютной величинѣ усилія въ поясахъ слѣдуетъ загрузить всю ферму.

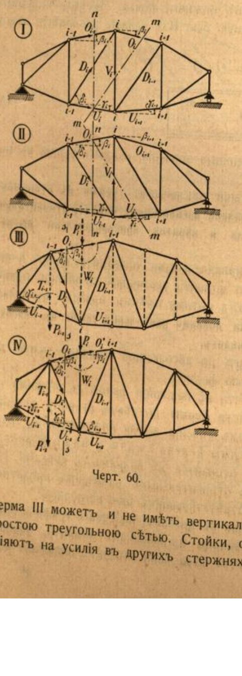
Затѣмъ, имѣя въ виду, что въ балочной фермѣ съ опорами по концамъ, при изслѣдованіи части фермы по лѣвую сторону сѣченія, изгибающій моментъ въ данномъ сѣченіи всегда положителенъ, найдемъ, что верхній поясъ фермы всегда сжатъ, а нижній всегда вытянутъ; это правило не относится къ балкамъ со свѣсами, гдѣ знакъ $\pm$ при M зависитъ отъ относительныхъ размѣровъ пролетной части балокъ и свѣсовъ и соотвѣтствующихъ имъ нагрузокъ.

Если желаемъ найти усилія въ поясахъ, пользуясь графическими способами для опредѣленія величины изгибающаго момента, указанными въ главѣ I, то для удобства вычисленій слѣдуетъ полюсное разстояніе H выбрать кратной высотѣ h (постоянной въ фермахъ съ параллельными поясами); тогда имѣемъ, назвавъ $\frac{H}{h}$ черезъ ν

$$U_i = \nu y_i \text{ и } O_i = -\nu y_i$$

27. Общія выраженія для усилій въ полигональной фермѣ.

Хотя разсмотрѣніе различныхъ системъ рѣшетчатыхъ фермъ и не входитъ въ предметъ настоящаго курса, тѣмъ не менѣе для практическаго пользованія удобно имѣть готовыя выраженія для усилій въ стержняхъ произвольной полигональной фермы (безъ пересѣченія раскосовъ). Условимся сначала въ обозначеніяхъ. Назовемъ стержни поясовъ, стоекъ и діагоналей, какъ и раньше, соотвѣтственно буквами O, U и V, D; при буквахъ поставимъ указатели: для поясовъ номера противолежащихъ узловъ, для стоекъ номера узловъ и для діагоналей (раскосовъ) номера узловъ, ограничивающихъ діагональ справа; этимъ-же указателемъ будемъ нумеровать и панель, заключающую данную діагональ. Для облегченія усвоенія этихъ обозначеній и вывода формулъ, изобразимъ на черт. 60 эскизы фермъ совершенно произвольнаго очертанія, подраздѣленныхъ на четыре категоріи: I и II черт. относятся къ фермамъ со стойками и діагоналями, причемъ въ фермахъ I раскосы уклоняются вершинами вправо и въ фермахъ II—влѣво; ферма III можетъ и не имѣть вертикалей, и ея рѣшетка называется простою треугольною сѣтью. Стойки, обозначенныя пунктиромъ, не вліяютъ на усилія въ другихъ стержняхъ той-же панели, а потому



Черт. 60.

ихъ присутствіе не мѣняетъ общихъ выводовъ. Наконецъ ферма IV имѣетъ треугольную сѣть со стойками; стойки въ фермахъ III и IV названы: поддерживающія верхній поясъ черезъ W, а поддерживающія нижній поясъ черезъ T. Углы, образуемые стержнемъ фермы i съ горизонтомъ назовемъ для верхняго пояса β_i, для нижняя пояса γ_i и для діагоналей δ_i. Эти углы будемъ всегда отсчитывать отъ горизонтальной оси, принимая начало координатъ въ лѣвомъ концѣ стержня, тогда углы будутъ всегда лежать въ первой или четвертой четвертяхъ круга *). Разстояніе между стержнемъ пояса и противолежащимъ узломъ, считая по вертикали (т. е. въ I и II длину стоекъ) назовемъ h_i. Всѣ эти обозначенія необходимо твердо усвоить, чтобы не ошибаться при пользованіи выведенными ниже формулами.

Грузы, дѣйствующіе на ферму, слѣдуетъ вообразить дѣйствующими на произвольные узлы.

Проведемъ сѣченіе mm и разсмотримъ условія равновѣсія всей лѣвой части фермъ I или II, изображеныхъ на чертежѣ 60.

1. Сумма проекцій силъ на горизонтальную ось равна нулю:

$$O_i \cos\beta_i + U_i \cos\gamma_i = 0\,;$$

2. сумма проекцій силъ на вертикальную ось равна нулю **),

$$S_k + O_i \sin\beta_i + U_i \sin\gamma_i = 0\,;$$

здѣсь S_k есть поперечная сила въ той изъ панелей, пересѣченныхъ сѣченіемъ mm, которая носитъ номеръ узла, ограничивающаго справа разсѣченный стержень пояса, несущаго грузы. Напримѣръ въ фермѣ I, когда ѣзда понизу, надо для k положить значеніе панели, въ которой лежитъ нижній пересѣченный стержень U_i, лежащій въ i той панели, т. е. положить $k = i$ и $S_k = S_i$ и тогда S_i есть поперечная сила въ i—той панели, т. е. сопротивленіе лѣвой опоры минусъ сумма узловыхъ нагрузокъ отъ 1 до i—1 включительно; когда въ той-же фермѣ I ѣзда поверху, то надо поставить номеръ той панели, въ которой лежитъ пересѣченный стержень O_i,—онъ лежитъ въ $i+1$ панели и тогда слѣдуетъ взять $S_k = S_{i+1}$, т. е. взять поперечную силу въ $i+1$ панели. Для фермы II будетъ обратно. Для наибольшихъ значеній S слѣдуетъ, при ѣздѣ по низу въ фермѣ 1, поставить первый сосредоточенный грузъ системы надъ узломъ i, и лѣвую

*) Выражая углы въ градусахъ проще, всего обозначать ихъ цифрами отъ 0° до 90° и, чтобы не ошибиться въ знакѣ тригонометрической величины, слѣдуетъ при составленіи таблицы угловъ ставить знакъ + или — первый для угловъ первой четверти, а второй для угловъ послѣдней четверти.

**) Знаки передъ O_i и U_i заключены въ знакѣ синуса угловъ β_i или γ_i.

часть фермы разгрузить, а во второмъ случаѣ расположить первый грузъ надъ узломъ $i+1$, разгрузивъ точно также лѣвую часть фермы.

Третье условіе, если обозначить изгибающій моментъ относительно узла i черезъ M_i — выскажется такъ:

3. сумма моментовъ силъ относительно узла i должна равняться нулю.

$$M_i + O_i \cos\beta_i \cdot h_i = 0 .$$

Изъ перваго и третьяго условій имѣемъ, опуская общій значекъ i:

$$\boxed{\begin{aligned} O &= -\frac{1}{\cos\beta}\,\frac{M}{h}\,; \\ U &= \frac{1}{\cos\gamma}\,\frac{M}{h}\,. \end{aligned}} \tag{43}$$

Эти же значенія найдемъ и для фермы III, но въ этомъ случаѣ, проведя сѣченіе ss, одно изъ первыхъ двухъ условій замѣнимъ условіемъ равновѣсія моментовъ силъ относительно узла i—1, тогда найдемъ выраженіе для U_{i-1}, подобное только что найденному для U_i.

Подставляя найденныя для O_i и U_i значенія въ условіи 2, и опуская общій значекъ i находимъ:

$$\boxed{V = \pm\left\{S_k + \frac{M}{h}(\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\beta)\right\}.} \tag{44}$$

При пользованіи этой формулой слѣдуетъ, помимо сказаннаго относительно указателя k, помнить, что тангенсы угловъ β и γ должны быть вставлены съ соотвѣтственными знаками, такъ какъ это условіе вошло въ выраженіе 1. Верхній знакъ правой части слѣдуетъ взять для фермы I, а нижній для фермы II. Когда пояса фермы между собою параллельны, то второй членъ выраженія (44) обращается въ нуль (40).

Что касается до усилій въ стойкахъ W и T фермъ III и IV, то эти усилія найдемъ изъ условія равновѣсія узловъ, въ которыхъ стойки поддерживаютъ стержни поясовъ.

Для фермы IV, выдѣливъ узлы, какъ показано на чертежѣ, найдемъ:

$$-W_i - P_i - O_i \sin\beta_i + O'_i \sin\beta'_i = 0\ ;$$
$$T_{i-1} - P_{i-1} - U_{i-1}\sin\gamma_{i-1} + U'_{i-1}\sin\gamma'_{i-1} = 0\ ;$$

гдѣ окончательные знаки передъ U и O (припомнимъ условіе объ обозначеніи угловъ) опредѣляются знаками синусовъ угловъ γ_i и β_i.

Подставляя сюда значенія для O_i и U_{i-1}, опредѣляя величины W и T, получимъ:

$$\boxed{\begin{aligned} W &= -P + \frac{M}{h}(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\beta')\,; \\ T &= P + \frac{M}{h}(\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\gamma')\,; \end{aligned}} \tag{45}$$

здѣсь для упрощенія указатели опущены, ибо всѣ элементы въ каждой формулѣ имѣютъ общій указатель: въ первой формулѣ i, и во второй формулѣ i—1. Тангенсы угловъ наклоненія, согласно принятому способу обозначенія на черт. 60 должны быть взяты съ соотвѣтственными знаками. Такъ напр. во второмъ выраженіи второй членъ будетъ отрицателенъ, такъ какъ въ фермѣ IV уголъ γ и его тангенсъ отрицательны. Когда $\beta = \beta'$ или $\gamma = \gamma'$, т. е. для фермы III имѣемъ:

$$W = -P\,;$$
$$T = P\,.$$

Отсюда видно, что стержни W и T въ фермѣ III составляютъ лишь добавочную часть рѣшетки и могутъ (при отсутствіи груза P расположенаго надъ и подъ этимъ стержнемъ) быть выброшены безъ измѣненія отъ этого усилій въ главныхъ стержняхъ O, U и D. Поэтому на чертежѣ фермы III стойки W и T и обозначены лишь пунктиромъ.

Теперь проведемъ вертикальное сѣченіе въ i-той панели, т. е. сѣченіе nn въ фермахъ I и II и сѣченіе ss въ фермахъ III и IV и составимъ условіе равновѣсія проекцій силъ на горизонтальную ось.

Для фермы I это будетъ:

$$O_{i-1}\cos\beta_{i-1} + D_i\cos\delta_i + U_i\cos\gamma_i = 0\,;$$

для прочихъ фермъ напишемъ:

$$O_i\cos\beta_i + D_i\cos\delta_i + U_{i-1}\cos\gamma_{i-1} = 0\,.$$

Подставляя въ каждое изъ этихъ уравненій извѣстныя ужъ намъ значенія для O_i, O_{i-1}, U_i и U_{i-1}, найдемъ:

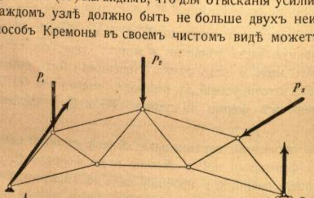
$$\boxed{D_i = \mp\frac{1}{\cos\delta_i}\left(\frac{M_i}{h_i} - \frac{M_{i-1}}{h_{i-1}}\right),} \tag{46}$$

гдѣ верхній знакъ соотвѣтствуетъ ф. I, т. е. діагоналямъ наклоненнымъ вправо, а нижній для ф. II, III и IV, т. е. для діагоналей уклоняющихся вершинами влѣво.

28. Способъ Кремоны.

Изъ первой части курса извѣстно, что для сложенія силъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ, можно пользоваться многоугольникомъ силъ, изъ котораго каждая изъ дѣйствующихъ на точку силъ опредѣляется непосредственно какъ по величинѣ, такъ и по теченію. Пользуясь этимъ, итальянскій професоръ Кремона предложилъ рѣшать уравненія равновѣсія узловъ построеніемъ многоугольниковъ силъ. Такъ какъ усиліе, проявляющееся въ каждомъ стержнѣ входитъ въ уравненіе, составленное для двухъ узловъ, соединяемыхъ этимъ стержнемъ, то построенные многоугольники силъ всегда имѣютъ общія стороны и слѣдовательно могутъ быть соединены въ одинъ общій многоугольникъ силъ, который собственно и называется діаграммой усилій Кремоны.

Изъ уравненій (37) мы видимъ, что для отысканія усилій, дѣйствующихъ въ каждомъ узлѣ должно быть не больше двухъ неизвѣстныхъ, поэтому способъ Кремоны въ своемъ чистомъ видѣ можетъ быть при-



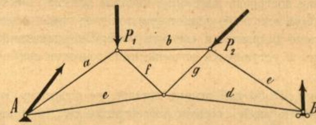
Черт. 61.

мѣненъ къ тѣмъ фермамъ, въ которыхъ имѣется хоть одинъ узелъ, составляющій пересѣченіе только двухъ стержней и къ которому приложена внѣшняя сила, какъ напр. указано на черт. 61.

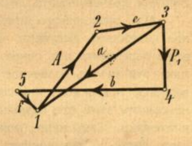
Разъ усиліе хоть въ одномъ стержнѣ извѣстно, то въ слѣдующихъ узлахъ можетъ пересѣкаться и большее ихъ число, лишь бы число вновь входящихъ стержней, усиліе которыхъ предстоитъ опредѣлить, было не больше двухъ.

Пусть имѣемъ ферму черт. 62, на которую дѣйствуютъ силы P_1, P_2, вызывающія сопротивленія опоръ A и B. Положимъ сначала, что намъ удалось уже опредѣлить сопротивленія опоръ, т. е. что всѣ силы, на ферму дѣйствующія, заданы. Построеніе діаграммы начинаемъ съ опорнаго узла A, гдѣ сходятся два стержня. Въ произвольномъ масштабѣ, проводимъ линію 1—2, изображающую силу A; сила эта

должна уравновѣшиваться съ усиліями стержней a и e, т. е. на діаграммѣ долженъ получиться сомкнутый треугольникъ.



Черт. 62.



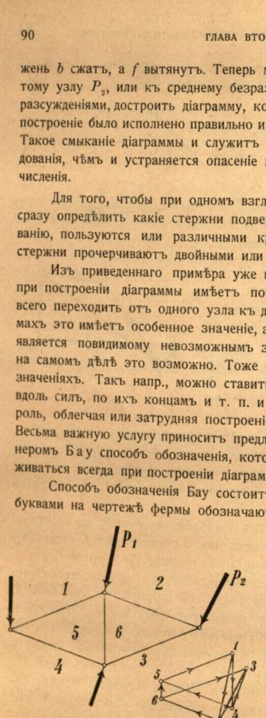
Для полученія его, на черт. 62a изъ концовъ отрѣзка 1—2 проводимъ линіи, параллельныя стержнямъ a и e; пересѣченіе ихъ опредѣлить искомый треугольникъ 1—2—3. Такъ какъ силы должны быть въ равновѣсіи, то теченіе въ треугольникѣ должно быть непрерывно и слѣдовательно будетъ, какъ указано стрѣлками. Обративъ вниманіе на чертежъ фермы, изъ которой выдѣленъ разсматриваемый узелъ, можно видѣть, что усиліе въ лѣвой части отрѣзаннаго стержня e направлено отъ узла A, т. е. этотъ стержень вытянутъ силою 2—3, а усиліе въ лѣвой части отрѣзаннаго стержня a — направлено на узелъ A, т. е. этотъ стержень сжатъ силою 3—1.

Теперь слѣдуетъ перейти къ изслѣдованію узла P_1, въ которомъ неизвѣстными являются усилія лишь двухъ стержней b и f, тогда какъ въ среднемъ нижнемъ узлѣ имѣли бы три неизвѣстныхъ усилій f, g и d. При построеніи новаго многоугольника равновѣсія, въ него непремѣнно войдетъ уже опредѣленная сила 1—3, дѣйствующая на стержень a, пересѣкающійся въ этомъ узлѣ; кромѣ того мы знаемъ, что этотъ стержень сжатъ, т. е. давитъ на узелъ P_1 вправо. Поэтому, если мы перемѣнимъ теченіе стрѣлки 1—3, то намъ будетъ удобно продолжать построеніе діаграммы отъ точки 3, къ которой пристроимъ силу P_1, изображающуюся отрѣзкомъ 3—4 и теченіе которой будетъ составлять какъ бы продолженіе только что мысленно построенной силы 1—3 (съ теченіемъ вправо). Проведя изъ конца 4 силы P_1 линію, параллельную сторонѣ b и, принявъ во вниманіе, что сторона многоугольника, изображающая слѣдующее усиліе, т. е. въ стержнѣ f, должна замыкать пристраеваемый многоугольникъ, увидимъ, что проведя изъ точки 1 линію 1—5, мы и найдемъ точку 5, пересѣченіе сторонъ 4—5 и 1—5. Разсматривая новый многоугольникъ силъ найдемъ, что стержень b сжатъ, а f вытянутъ. Теперь можно перейти или къ четвертому узлу P_2, или къ среднему безразлично и, пользуясь такими же разсужденіями, достроить діаграмму, которая должна сомкнуться, если построеніе было исполнено правильно и точно въ графическомъ смыслѣ. Такое смыканіе діаграммы и служитъ повѣркою правильности изслѣдованія, чѣмъ и устраняется опасеніе въ неточности графическаго вычисленія.

Для того, чтобы при одномъ взглядѣ на діаграмму можно было сразу опредѣлить какіе стержни подвергаются сжатію и какіе вытягиванію, пользуются или различными красками, или силы сжимающія стержни прочерчиваютъ двойными или утолщенными линіями.

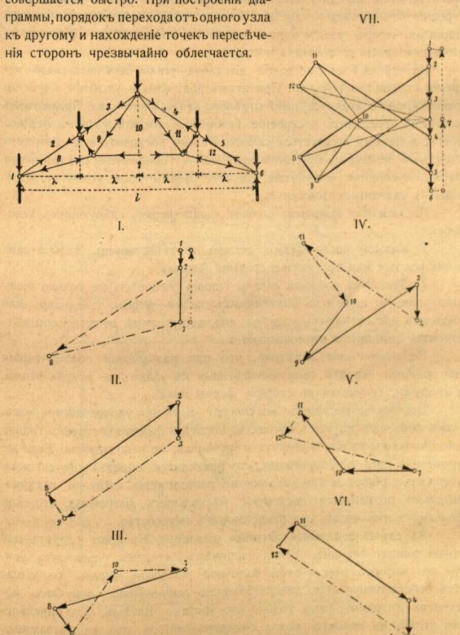
Изъ приведеннаго примѣра уже видно, что весьма важную роль при построеніи діаграммы имѣетъ порядокъ въ которомъ удобнѣе всего переходить отъ одного узла къ другому. При сложныхъ діаграммахъ это имѣетъ особенное значеніе, а въ нѣкоторыхъ случаяхъ даже является повидимому невозможнымъ замкнуть діаграмму, тогда какъ на самомъ дѣлѣ это возможно. Тоже слѣдуетъ замѣтить и объ обозначеніяхъ. Такъ напр., можно ставить буквы или цифры въ узлахъ, вдоль силъ, по ихъ концамъ и т. п. и все это играетъ существенную роль, облегчая или затрудняя построеніе многоугольниковъ равновѣсія. Весьма важную услугу приноситъ предложенный американскимъ инженеромъ Бау способъ обозначенія, котораго удобнѣе всего и придерживаться всегда при построеніи діаграммы усилій.

Способъ обозначенія Бау состоитъ въ томъ, что цифрами или буквами на чертежѣ фермы обозначаютъ пространства, какъ между стержнями, черт. 63, такъ и между силами. Силы и стержни читаются по цифрамъ, расположеннымъ по сторонамъ ихъ: такъ P_1 есть сила 1—2, дальше P_2 назовется 2—3, затѣмъ силы 3—4 и 4—1 и стержни 1—5, 2—6, 3—6, 4—5 и наконецъ 5—6. Въ діаграммѣ усилій силы обозначаются цифрами по концамъ отрѣзковъ. При такомъ обозначеніи всякая сила, дѣйствующая на ферму, отыскивается на діаграммѣ при одномъ взглядѣ на нее. Такъ какъ каждому узлу фермы долженъ на діаграммѣ соотвѣтствовать сомкнутый многоугольникъ; напр., узлу при P_1, т. е. 1, 2, 6, 5, на діаграммѣ соотвѣтствуетъ многоугольникъ



Черт. 63.

1—2—6—5—1 и каждому пространству на фермѣ соотвѣтствуетъ узелъ на діаграммѣ,—то нахожденіе такихъ многоугольниковъ также совершается быстро. При построеніи діаграммы, порядокъ перехода отъ одного узла къ другому и нахожденіе точекъ пересѣченія сторонъ чрезвычайно облегчается.



Черт. 64.

Построеніе діаграммы усилій, необходимо всегда начинать съ опредѣленія всѣхъ внѣшнихъ силъ, т. е. построить многоугольникъ равновѣсія для силъ заданныхъ (активныхъ), т. е. нагрузокъ и сопротивленій опоръ (пассивныхъ). Этотъ многоугольникъ долженъ послужить основою для построенія всей діаграммы. Затѣмъ начинаютъ построеніе отъ опорнаго узла и слѣдуютъ по периметру фермы, не перескакивая черезъ узелъ, а пристраивая послѣдовательно многоугольники равновѣсія очередныхъ узловъ.

На чертежѣ 64 построена **діаграмма усилій для постоянной нагрузки** стропильной фермы. При этомъ для полнаго уясненія всего построенія, оно сначало сдѣлано отдѣльно для каждаго узла. Предлагаемъ читателю прослѣдить построеніе равновѣсія каждаго узла въ отдѣльности, а затѣмъ попытаться самостоятельно построить всю діаграмму Толстыми линіями на діаграммѣ черт. 64—VII обозначены сжатыя части фермы, а тонкими вытянутыя. На черт. фермы родъ усилія (т. е. + или —) указанъ стрѣлками *).

Построенная діаграмма должна удовлетворять слѣдующимъ условіямъ:

1) Каждой части фермы должна соотвѣтствовать только одна линія (сжатіе или растяженіе стержня фермы).

2) Діаграмма должная давать условія равновѣсія не только каждаго узла, но и цѣлыхъ выдѣленныхъ частей фермы, т. е. напр. если выдѣлить два сосѣднихъ узла, то имъ въ діаграммѣ долженъ соотвѣтствовать сомкнутый многоугольникъ.

Не лишнее еще замѣтить, что при пользованіи обозначеніями Бау удобнѣе чертить силы приложенныя къ узламъ не внутри фермы, а снаружи, текущими въ сторону фермы извнѣ.

Построеніе діаграммъ по способу Кремоны употребляется главнымъ образомъ въ тѣхъ случаяхъ, когда на ферму дѣйствуетъ только постоянная нагрузка, или хотя и временная, но неподвижная. Если-же временная нагрузка подвижная, то приходится опредѣлять усилія въ стержняхъ рѣшетки при различномъ расположеніи нагрузки, и слѣдовательно потребуется построеніе нѣсколькихъ діаграммъ, что при большомъ ихъ числѣ уже представляетъ неудобство.

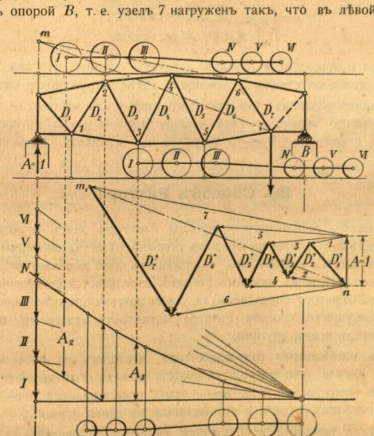
Въ случаѣ подвижной нагрузки діаграмму Кремоны строятъ для груза равнаго единицѣ. Если, напримѣръ, желаемъ опредѣлить усилія въ частяхъ рѣшетчатой балочной мостовой фермы, то усилія отъ собственнаго вѣса распредѣленнаго равномѣрно, получимъ, построивъ діаграмму, какъ только что указано. Затѣмъ, для опредѣленія усилій въ поясахъ можно, воспользоваться тою же діаграммою, измѣнивъ масштабъ въ отношеніи p/g, гдѣ p временная, а g постоянная нагрузка. Дѣйствительно, усилія въ поясахъ получаютъ наибольшія

*) Обыкновенно для симметричныхъ фермъ съ симметричной нагрузкой чертится лишь діаграмма для половины фермы.

значенія при полной загрузкѣ фермы, поэтому если нагрузка равномѣрно распредѣлена, то ея дѣйствіе подобно дѣйствію собственнаго вѣса. Можно было бы построить и одну діаграмму для груза равнаго единицѣ, а затѣмъ составить одну таблицу усилій отъ постоянной, а другую отъ временной нагрузокъ.

Если подвижная нагрузка въ видѣ системы сосредоточенныхъ грузовъ, то пользоваться діаграммой Кремоны для опредѣленія усилій *въ поясахъ* не цѣлесообразно. Для *опредѣленія-же усилій въ частяхъ рѣшетки* строятъ діаграмму Кремоны для груза единица, слѣдующимъ образомъ:

Пусть имѣемъ рѣшетчатую ферму произвольнаго очертанія, напримѣръ, какъ указано на черт. 65. Вообразимъ, что послѣдній узелъ передъ опорой B, т. е. узелъ 7 нагруженъ такъ, что въ лѣвой опорѣ



Черт. 65.

возникаетъ сопротивленіе $A = 1$. Затѣмъ построимъ діаграмму усилій Кремоны. Если нагрузка, напр. при ѣздѣ по верху, продвинута отъ B до узла 2, или, точнѣе такъ, чтобы въ панели O_2 получилась бы max S, то соотвѣтственно этому получимъ и наибольшія по абсолютной величинѣ усилія въ діагоналяхъ D_1 и D_2. Величину поперечной силы, равной опорному сопротивленію A_2 найдемъ изъ многоугольника опорныхъ сопротивленій. Усилія D_1 и D_2 найдемъ изъ діаграммы Кремоны, умноженіемъ отрѣзковъ D_1' и D_2' на новое сопротивленіе опоры A_2, т. е.

$$D_1 = A_2 \cdot D_1' \text{ — растяженіе;}$$
$$-D_2 = -A_2 \cdot D' \text{ — сжатіе. *)}$$

При ѣздѣ понизу и при положеніи грузовъ на протяженіи отъ B до узла 3, вызываются наибольшія поперечныя силы въ панели 1—3 и усилія въ діагоналяхъ этой панели будутъ:

$$-D_2 = -A_3 \cdot D_2' \text{ — сжатіе,}$$
$$D_3 = A_3 \cdot D_3' \text{ — растяженіе.}$$

При пользованіи діаграммой слѣдуетъ помнить, что надо брать только усилія для стержней, лежащихъ лѣвѣе нагруженнаго узла.

Такимъ образомъ, пользуясь діаграммой усилій чертежа 65 можно весьма быстро опредѣлить всѣ крайнія значенія усилій въ промежуточныхъ стержняхъ. (Будь-то діагонали или вертикали—безразлично).

29. Способъ Риттера.

Способъ германскаго професора Риттера даетъ возможность для опредѣленія усилія въ каждомъ стержнѣ рѣшетчатой фермы воспользоваться однимъ уравненіемъ, содержащимъ одно неизвѣстное усиліе. При этомъ, усиліе въ каждомъ стержнѣ опредѣляется совершенно независимо отъ того опредѣлены ли усилія другихъ стержней или нѣтъ. Эти преимущества способа Риттера заставляютъ отдать ему предпочтеніе предъ всѣми другими.

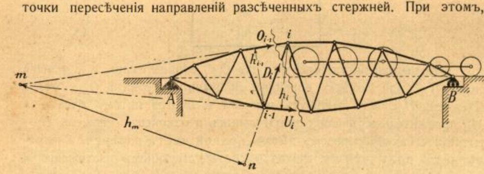
Въ изслѣдованіи равновѣсія силъ, лежащихъ на плоскости (I, **20**), мы видѣли, что условіе равновѣсія можетъ быть выражено уравненіями моментовъ относительно трехъ произвольныхъ точекъ, взятыхъ въ плоскости силъ и не лежащихъ на одной прямой.

Этими условіями и пользуется Риттеръ для опредѣленія неизвѣстныхъ усилій. Такъ какъ такихъ условій можно составить три, то очевидно, что какъ и раньше, выдѣляя часть системы и опредѣляя ея равновѣсія, можно опредѣлить не больше трехъ усилій въ разсѣченныхъ стержняхъ фермы.

---

*) Знакъ слѣдуетъ изъ діаграммы или изъ изложеннаго выше правила.

Пусть имѣемъ ферму AB, въ которой желаемъ опредѣлить усилія стержней O_{i-1}, D_i и U_i, причемъ указатели стержней поясовъ соотвѣтствуютъ противолежащимъ имъ узламъ, а указатель діагоналей узлу, ограничивающему стержень справа. Проведя черезъ означенные стержни сѣченіе, отбросивъ правую часть, приложивъ къ отсѣченнымъ стержнямъ неизвѣстныя пока усилія, текущія какъ показано—разсмотримъ равновѣсіе лѣвой части. За центры моментовъ выберемъ точки пересѣченія направленій разсѣченныхъ стержней. При этомъ,



Черт. 66.

опредѣляя усиліе въ одномъ стержнѣ, пишемъ условіе равновѣсія моментовъ силъ относительно точки пересѣченія двухъ прочихъ, тогда моменты силъ дѣйствующихъ въ этихъ послѣднихъ обратятся въ нули. Такимъ образомъ, если назовемъ черезъ h_{i-1} перпендикуляръ опущенный изъ узла i—1 на стержень O_{i-1}, черезъ h_i перпендикуляръ изъ узла i на стержень U_i и наконецъ черезъ h_m перпендикуляръ изъ точки m, пересѣченія направленій стержней O_{i-1} и U_i, на направленіе стержней D_i, то условія равновѣсія моментовъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ по лѣвую сторону сѣченія, будутъ:

$$\begin{aligned} M_{i-1} + O_{i-1}\, h_{i-1} &= 0\,; \\ M_m - D_i\, h_m &= 0\,; \qquad (47) \\ M_i - U_i\, h_i &= 0\,; \end{aligned}$$

гдѣ M есть сумма моментовъ внѣшнихъ силъ лѣвѣе сѣченія, и указатель при M показываетъ центръ момента, а знаки передъ вторыми слагаемыми соотвѣтствуютъ условію считать положительными моментами тѣ, которыхъ кажущееся вращеніе совпадаетъ съ вращеніемъ часовой стрѣлки, отрицательными—наоборотъ. Изъ изслѣдованія балки на двухъ опорахъ по концамъ извѣстно: изгибающій моментъ лѣвѣе сѣченія всегда положительный, почему передъ выраженіемъ моментовъ силъ лѣвѣе сѣченія относительно узловъ фермы, всегда будетъ знакъ +. Что касается до выраженія M_m, т. е. выраженія моментовъ силъ относительно воображаемаго узла (шарнира) m, то онъ въ каждомъ частномъ случаѣ будетъ имѣть тотъ или другой знаки. Изъ послѣднихъ уравненій имѣемъ*):

$$\boxed{\begin{aligned} O_{i-1} &= -\frac{M_{i-1}}{h_{i-1}}; \\ D_i &= \frac{M_m}{h_m}; \\ U_i &= \frac{M_i}{h_i}. \end{aligned}} \tag{48}$$

Эти выраженія указываютъ, что O_{i-1} отрицательно, т. е. теченіе силы O_{i-1} было выбрано ошибочно и значитъ стержень O_{i-1} сжатъ. Стержень D_i будетъ вытянутъ или сжатъ, смотря потому будетъ-ли M_m положительнымъ или отрицательнымъ и наконецъ стержень U_i— вытянутъ. Такимъ образомъ знакъ правой части равенства опредѣляетъ родъ усилія, считая + соотвѣтствующимъ растяженію и — сжатію.

Если бы мы разсматривали равновѣсіе правой части, то знаки вторыхъ членовъ уравненія (48) пришлось бы измѣнить и тогда получили бы:

$$O_{i-1} = \frac{M_{i-1}}{h_{i-1}}; \quad D_i = \frac{M_m}{h_m}; \quad U_i = -\frac{M_i}{h_i}.$$

Въ этихъ выраженіяхъ величина M сама по себѣ отрицательна, такъ какъ изгибающій моментъ правѣе сѣченія отрицателенъ; поэтому найдемъ какъ и раньше, что $O_{i-1} < O$, т. е. сжатъ, а D_i и $U_i > 0$ или вытянутъ.

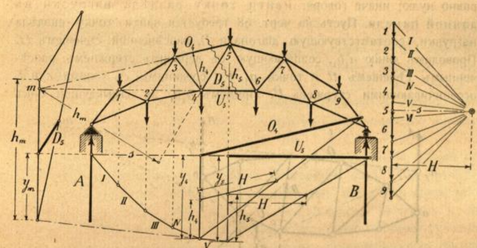
Итакъ, по Риттеру, усилія въ стержняхъ фермы выражаются помощью уравненій моментовъ. Такъ какъ величина изгибающаго момента зависитъ не только отъ величины грузовъ, но и отъ ихъ положенія, то отсюда наглядно видно, какъ усилія въ стержняхъ рѣшетчатой фермы измѣняются вмѣстѣ съ перемѣщеніемъ грузовъ.

Графическое рѣшеніе вопроса по Риттеру производится при помощи многоугольника моментовъ. Это бываетъ удобно лишь въ частныхъ случаяхъ: именно—во-первыхъ при постоянной нагрузкѣ и во-вторыхъ для фермъ, въ которыхъ стержни поясовъ пересѣкаются въ предѣлахъ чертежа. Это имѣетъ мѣсто въ фермѣ съ криволинейнымъ поясомъ напр. въ фермѣ только что разобранной, а также въ серповидныхъ фермахъ, какъ на черт. 67.

*) Необходимо обратить вниманіе, что величины h въ этомъ номерѣ соотвѣтствуютъ величинамъ $h \cos\beta$, или $h \cos\gamma$ номера **27**.

Построивъ многоугольникъ моментовъ извѣстнымъ способомъ *), мы усилія O_4 и U_5 получимъ изъ выраженій:

$$O_4 = -H\frac{y_4}{h_4}; \tag{49}$$
$$U_5 = H\frac{y_5}{h_5}.$$



Черт. 67.

Величины эти на черт. 67 построены графически и нахожденіе ихъ слѣдуетъ изъ пропорціональности параллельныхъ линій въ треугольникѣ; что касается нахожденія количества M_m, опредѣляющаго величину D_5, то оно также находится изъ выраженія $\pm M_m = \pm Hy_m$.

Для опредѣленія ординаты y_m, продолжаемъ крайніе бока веревочнаго многоугольника построеннаго на силѣ A и грузахъ 1, 2, 3 и 4—это будутъ замыкающая s и бокъ V—до пересѣченія съ вертикалью точки m, пересѣченія стержней O_4 и U_5. Такъ какъ ордината y_m лежитъ, также какъ и ординаты y_4 и y_5, ниже замыкающаго бока s, то она имѣетъ положительный знакъ, поэтому въ выраженіи $-Dh_m + M_m = O$, количество $M_m = Hy_m > O$.

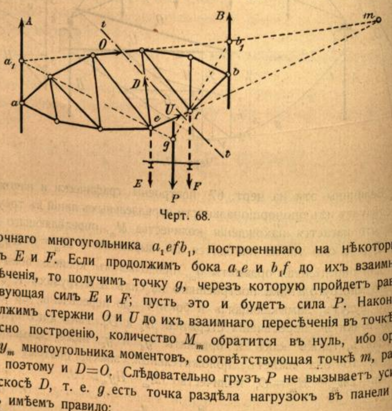
$$D_5 = \frac{M_m}{h_m} = H\frac{y_m}{h_m}. \tag{49 bis}$$

Если бы ордината y_m располагалась выше замыкающаго бока, то ее слѣдовало бы считать отрицательной и тогда усиліе D_5 было бы сжатіемъ.

*) Вслѣдствіе симметричности нагрузки, на чертежѣ построена лишь половина многоугольника моментовъ.

Наконецъ ордината y_m можетъ обратиться въ нуль и тогда $M_m = O$ и слѣдовательно $D_5 = O$. Отсюда можно вывести весьма интересное слѣдствіе.

Слѣдствіе. Положимъ задано построить многоугольникъ моментовъ, соотвѣтствующій такому расположенію нагрузки, при которой количество M_m обращается въ нуль, т. е. когда усиліе въ данномъ раскосѣ равно нулю; иначе говоря: найти точку раздѣла нагрузки въ данной панели. Пусть на черт. 68 требуется найти точку раздѣла нагрузки, соотвѣтствующую діагонали D, разсѣченной сѣченіемъ tt. Проводимъ линію a_1b_1, совпадающую съ верхнимъ стержнемъ, разсѣченнымъ сѣченіемъ tt и точки a_1, b_1, соединимъ съ узлами e и f, ограничивающими стержень U. Примемъ a_1b_1 за замыкающій бокъ



Черт. 68.

веревочнаго многоугольника a_1efb_1, построенннаго на нѣкоторыхъ силахъ E и F. Если продолжимъ бока a_1e и b_1f до ихъ взаимнаго пересѣченія, то получимъ точку g, черезъ которую пройдетъ равнодѣйствующая силъ E и F; пусть это и будетъ сила P. Наконецъ продолжимъ стержни O и U до ихъ взаимнаго пересѣченія въ точкѣ m. Согласно построенію, количество M_m обратится въ нуль, ибо ординатъ y_m многоугольника моментовъ, соотвѣтствующая точкѣ m, равна нулю, поэтому и $D=O$. Слѣдовательно грузъ P не вызываетъ усилія въ раскосѣ D, т. е. g есть точка раздѣла нагрузокъ въ панели ef. Итакъ имѣемъ правило:

Для нахожденія точки раздѣла нагрузки въ произвольной панели рѣшетчатой формы, слѣдуетъ продолжить разсѣченный стержень пояса, не несущаго грузы до пересѣченія съ вертикалями опоръ и черезъ полученныя точки пересѣченія и смежные узлы, ограничивающіе разсѣченный стержень пояса, несущаго грузы, провести линіи до ихъ взаимнаго пересѣченія. Полученная точка лежитъ на вертикали точки раздѣла нагрузки, для разсматриваемаго промежуточнаго стержня.

Вернемся снова къ уравненіямъ Риттера и вообразимъ ферму съ параллельными поясами. Пользуясь правиломъ Риттера для верхняго и нижняго пояса получимъ:

$$M_i + O_i h = 0 \; ; \; O_i = -\frac{M_i}{h};$$

$$M_i - U_i h = 0 \; ; \; U_i = \frac{M_i}{h}.$$

Желая примѣнить то-же правило для діагонали D_i мы найдемъ, что $M_n + D_i h_n = O$. Но такъ какъ точка n пересѣченія верхняго и нижняго поясовъ лежитъ въ безконечности, то и h_n, разстояніе точки n до діагонали D_i также $= \infty$, т. е. вопросъ становится неопредѣленнымъ; поэтому въ этомъ случаѣ приходится воспользоваться выраженіемъ для поперечныхъ силъ (см. стр. 79).

Какое бы сѣченіе мы ни проводили для опредѣленія усилій въ поясахъ фермы, мы всегда найдемъ выраженія вида (48), поэтому можно сказать, что: въ рѣшетчатой балочной фермѣ съ двумя опорами, верхній поясъ всегда сжатъ, а нижній всегда вытянутъ и что усиліе въ поясъ прямо пропорціонально изгибающему моменту относительно противолежащаго узла и обратно пропорціонально высотѣ фермы, что уже видѣли выше.

Что касается до нахожденія точки раздѣла нагрузки въ фермѣ съ параллельными поясами, то она можетъ быть опредѣлена, согласно только что изложенному правилу.

30. Способъ Кульмана.

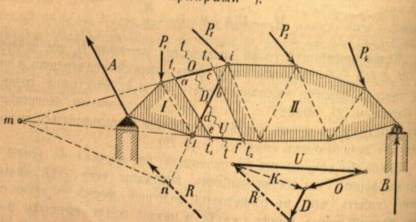
Всякіе три стержня фермы, направленія которыхъ пересѣкаются не меньше чѣмъ въ двухъ точкахъ, напр. стержни называемые нами вообще O, U и D, можно разсматривать, какъ стержни, соединяющіе два неизмѣняемыхъ тѣла, на которыя дѣйствуютъ внѣшнія силы. Проведемъ напр. сѣченіе tt отдѣляющее лѣвую часть фермы, черт. 69, отъ правой. Стержни O, D, U, разсѣченные такимъ сѣченіемъ удовлетворяютъ поставленному условію *) ибо имѣютъ три точки пересѣченія i, $i-1$ и m.

Проведемъ еще сѣченія t_1t_1 и t_2t_2. Всю часть лѣвѣе t_1t_1 будемъ разсматривать какъ отдѣльное тѣло I, рѣшетчатое или сплошное — безразлично, всю часть правѣе t_2t_2 также, какъ отдѣльное тѣло II.

*) Если-же сѣченіемъ выдѣлить узелъ, то поставленное условіе, что стержни соединяютъ два тѣла не выполняется ибо стержни пересѣкаются въ одной точкѣ и не служатъ соединеніемъ двухъ тѣлъ.

Въ точкахъ a, b, c, d, e и f, соединяющихъ концы стержней O, D и U съ частями I и II, предполагаются шарнирныя соединенія. Поставленное выше условіе о существованіи двухъ или трехъ точекъ пересѣченія направленій O, D и U, будетъ всегда удовлетворено, если только пересѣченные стержни не параллельны между собою.

Теперь точки пересѣченія i и $i+1$, а также точка m называются **воображаемыми шарнирами** *).



Черт. 69.

Усилія въ стержняхъ O, U и D опредѣляются весьма просто. Пусть равнодѣйствующія всѣхъ **внѣшнихъ** силъ, приложенныхъ къ части I будетъ R; тогда задача нахожденія усилія въ стержняхъ сводится къ опредѣленію равновѣсія четырехъ силъ O, U, D и R, направленія которыхъ извѣстны и величина одной изъ нихъ задана. Двѣ изъ названныхъ силъ напр. O и U соединимъ въ одну, которая пройдетъ черезъ точку ихъ пересѣченія m и пусть будетъ K; три силы R, K и D для равновѣсія должны пересѣкаться въ одной точкѣ и, такъ какъ сила R и направленія D заданы, то эта точка будетъ точка n, пересѣченіе силъ D и R; соединивъ точку m съ n, найдемъ направленіе силы K, а построивъ треугольникъ на силахъ R, K и D, найдемъ и величины искомой силы D и равнодѣйствующую K; остается разложить эту послѣднюю на составляющія O и U—и задача рѣшена. Теченіе стрѣлокъ—которое въ многоугольникѣ силъ должно быть непрерывнымъ—опредѣлитъ знакъ усилій O, U и D.

Въ частномъ случаѣ, когда силы, дѣйствующія лѣвѣе сѣченія, не имѣютъ равнодѣйствующей, а приводятся къ парѣ силъ, или точка m будетъ въ безконечности, усилія въ стержняхъ этимъ способомъ опредѣлены быть не могутъ. Дѣйствительно, если внѣшнія силы привелись къ парѣ силъ, то три силы O, U и D не могутъ уравновѣсить

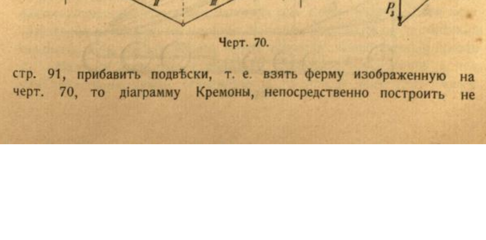
*) Шарнирами Фёппля—тожъ.

пары силъ; однако въ томъ случаѣ, если стержни O и U будутъ между собою параллельны, то усилія O и U образуютъ пару силъ съ моментомъ равнымъ разстоянію между ними, а усиліе въ стержнѣ D равно нулю. Отсюда усилія O и U найдутся легко изъ условія $Oh = M$, гдѣ M моментъ силъ лѣвѣе сѣченія, а h высота формы.

Указанный способъ рѣдко употребляется для опредѣленія усилія во всѣхъ стержняхъ фермы, такъ какъ для каждыхъ трехъ стержней необходимо опредѣлять силу R, измѣняющуюся и по величинѣ и по направленію, какъ при переходѣ отъ одного сѣченія къ другому, такъ и при перемѣщеніи нагрузки. Когда на ферму дѣйствуютъ грузы, то сила R есть ни что иное, какъ поперечная сила и задача становится уже проще, особенно когда имѣется построенный веревочный многоугольникъ. Наконецъ, при подвижной нагрузкѣ, когда опредѣляются усилія въ стержняхъ D, принимающія наибольшія усилія при загруженіи части фермы правѣе сѣченія, т. е. когда напр. нагружена часть II только что разсмотрѣнной системы, то сила R будетъ сопротивленіе опоры A, положеніе котораго извѣстно, и отысканіе точки m весьма легко, и слѣдовательно задача представляется чрезвычайно простою. Оба указанные случая мы и разсмотримъ.

Способъ Кульмана оказываетъ услуги при построеніи діаграммъ Кремоны, когда въ фермѣ имѣются узлы, въ которыхъ входятъ вновь болѣе двухъ неизвѣстныхъ усилій въ стержняхъ (**28**).

Напр. если въ стропильной фермѣ, на которую дѣйствуетъ **постоянная нагузка**, изслѣдованной помощью діаграммы Кремоны на



Черт. 70.

стр. 91, прибавить подвѣски, т. е. взять ферму изображенную на черт. 70, то діаграмму Кремоны, непосредственно построить не удастся, ибо какъ бы мы ни начинали построеніе діаграммы, мы подойдемъ къ узламъ 2, 3, 5, 7 и 8, въ которыхъ вновь входятъ болѣе двухъ неизвѣстныхъ усилій. Если будемъ знать усиліе въ затяжкѣ U, то построимъ равновѣсіе узла 3, а затѣмъ опредѣляются равновѣсія и дальнѣйшихъ узловъ.

Построимъ веревочный многоугольникъ. Лѣвѣе сѣченія tt дѣйствуютъ силы A и P_1; продолживъ бокъ II до пересѣченія съ замыкающей s, найдемъ точку, черезъ которую пройдетъ поперечная сила $S_a = A - P_1$, которую найдемъ изъ многоугольника силъ.

Опредѣлимъ точку m, пересѣченіе силы U, съ S_a и найденную точку соединимъ съ узломъ 5; получимъ $5-m$ направленіе равнодѣйствующую силъ O и D, которая пусть будетъ K. Эта сила очевидно замѣнитъ собою дѣйствіе правой части фермы на шарниръ 5. Построивъ треугольникъ на силахъ S_a, U, K, и разложивъ K на составляющія, параллельныя стержнямъ O и D, найдемъ усилія въ этихъ стержняхъ.

Теперь построеніе діаграммы Кремоны не представляетъ затрудненія: въ узлѣ 1, два вновь входящихъ стержня, въ 3 и 4 тоже два.

При подвижной нагрузкѣ, способомъ Кульмана удобно пользоваться, въ связи съ построеніемъ многоугольника опорныхъ сопротивленій— для опредѣленія усилій въ рѣшеткѣ, такъ какъ усилія въ промежуточныхъ стержняхъ пропорціональны поперечнымъ силамъ.

Пусть имѣемъ рѣшетчатую ферму, черт. 71, въ которой всѣ промежуточные стержни наклонны. Для опредѣленія усилія $\max D_i$ надо загрузить правую часть балки до узла i, если ѣзда поверху и до

Черт. 71.

$i-1$, если ѣзда понизу (чтобы получить $\max S = A$ въ панели i, $i-2$ въ первомъ случаѣ и въ панели $i-1$, $i-3$ во второмъ). — Предположимъ, что ѣзда поверху. Построивъ многоугольникъ опорныхъ сопротивленій, найдемъ наибольшую поперечную силу S_i равную опорному сопротивленію A_i.

Теперь, продолживъ стержень U_i до пересѣченія съ сопротивленіемъ опоры A_i, найдемъ точку m, черезъ которую должна пройти равнодѣйствующая силъ D_i и O_i, сила K; соединивъ точку m съ узломъ i, опредѣлимъ направленіе этой равнодѣйствующей, а изъ треугольника, построеннаго на силахъ A_i, U_i и K, найдемъ ея величину. Остается силу K въ треугольникѣ силъ разложить на составляющія, параллельныя стержнямъ O_i и D_i. Построивъ эти силы и снабдивъ многоугольникъ силъ $A_i\ O_i\ D_i\ U_i$ стрѣлками, указывающими общее теченіе, найдемъ силу D_i. Пользуясь тѣмъ-же треугольникомъ силъ, опредѣляемъ наибольшее усиліе въ стержнѣ D_{i-1}. Стержень D_{i-1} — вытянутъ, а D_i сжатъ. Такимъ образомъ построеніе величины A_i даетъ возможность тотчасъ-же найти наибольшія усилія для стержней рѣшетки, заключающихся въ данной панели.

§ 7.

Стропильныя фермы.

Для расчета стропильныхъ фермъ, главнымъ образомъ пользуются построеніемъ діаграммъ усилій, по способу Кремоны. Имѣя въ виду, что на стропильныя фермы, кромѣ грузовъ, могутъ дѣйствовать еще и наклонныя силы,— а также, что къ стропильнымъ фермамъ относятся и такія, у которыхъ расположеніе опоръ значительно отличается отъ разсмотрѣнныхъ до сихъ поръ фермъ — слѣдуетъ ознакомиться съ стропильными фермами нѣсколько подробнѣе.

31. Построеніе діаграммъ для вертикальныхъ силъ.

а. Обыкновенныя фермы.

Къ вертикальнымъ нагрузкамъ, дѣйствующимъ на ферму относится собственный вѣсъ стропильной фермы, вѣсъ поддерживаемаго фермою покрытія, временная нагрузка отъ снѣга. Нагрузка эта исчисляется обыкновенно на единицу площади горизонтальной проекціи покрытія, напр. въ кгр. на кв. метръ горизонтальной проекціи кровли.

Поэтому если напр. стропилами перекрывается пролетъ l, причемъ разстояніе между стропилами b, то полный вѣсъ поддерживаемаго стропилами покрытія будетъ pbl, если p есть вѣсъ покрытія на 1 кв. м. гор. проекціи. Разстояніе между стропилами b въ среднемъ принимается отъ 2 до 4 м. Величина p указана въ приложеніи. Собственный вѣсъ стропилъ g опредѣляется по эмпирическимъ формуламъ, дающимъ вѣсъ g, на погон. метръ пролета. Обыкновенно величина g составляетъ отъ 15 до 30 кгр./м.

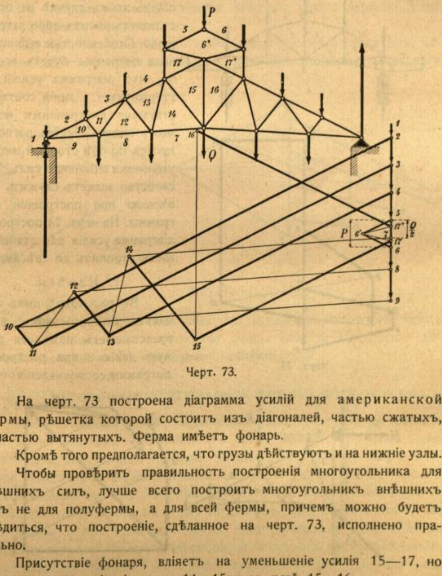
Что касается до величины нагрузки отъ дѣйствія снѣга, то ее принимаютъ равною для умѣреннаго климата въ 75 кгр. на кв. м. гор. проекціи покрытія и въ 100 кгр. на кв. м. горизонтальной проекціи покрытія, для болѣе суроваго климата, напр. сѣверной Россіи. По этимъ даннымъ опредѣляютъ нагрузку, дѣйствующую на каждый изъ узловъ фермы, предполагая что вся нагрузка передается верхнимъ узламъ стропильной фермы. Исключеніе представляетъ тотъ случай, когда стропильныя фермы кромѣ кровли удерживаютъ подвѣшенный потолокъ; тогда и собственный вѣсъ стропильной фермы можно распредѣлить, какъ на верхній, такъ и на нижній узлы. Если, какъ это обыкновенно и бываетъ — панели равны, то обозначая грузъ, дѣйствующій на промежуточные узлы черезъ P, найдемъ, что на крайніе узлы дѣйствуетъ грузъ $\frac{1}{2}P$.

Черт. 72.

Для расчета фермъ, обыкновенно изслѣдуютъ отдѣльно, вліяніе вертикальной нагрузки, а затѣмъ дѣйствіе вѣтра. При этомъ удобнѣе построить отдѣльную діаграмму для постоянной нагрузки, а другую для временной—т. е. при дѣйствіи снѣга, чтобы сравнить усилія, полученныя по этой діаграммѣ съ усиліями отъ вѣтра. Дальнѣйшія ука-

занія относительно построенія діаграммы при вертикальной нагрузкѣ излишни. На черт. 72, построена діаграмма усилій въ стержняхъ англійской стропильной фермы, причемъ принятъ способъ обозначенія Бау. Эта ферма состоитъ изъ стропильныхъ ногъ, затяжки и рѣшетки изъ діагоналей и вертикалей. Когда вершины діагоналей каждой полуфермы уклонены къ середины, то ферма называется Англійской фермой съ вытянутыми діагоналями, когда же діагонали наклонены вершинами къ опорамъ, то получаются сжатыя діагонали.

Сжатіе на діаграммѣ обозначено толстыми линіями.



Черт. 73.

На черт. 73 построена діаграмма усилій для американской фермы, рѣшетка которой состоитъ изъ діагоналей, частью сжатыхъ, а частью вытянутыхъ. Ферма имѣетъ фонарь.

Кромѣ того предполагается, что грузы дѣйствуютъ и на нижніе узлы.

Чтобы провѣрить правильность построенія многоугольника для внѣшнихъ силъ, лучше всего построить многоугольникъ внѣшнихъ силъ не для полуфермы, а для всей фермы, причемъ можно будетъ убѣдиться, что построеніе, сдѣланное на черт. 73, исполнено правильно.

Присутствіе фонаря, вліяетъ на уменьшеніе усилія 15—17, но увеличиваетъ усиліе діагонали 14—15 и въ тягѣ 15—16.

Представленная выше на черт. 70 ферма есть основная фигура фермы Полонсо. Если каждая полуферма, соединенная затяжкой, состоитъ изъ болѣе сложной рѣшетки, то появляются узлы съ пересѣченіемъ четырехъ—пяти стержней и такую систему нельзя изслѣдовать, пользуясь діаграммой Кремоны, безъ пособія дополнительныхъ построеній. Такой случай разсмотрѣнъ былъ уже выше въ № **30**.

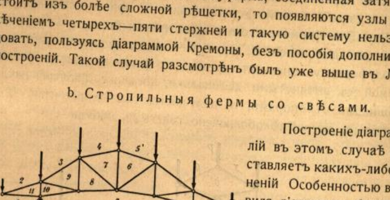
b. Стропильныя фермы со свѣсами.

Построеніе діаграммъ усилій въ этомъ случаѣ не представляетъ какихъ-либо затрудненій Особенностью внѣшняго вида діаграммы будетъ всегда то, что діаграмма усилій въ стержняхъ, т. е линіи, соотвѣтствующія внутреннимъ искомымъ силамъ, всегда располагаются по обѣ стороны многоугольника внѣшнихъ силъ. Это свойство можетъ служить повѣркою при построеніи діаграммы. На черт. 74 построена діаграмма усилія для станціонныхъ стропилъ со свѣсами.

Черт. 74.

c. Навѣсы.

Въ разсмотрѣнныхъ случаяхъ многоугольникъ силъ представляетъ изъ себя прямую линію и при построеніи діаграммы, сопротивленія опоръ

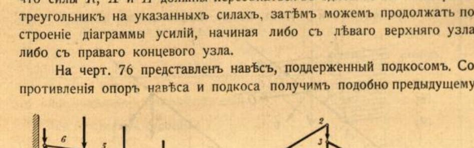


Черт. 75.

опредѣляются сами собою. Но когда приходится имѣть дѣло съ навѣсами, тогда сопротивленіе опоръ наклонно, или въ частномъ случаѣ одной изъ нихъ горизонтально, и для построенія діаграммы, необходимо предварительно построить треугольникъ изъ трехъ силъ: равнодѣйствующей грузовъ и сопротивленіе каждой изъ опоръ.

На черт. 75 представленъ навѣсъ, въ которомъ верхній узелъ задѣланъ въ стѣну. Сопротивленіе опоры A опредѣляется изъ условія, что силы R, A и H должны пересѣкаться въ одной точкѣ. Построивъ треугольникъ на указанныхъ силахъ, затѣмъ можемъ продолжать построеніе діаграммы усилій, начиная либо съ лѣваго верхняго узла, либо съ праваго концевого узла.

На черт. 76 представленъ навѣсъ, поддержанный подкосомъ. Сопротивленія опоръ навѣса и подкоса получимъ подобно предыдущему,



Черт. 76.

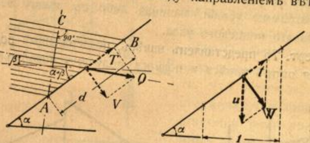
опредѣливъ точку пересѣченія равнодѣйствующей съ подкосомъ; черезъ эту точку пройдетъ сопротивленіе опоры навѣса. Построеніе діаграммы удобнѣе начать съ праваго крайняго узла.

32. Построеніе діаграммъ усилій отъ вѣтра.

Для нахожденія усилій, вызываемыхъ дѣйствіемъ вѣтра, опредѣляютъ составляющія, нормальныя къ скату кровли и по нимъ получаютъ силы, дѣйствующія на узлы. Затѣмъ сопротивленія опоръ находятся, по сложеніи нормальныхъ составляющихъ помощью веревочнаго многоугольника въ одну равнодѣйствующую, способомъ, указаннымъ въ № **25**. Діаграмму усилій въ этомъ случаѣ уже приходится строить для всей фермы, и при томъ при двухъ предположеніяхъ: при дѣйствіи вѣтра со стороны неподвижной опоры, и со стороны подвижной опоры, такъ какъ въ каждомъ изъ этихъ случаевъ получаются различныя значенія для сопротивленія опоръ. Иногда впрочемъ—для ускоренія расчета, опредѣляютъ не нормальныя къ скату, а вертикальныя составляющія, тогда можно воспользоваться уже построенной діаграммой усилія для вертикальныхъ силъ, измѣнивъ соотвѣтственнымъ образомъ масштабъ. Такой способъ расчета допустимъ однако лишь при пологихъ кровляхъ.

Нормальныя или вертикальныя составляющія давленій вѣтра опредѣляются слѣдующимъ образомъ.

Пусть W_0 есть давленіе вѣтра на квадратную единицу плоскости, нормальной къ направленію вѣтра, α уголъ, образуемый направленіемъ ската съ горизонтомъ и β уголъ между направленіемъ вѣтра и гори-



Черт. 77.

зонтомъ; разсмотримъ величину давленія на участокъ $AB = d$ ската кровли, при разстояніи между стропилами b. На участокъ bd давитъ призма вѣтра, съ сѣченіемъ, нормальнымъ къ вѣтру AC; полное давленіе вѣтра будетъ:

$$Q = W_0 b d \sin(\alpha + \beta).$$

Силу Q разложимъ на составляющія V, нормальную къ скату кровли и T параллельную этому скату; послѣдней можно пренебречь ввиду того, что треніе вѣтра о скатъ кровли ничтожно. Величина нормальной составляющей будетъ:

$$V = Q \,.\, \sin(\alpha + \beta) = W_0 b\, d \sin(\alpha + \beta)^2.$$

Величину нормальной составляющей исчисляютъ обыкновенно на кв. единицу площади ската; обозначимъ эту величину черезъ W, тогда

$$W = \frac{V}{bd} = W_0 \sin(\alpha + \beta)^2 \,. \qquad (50)$$

Если же желаемъ разсматривать лишь вертикальную составляющую, то разлагая силу W на вертикальную и параллельную скату составляющія, пренебрегая второю, и называя первую черезъ u, найдемъ

$$u = \frac{W}{\cos\alpha}\,,$$

причемъ u будетъ вертикальное давленіе на кв. единицу поверхности ската. Но такъ какъ остальная вертикальная нагрузка опредѣляется, согласно вышеизложенному, на кв. единицу горизонтальной проекціи кровли, то и вертикальную составляющую давленія вѣтра

удобнѣе также считать на кв. единицу площади горизонтальной проекціи кровли, тогда найдемъ.

$$W = \frac{u}{\cos\alpha} = \frac{W}{\cos\alpha^2} \,. \qquad (51)$$

Величины W_0, и β опредѣляются опытнымъ путемъ, причемъ можно положить:

Давленіе вѣтра на кв. метръ плоскости, нормальной къ направленію вѣтра.

Наименованіе строеній.	W_0	
	Суровый климатъ.	Средній климатъ.
Для отдѣльно стоящихъ строеній . . .	180	150
Для городскихъ строеній	150	120

Что касается до угла β, то до сихъ поръ онъ полагался равнымъ 10^0, но послѣдніе опыты Лиліенталя показываютъ что $\beta^0 = 3^0$, и если не смотря на это, нѣкоторые инженеры все-таки берутъ 10^0, то руководствуясь только тѣмъ, что это дастъ больше значеніе для W.

Однако опытныя данныя и нѣкоторые теоретическія изслѣдованія не подтверждаютъ правильности формулы (50) и показываютъ, что давленіе вѣтра пропорціонально не второй, а первой степени угла $(\alpha + \beta)$, *). Такъ какъ при этомъ получается большее значеніе для W, то при расчетахъ слѣдуетъ принимать значеніе $\sin(\alpha + \beta)$, причемъ уже возможно принять во вниманіе и опыты Лиліенталя. Въ такомъ случаѣ получаемъ окончательную формулу:

$$\boxed{W = W_0 \sin(\alpha^0 + 3^0)} \qquad (52)$$

Неправильность формулы $W = W_0 \sin(\alpha + \beta)^2$ происходитъ вслѣдствіи неправильной постановки вопроса при ея выводѣ. На кровлю дѣйствуетъ не струя воздуха AC а цѣлый потокъ, распространяющійся на всю навѣтренную часть кровли. При разложеніи силы Q на составляющія T и V, первою изъ нихъ нельзя пренебрегать, такъ какъ вышележащія слои воздуха препятствуютъ обтеканію потока вдоль наклона кровли; это сопротивленіе даетъ нѣкоторую составляющую увеличивающую силу W. Формула (52) даетъ результаты хорошо совпадающіе съ опытными изслѣдованіями.

Въ этомъ отношеніи интересно упомянуть объ опытахъ Ирмингера, произведенныхъ въ 1894 году въ Копенгагенѣ. Ирмингеръ испы-

*) По этому вопросу существуетъ довольно обширная техническая литература. Centr-bl. d Bauverwaltung 1884, 1885, 1898 г. Zeitschr. d. Oest. Ing. 1881 — 82. Handbuch d. Arch. I. Band. Heft 2. 1899.

тывалъ величину давленія вѣтра на тѣла различной формы. Для измѣренія величины давленія, поверхности испытуемыхъ тѣлъ были снабжены, какъ съ навѣтренной, такъ и съ подвѣтренной сторонъ мелкими отверстіями, снабженными внутри тѣла трубочками съ водою, оканчивающимися вертикальнымъ колѣномъ. По высотѣ столба воды въ колѣнѣ, можно было судить о величинѣ давленія на единицу площади.

Если обозначить площадь сѣченія тѣла, нормальную къ направленію вѣтра черезъ F, то полное давленіе вѣтра на тѣло будетъ:

$$\boxed{\sum W = \mu F W_0,} \qquad (53)$$

причемъ μ есть отвлеченный коэффиціентъ.

Весьма интереснымъ оказалось то обстоятельство, что полная величина давленія вѣтра слагается изъ сгущенія воздуха съ навѣтренной и разрѣженія съ подвѣтренной стороны тѣла. Этимъ и объясняется неудовлетворительность предположеній, положенныхъ въ основу формулы (50). Въ нѣкоторыхъ случаяхъ величина разрѣженія составляетъ до 77% отъ полной разности давленія на тѣло, подверженное давленію вѣтра.

Формулою (53) весьма удобно пользоваться при опредѣленіи давленія вѣтра на отдѣльно стоящіе предметы. Для опредѣленія же давленія на кровлю, всего проще пользоваться формулою (52), которая дастъ результаты близкія къ опытамъ Ирмингера.

Въ приложеніи помѣщены численные значенія въ формулѣ (52) и къ опытнымъ даннымъ Ирмингера для пользованія формулою (53).

На чертежѣ 78 построена діаграмма усилій отъ вѣтра для американской фермы. Усилія въ рѣшеткѣ съ подвѣтренной стороны равны нулю. (Послѣднее всегда имѣетъ мѣсто при прямолинейныхъ стропильныхъ ногахъ).

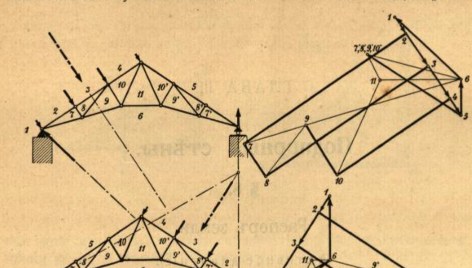
Если верхніе узлы не расположены на прямой, величину составляющихъ давленій отъ вѣтра по узламъ всего лучше опредѣлить графически, какъ то указано на черт. 79.

Сначала опредѣляемъ давленіе на каждую наклонную плоскость кровли между двумя узлами; для этого можно воспользоваться, составленными по формулѣ 52 въ приложеніи, таблицами и помножить приведенную въ таблицѣ цифру, соотвѣтствующую данному наклону ската на его длину d и на разстояніи между фермами b, т. е.

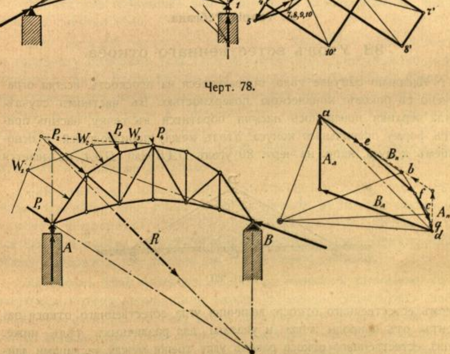
$$W_1 = W b \, . \, d_1 ; \quad W_2 = W bd_2 \text{ и } W_3 = W bd_3 .$$

На данныхъ силахъ строимъ многоугольникъ силъ $abcd$ и, выбравъ произвольный полюсъ. соединяемъ силы W_1, W_2 и W_3 помощью веревочнаго многоугольника; найдя равнодѣйствующую R, сейчасъ же узнаемъ и сопротивленія опоръ $A_л$ и $B_л$, когда вѣтеръ дѣйствуетъ

слѣва и $A_п$ и $B_п$, когда вѣтеръ справа. Если теперь подѣлимъ пополамъ бока многоугольника силъ $abcd$ и точки дѣленія e, f и g соединимъ между собою, то получимъ узловыя силы $P_1 = ae$, $P_2 = ef$ и $P_3 = gd$. Затѣмъ остается построить по извѣстнымъ правиламъ діаграмму усилій по Кремону.



Черт. 78.



Черт. 79.

ГЛАВА III.

Подпорныя стѣны.

§ 8.

Распоръ земли.

(Активное давленіе).

А. Теорія Ребгана.

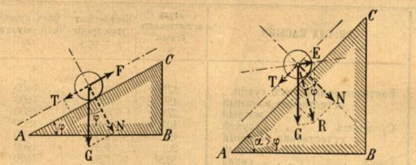
33. Уголъ естественнаго откоса.

Идеально сыпучее тѣло, опирающееся на плоскость, всегда ограничено съ боковъ коническою поверхностью. Въ частномъ случаѣ, когда верхняя поверхнось насыпи обратится въ точку, насыпь приметъ форму правильнаго конуса. Уголъ между производящей и основаніемъ конуса, напр. на черт. 80 уголъ DAB или DBA, называется

Черт. 80.

угломъ естественнаго откоса; величина угла естественнаго откоса зависитъ отъ природы тѣла и указана для различныхъ тѣлъ ниже. Уголъ естественнаго откоса равенъ углу тренія между частицами даннаго тѣла. Дѣйствительно, изъ условія равновѣсія тѣла на наклонной плоскости, извѣстно, что частица G, черт. 81, побуждаемая къ скольженію, или перекатыванію на плоскости AB, составляющею T, останется еще неподвижною при такомъ наибольшемъ значеніи угла наклоненія, когда его величина, равная углу отклоненія силы G отъ нормали къ плоскости, приметъ значеніе $\alpha = \varphi$, гдѣ φ есть уголъ тренія. Если уголъ $\alpha > \varphi$,

то для удержанія въ равновѣсіи скатывающихся частицъ необходимо приложить къ каждой изъ нихъ силу E такую, чтобы равнодѣйствую-



Черт. 81.

щая этой силы и вѣса частицы составляла съ нормалью къ плоскости откоса уголъ, не большій угла тренія φ.

Въ статикѣ сооруженій земляной грунтъ разсматривается, какъ идеально сыпучее тѣло.

Для удержанія земляныхъ насыпей въ равновѣсіи подъ угломъ къ горизонту большимъ угла естественнаго откоса, сооружаются подпорныя стѣны. Равнодѣйствующая давленій, испытываемыхъ подпорною стѣнкою отъ частицъ насыпи называется распоромъ земли. Его будемъ называть буквою E_1. Кромѣ того подпорная стѣнка можетъ испытывать давленіе отъ нагрузки, расположенной на насыпи за стѣнкою; такое усиліе, передаваемое стѣнѣ, будемъ называть просто давленіемъ и изображать буквою E_2.

Изъ только что изложеннаго слѣдуетъ прежде всего, что, независимо отъ начертанія стѣны и формы насыпи, величина распора зависитъ непосредственно отъ природы насыпи, именно отъ вѣса единицы объема ея и отъ угла естественнаго откоса. Прилагаемая таблица содержитъ эти данныя для главнѣйшихъ случаевъ.

На самомъ дѣлѣ матеріалъ насыпи не обладаетъ идеальною сыпучестью и потому кромѣ тренія между частицами существуютъ еще сцѣпленіе и слипаніе. Поэтому уголъ естественнаго откоса всегда нѣсколько больше угла тренія, и значитъ распоръ земли на подпорную стѣнку меньше теоретическаго. Однако величины сцѣпленія и слипанія, какъ весьма измѣнчивыя, даже въ одномъ и томъ-же сооруженіи, не могутъ быть принимаемы во вниманіе, а получающаяся отъ этого разница въ величинѣ распора, лишь увеличиваетъ запасъ устойчивости сооруженія.

Таблица угловъ естественнаго откоса, коэффиціентовъ тренія и вѣса единицы объема разныхъ грунтовъ *)

ПРИРОДА НАСЫПИ.	Уголъ естественнаго откоса φ	Коэффиціентъ угла тренія $f = \operatorname{tg} \varphi$	Вѣсъ кубическаго метра въ кгр
Растительный грунтъ сухой .	37°	0,75	1400
естественно влажный	45°	1,00	1600
мокрый	27°	0.50	1800
Суглинокъ . . . . . . сухой	40°	0,84	1500
естественно влажный	45°	1,00	1700
мокрый	20°	0,36	1900
Глина. . . . . сухая	38,5°	0,80	1600
влажная	50°	1,20	1700
мокрая	17°	0,30	2000
Песокъ. . . . . сухой	35°	0,70	1600
сырой	42°	0,90	1700
насыщенный водой	24°	0,45	1900
Гравій (галька) угловатый	45°	1,00	1800
круглый	38,5°	0,80	1700

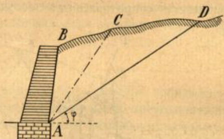
34. Плоскость скольженія.

Пусть чертежъ 82 представляетъ разрѣзъ насыпи, нормальный къ внутренней поверхности стѣны. Для изслѣдованія выдѣлимъ двумя вертикальными плоскостями участокъ въ единицу длины, считая по направленію протяженія стѣны и данный разрѣзъ будемъ разсматривать, какъ разрѣзъ по плоскости симметріи выдѣленнаго участка. Предполагается, что стѣна, поддерживающая насыпь, имѣетъ неограниченное протяженіе; насыпь состоитъ изъ однороднаго вещества. При такихъ условіяхъ, всякая плоскость, нормальная къ внутренней поверхности стѣны есть плоскость симметріи.

Всѣ силы, дѣйствующія на выдѣленный двумя вертикальными плоскостями элементъ, мы можемъ замѣнить равнодѣйствующими, расположенными въ плоскости симметріи, т. е. въ плоскости чертежа. Условія равновѣсія, составленныя для разсматриваемаго участка насыпи будутъ условіями равновѣсія всей насыпи.

Подпорная стѣнка поддерживаетъ откосъ насыпи по линіи AB, препятствуя ему принять положеніе, параллельное AD. При малѣйшемъ отодвиганіи стѣнки влѣво, произойдетъ сдвиженіе частицъ насыпи. Въ теоріи подпорныхъ стѣнокъ предполагается, что при этомъ отдѣлится часть призмы BCA *), такъ, что сдвиженіе произойдетъ по нѣкоторой **плоскости**, какъ то показано на черт. 82 пунктиромъ. Плоскость эта называется плоскостью скольженія. Если положеніе этой плоскости извѣстно, то слѣдовательно извѣстна величина и вѣсъ призмы обрушенія BCA, и уголъ наклонной плоскости, по которой эта призма стремится скользить, при малѣйшемъ отодвиганіи стѣны, т. е. будутъ всѣ данныя, чтобы изслѣдовать силы въ предѣльный моментъ равновѣсія системы.

*) Углы даны въ этой таблицѣ лишь какъ среднія величины, а коэффиціенты тренія и вѣса округлены. Точность въ данномъ случаѣ излишня, такъ какъ истинное значеніе указанныхъ величинъ можетъ быть установлено въ каждомъ частномъ случаѣ лишь путемъ опыта.



Черт. 82.

Въ дальнѣйшемъ вопросъ изслѣдованъ преимущественно графическимъ путемъ, по способу Ребгана.

Пусть, на черт. 83, AB есть задняя плоскость подпорной стѣнки, поддерживающей насыпь, ограниченную произвольной поверхностью BD. Линія AD, составляющая съ горизонтомъ уголъ тренія φ показываетъ направленіе естественнаго откоса. Предположимъ, что положеніе плоскости скольженія извѣстно и она на черт. 83 изображается линіею AC. Разсмотримъ условія равновѣсія призмы обрушенія ABC. На призму дѣйствуютъ слѣдующія силы:

1, вѣсъ призмы G, равный γ. пл. ABC, гдѣ γ есть вѣсъ единицы объема насыпи;

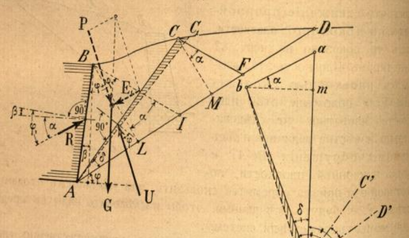
2, сопротивленіе плоскостей AB и AC;

3, силы тренія призмы о подпорную стѣну и о плоскость обрушенія.

Вѣсъ призмы G проходитъ чрезъ центръ тяжести призмы обрушенія. Сопротивленія плоскостей AB и AC, изображающіяся силами R и U, нормальныя въ случаѣ отсутствія тренія, въ присутствіи послѣдняго, въ предѣльный моментъ равновѣсія, отклоняются отъ нормалей въ стороны скольженія (т. е. внизъ) на углы тренія φ_1 и φ. Три силы G, R и U, по условію равновѣсія, должны пересѣкаться въ одной точкѣ и образовать сомкнутый треугольникъ; пусть это будетъ $\triangle\ abc$. Разложимъ силу G на составляющія E_1 и P, образующія съ нормалями къ AB и AC углы φ_1 и φ, отложенные въ сторону обратную скольженію призмы. Составляющая E_1 есть распоръ

*) Въ послѣдующемъ будемъ опускать множитель 1, изображающій высоту призмы (по направленію протяженія стѣны).

земли, уравновѣшивающійся сопротивленіемъ стѣнки R; составляющая P есть равнодѣйствующая давленій призмы обрушенія на насыпь и уравновѣшивается сопротивленіемъ послѣдней U.



Черт. 83.

Предположимъ, что той-же величинѣ распора соотвѣтствуетъ плоскость скольженія AC_1, безконечно близкая къ плоскости AC и отличающаяся отъ нея на безконечно малый уголъ $d\varphi$; тогда вѣсъ призмы будетъ $G_1 = G + dG$, гдѣ $dG = \gamma$ пл. ACC_1 и сопротивленіе опоры неподвижной насыпи измѣнится, какъ по величинѣ, такъ и по направленію. Условіе равновѣсія новой призмы можетъ быть выражено треугольникомъ силъ abc_1.

Имѣемъ:

$$\frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } \Delta\, ACC_1} = \frac{ac}{cc_1};$$

точно также по равенству высотъ

$$\frac{\text{пл. } \Delta\, abc}{\text{пл. } \Delta\, bcc_1} = \frac{ac}{cc_1};$$

слѣдовательно можно составить пропорцію:

$$\frac{\text{пл. } ABC}{\text{пл. } \Delta\, abc} = \frac{\text{пл. } \Delta\, ACC_1}{\text{пл. } \Delta\, bcc_1}. \tag{54}$$

Пусть поверхность BD такова, что при безконечной малости угла $d\varphi$ стороны AC и AC_1 отличаются между собою также на ве-

*) Если плоскость AC будетъ касательною къ поверхности насыпи, то послѣднее не имѣетъ мѣста.

личину, безконечно малую *). Въ треугольникѣ bcc_1 стороны bc и bc_1 тоже отличаются на безконечно малую величину. Значитъ въ треугольникахъ ACC_1 и bcc_1 между конечными сторонами заключены безконечно малые углы. При такихъ условіяхъ, если выберемъ такой масштабъ, что

$$AC = bc,$$

то и разность между AC_1 и bc_1 можетъ быть сдѣлана произвольно малою, а слѣдовательно разность между площадями треугольниковъ ACC_1 и bcc_1, имѣющихъ равные углы $d\varphi$ и заключающія ихъ стороны, будетъ безконечно малою порядка высшаго (какъ площадь треугольника съ безконечно малыми сторонами), которымъ въ присутствіи б. м. низшаго порядка мы вправѣ пренебрегать; стало быть площади ACC_1 и bcc_1 въ предѣлѣ будутъ равномѣрны. Итакъ въ предѣльномъ положеніи плоскости скольженія AC_1, т. е. когда AC_1 сольется съ AC, отношеніе (54) обращается въ единицу, т. е. имѣетъ мѣсто равенство:

$$\text{пл. } ABC = \text{пл. } \Delta\, abc\,. \tag{55}$$

Для опредѣленія плоскости скольженія, строимъ вспомогательный треугольникъ ACF, для чего проводимъ CF такъ, чтобы $\angle FCA = \angle abc$. Проведя изъ точки c линіи cC' и cD', параллельныя плоскостямъ скольженія и естественнаго откоса, изъ чертежа найдемъ, что по построенію $\angle acD' = 90 - \varphi$ и $\angle bcC' = 90 - \varphi$, (ибо $bc \parallel U$), слѣдовательно

$$\angle C'cD' = \angle CAD = \angle bca = \delta,$$

а тогда имѣемъ:

$$\Delta\, CAF = \Delta\, bca\,.$$

Отсюда слѣдуетъ согласно (55), что

$$\text{пл. } ABC = \text{пл. } \Delta\, ACF\,. \tag{56}$$

Это есть первая теорема Ребгана.

Назовемъ отрѣзокъ CF — базою, тогда доказанная теорема прочитается такъ: плоскость скольженія дѣлитъ пополамъ призму, заключенную между подпорной стѣнкой, поверхностью насыпи, базою и плоскостью естественнаго откоса.

Такимъ образомъ остается построить базу. Изъ вершины B подпорной стѣнки проводимъ линію $BI \parallel CF$. Линія BI, параллельная базѣ, называется направляющей. Опредѣлимъ уголъ, составляемый направляющей съ плоскостью стѣнки. Изъ точки B опустимъ вертикаль и изъ точекъ B и C перпендикуляры на плоскость естественнаго откоса. Черезъ вершину b въ $\triangle\, abc$ проведемъ горизонталь. Назовемъ уголъ, образуемый силой R съ горизонтомъ черезъ α и уголъ между стѣнкою и вертикалью черезъ β. Тогда

$$\varphi_1 = \alpha + \beta ; \ \angle abm = \alpha;$$

уголъ между вертикалью и линіею $BL = \angle \varphi$; $\angle IBL = \angle \alpha$, слѣдовательно уголъ между направляющею BI и стѣнкою,

$$\angle ABI = \varphi_1 + \varphi .$$

Обыкновенно принимается, что углы тренія φ_1 и φ равны между собою, такъ какъ между подпорною стѣнкою и насыпью заключается слой частицъ, прилипшихъ къ матеріалу стѣнки и такимъ образомъ треніе происходитъ не между стѣнкою и насыпью, а между частицами земли. Такимъ образомъ направляющую проводятъ подъ угломъ 2φ къ плоскости стѣнки.

Въ случаѣ **плоской поверхности насыпи**, выведемъ слѣдующія соотношенія.

Проведемъ $FL \parallel AC$, тогда найдемъ:

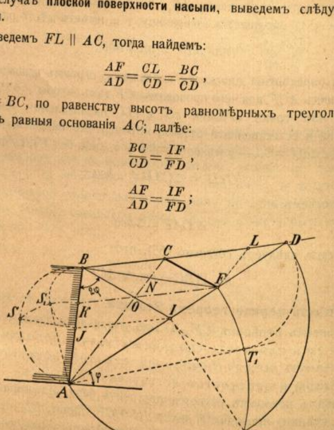
$$\frac{AF}{AD} = \frac{CL}{CD} = \frac{BC}{CD},$$

ибо $CL = BC$, по равенству высотъ равномѣрныхъ треугольниковъ, имѣющихъ равныя основанія AC; далѣе:

$$\frac{BC}{CD} = \frac{IF}{FD},$$

т. е.

$$\frac{AF}{AD} = \frac{IF}{FD},$$



Черт. 84.

но

$$IF = AF - AI \text{ и } FD = AD - AF .$$

Слѣдовательно

$$AF(AD - AF) = AD(AF - AI),$$

откуда

$$AF^2 = AD\, AI . \tag{57}$$

Это значитъ, что отрѣзокъ линіи естественнаго откоса отъ подошвы стѣны до базы есть среднее геометрическое между отрѣзкомъ, отсѣкаемымъ отъ линіи естественнаго откоса направляющей и всею длиною линіи естественнаго откоса.

На основаніи доказаннаго, плоскость скольженія строится слѣдующимъ образомъ, черт. 84.

Проводятся линіи: естественнаго откоса и направляющая. На линіи естественнаго откоса строимъ полукругъ; изъ точки I, пересѣченія направляющей съ линіей естественнаго откоса возстановляемъ перпендикуляръ IT, до пересѣченія съ построенной окружностью въ точкѣ T; принявъ разстояніе между подошвою стѣны и найденною точкою T за радіусъ,—при центрѣ въ подошвѣ стѣны, засѣкаемъ на линіи естественнаго откоса точку F. Остается изъ F провести линію, параллельную направляющей, и вершину C полученной базы соединить съ подошвою стѣны—получимъ искомую плоскость скольженія.

Можно полукружность построить и на отрѣзкѣ ID и воспользоваться построеніемъ, указаннымъ пунктиромъ.

Если поверхность насыпи и плоскость скольженія пересѣкаются подъ очень острымъ угломъ, или точка ихъ пересѣченія лежитъ внѣ чертежа, то строятъ полукругъ на линіи стѣнки, какъ указано на черт. 84, опредѣляя точку J, проведеніемъ $JI \parallel BD$.

Если требуется только опредѣлить плоскость скольженія и нѣтъ надобности въ дальнѣйшихъ построеніяхъ, то можно и не строить базы, а найдя точку F, соединить ее съ вершиною стѣнки и прочерченный отрѣзокъ раздѣлить пополамъ. (Это же рекомендуется дѣлать для повѣрки графической точности построенія). Черезъ эту точку дѣленія N пройдетъ плоскость скольженія. Это ясно изъ равенства подобныхъ $\Delta BNO = \Delta FNC$, въ которыхъ $BO = CF$.

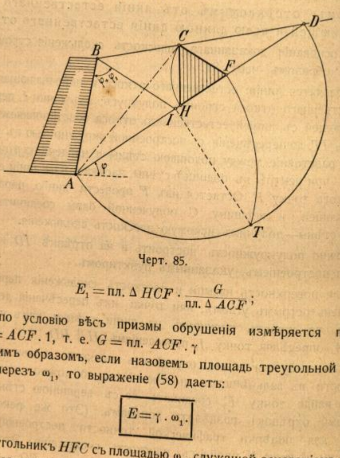
35. Треугольникъ давленія.

Построимъ на базѣ равносторонній треугольникъ, причемъ $CF = HF$, какъ показано на черт. 85. Площади треугольниковъ $\Delta\, ACF$ и $\Delta\, HCF$, имѣющихъ равныя основанія, пропорціональны ихъ высотамъ; а такъ какъ одинъ изъ боковъ ихъ совпадаетъ, то площади пропорціональны этимъ бокамъ, т. е.

$$\frac{\text{пл. } \Delta ACF}{\text{пл. } \Delta HCF} = \frac{AF}{HF}.$$

Сравнивъ же съ треугольникомъ силъ abc (черт. 83) и припомнивъ, что $HF = CF$, —

$$\frac{\text{пл. } \Delta ACF}{\text{пл. } \Delta HFC} = \frac{G}{E_1},$$



Черт. 85.

откуда

$$E_1 = \text{пл. } \Delta HCF \cdot \frac{G}{\text{пл. } \Delta ACF}; \qquad (58)$$

но по условію вѣсъ призмы обрушенія измѣряется призмою $ABC.1 = ACF.1$, т. е. $G =$ пл. $ACF.\gamma$

Такимъ образомъ, если назовемъ площадь треугольной призмы $HCF.1$ черезъ ω_1, то выраженіе (58) даетъ:

$$\boxed{E = \gamma \cdot \omega_1.} \qquad (59)$$

Треугольникъ HFC съ площадью ω_1, служащей основаніемъ призмы $HCF.1$ называется треугольникомъ давленія.

Слѣдовательно: величина распора земли на подпорную стѣнку равна произведенію изъ вѣса единицы объема насыпи на площадь треугольника давленія.

Это есть вторая теорема Ребгана.

Построеніе плоскости скольженія и треугольника давленія опредѣляетъ лишь величину распора. Извѣстнымъ также является и направленіе распора.

Изъ построенія плоскости скольженія видно, что ея положеніе зависитъ отъ величины угловъ тренія и отъ начертанія поверхности насыпи и стѣнки *); поэтому, еслибы пожелали найти аналитическое выраженіе для величины распора, то необходимо ввести ограниченія относительно очертанія стѣнки и насыпи.

36. Распредѣленіе распора на стѣнку.

Опредѣленіе величины распора, какъ суммы давленій частицъ насыпи на стѣнку, еще не даетъ намъ всѣхъ данныхъ для опредѣленія устойчивости сооруженія, такъ какъ неизвѣстна точка приложенія этой равнодѣйствующей. Затѣмъ ввиду того, что стѣна не составляетъ сплошнаго тѣла, а состоитъ изъ отдѣльныхъ частей (слоевъ), необходимо знаніе величины давленія въ каждой точкѣ ея. Такимъ образомъ необходимо изслѣдованіе составляющихъ, уже найденной по величинѣ равнодѣйствующей. Иначе говоря, надо опредѣлить законъ измѣненія величины распора, взависимости отъ глубины погруженія подошвы стѣны подъ поверхностью насыпи. Для этого, какъ выше указано, необходимо ввести въ предыдущее изслѣдованіе ограниченіе: опредѣлить очертаніе поверхности насыпи и стѣнки.

Примемъ, что **поверхности насыпи и стѣнки суть плоскости**. Выберемъ произвольную точку A_1, въ разстояніи x отъ вершины стѣнки и построимъ для этой точки, а также для подошвы A, плоскости скольженія; докажемъ лемму:

при прямолинейномъ очертаніи стѣнки и насыпи линіи скольженія, построенныя для любой части стѣнки, параллельны между собою:

Имѣемъ, по параллельности сторонъ, черт. 86.

$$\Delta CFD \backsim \Delta C_1F_1D_1,$$

откуда

$$\frac{CF}{C_1F_1} = \frac{FD}{F_1D_1}.$$

Затѣмъ изъ подобія

$$\Delta ABD \backsim \Delta A_1B_1D \text{ и } \Delta ABI \backsim A_1BI_1\text{**}).$$

$$\frac{AB}{A_1B} = \frac{AD}{A_1D_1} = \frac{AI}{A_1I_1};$$

далѣе

$$\frac{AF}{A_1F_1} = \frac{AI}{A_1I_1};$$

*) Послѣднее непосредственно вліяетъ на положеніе направляющей.

**) На черт. 86 точка I_1 случайно почти совпадаетъ съ точкою H_1 и обозначена этою буквою.

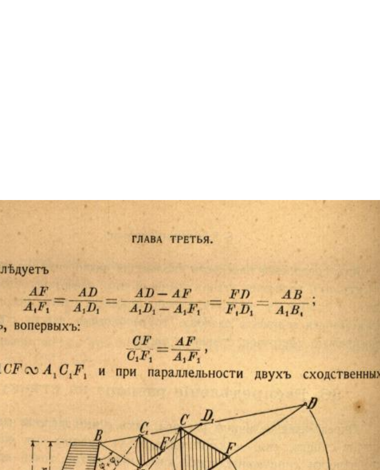
отсюда слѣдуетъ

$$\frac{AF}{A_1F_1}=\frac{AD}{A_1D_1}=\frac{AD-AF}{A_1D_1-A_1F_1}=\frac{FD}{F_1D_1}=\frac{AB}{A_1B_1};$$

наконецъ, вопервыхъ:

$$\frac{CF}{C_1F_1}=\frac{AF}{A_1F_1},$$

т. е. $\Delta ACF \backsim A_1C_1F_1$ и при параллельности двухъ сходственныхъ



Черт. 86.

сторонъ и третьи стороны должны быть между собою параллельны, т. е.

$$AC \parallel A_1C_1,$$

и лемма доказана; во вторыхъ

$$\frac{CF}{C_1F_1}=\frac{h}{x}, \qquad (60)$$

т. е. длина базы пропорціональна глубинѣ погруженія.

Назовемъ площади треугольниковъ давленій CHF и $C_1H_1F_1$ черезъ ω_1 и ω_x и величины распоровъ: полнаго черезъ E_1 и соотвѣтствующаго стѣнкѣ A_1B черезъ E_x; тогда можемъ написать:

$$\frac{E_1}{E_x}=\frac{\omega_1}{\omega_x}.$$

Площади подобныхъ треугольниковъ пропорціональны квадратамъ сходственныхъ боковъ, т. е.

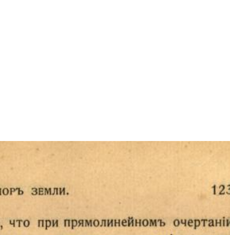
$$\frac{\omega_1}{\omega_x}=\frac{CF^2}{C_1F_1^2}.$$

Соединяя двѣ послѣднія пропорціи и принимая во вниманіе равенство (60), окончательно найдемъ:

$$E_x=\frac{x^2}{h^2}E_1. \qquad (61)$$

Такимъ образомъ мы нашли, что при прямолинейномъ очертаніи стѣнки и насыпи распоръ насыпи возрастаетъ пропорціонально квадрату глубины погруженія, считая отъ уровня вершины стѣнки, слѣдовательно величина распора насыпи измѣняется по закону параболы.

Поэтому, если отложимъ отъ подошвы стѣнки отрѣзокъ AV и при вершинѣ B построимъ параболу со стрѣлкою $AV=E_1$, то абсциссы этой параболы дадутъ величины распора, соотвѣтствующаго глубинѣ погруженія данной точки A_1 отъ уровня вершины стѣнки B.



Черт. 87.

Теперь легко опредѣлить и величину давленія въ данной точкѣ, т. е. относительный (или удѣльный) распоръ, равный величинѣ давленія на единицу площади, соотвѣтствующей данному погруженію; тогда будемъ знать давленіе на каждый слой стѣнки, т. е. каждую составляющую системы параллельныхъ силъ, равнодѣйствующая которыхъ есть распоръ насыпи. Возьмемъ точку безконечно близкую къ точкѣ A', соотвѣтствующей глубинѣ погруженія x, тогда распоръ E_x въ точкѣ $x+dx$ увеличится на безконечно малую величину dE_x и составитъ E_x+dE_x, и относительный распоръ на участокъ dx будетъ

$$\frac{E_x+dE_x-E_x}{dx}=\frac{(x+dx)^2-x^2}{dx}\cdot\frac{E_1}{h^2}.$$

По сокращеніи найдемъ:

$$\frac{dE_x}{dx}=\frac{2x}{h^2}E_1+\frac{dx}{h^2}E_1.$$

Обозначая предѣльное значеніе лѣваго отношенія при подведеніи dx къ нулю черезъ e_x, найдемъ выраженіе въ конечномъ видѣ:

$$e_x=\frac{2x}{h^2}E_1, \qquad (62)$$

гдѣ e_x есть относительный или удѣльный распоръ въ данной точкѣ. Величина эта измѣряется въ единицахъ $\frac{\text{вѣсъ}}{\text{площ.}}$, а такъ какъ разсматривается призма высотою равная единицѣ, то напряженіе распора выражается въ вѣсовыхъ единицахъ на погонную единицу высоты стѣны.

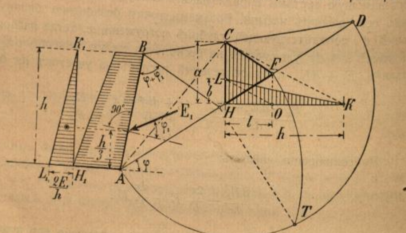
Изъ послѣдняго выраженія видно, что удѣльный распоръ измѣняется по высотѣ стѣны по линейному закону. Линія эта легко строится. Для вершины стѣны при $x = O$, имѣемъ $e_0 = O$; для подошвы стѣны, $x = h$,

$$e_h = 2\frac{E}{h}. \qquad (62 \text{ bis})$$

Отложивъ на черт. 88 отъ точки H_1, по горизонтали $H_1L_1 = e_h$ и соединивъ точку L_1 съ точкою K_1, лежащей въ уровнѣ вершины B, найдемъ линію относительнаго распора. Величина относительнаго распора, приходящагося на элементъ стѣны dx, выразится произведеніемъ изъ соотвѣтственной абсциссы e на dx, т. е. площадью элементарнаго прямоугольника edx, а величина относительнаго распора, соотвѣтствующаго всей стѣнѣ, т. е. величина полнаго распора, выразится полною площадью треугольника $H_1L_1K_1$. Дѣйствительно

$$\text{пл.}\ \Delta\, H_1L_1K_1 = 2\frac{E_1}{h_1}\cdot\frac{h}{2} = E_1\,.$$

Площадь $\Delta\ H_1K_1L_1$ назовемъ площадью распора, въ отличіе отъ треугольника давленія. Площадь распора опредѣляетъ распоръ по



Черт. 88.

величинѣ и даетъ точку приложенія распора. Эта площадь строится непосредственно пользуясь треугольникомъ давленія. Построеніе указано на черт. 88. Изъ него имѣемъ

$$\frac{a}{h} = \frac{b}{l}\ ;\ \frac{al}{h} = b\,,$$

но $al = 2\ E_1$, т. е.

$$b = \frac{2E_1}{h} = e_h\,.$$

Стало быть задача сводится къ построенію двухъ равномѣрныхъ треугольниковъ по даннымъ основанію и высотѣ.

Точку приложенія распора найдемъ изъ выраженія для моментовъ параллельныхъ силъ, т. е. абсциссъ e площади распоровъ. Изъ условія, что моментъ равнодѣйствующей относительно точки A равенъ суммѣ моментовъ составляющихъ относительна той же точки найдемъ:

$$\zeta = \frac{\Sigma\, e_x\, \zeta_x}{E_1}$$

Это выраженіе соотвѣтствуетъ выраженію для центра тяжести площади распоровъ; такъ какъ эта площадь есть треугольникъ, то

$$\zeta = \frac{1}{3}\,h. \qquad (63)$$

Слѣдовательно точка приложенія распора на подпорную стѣнку лежитъ на $\frac{1}{3}$ высоты подпорной стѣнки отъ ея основанія.

B. Опредѣленіе распора въ частныхъ случаяхъ.

37. Подпорная стѣнка вертикальна, насыпь горизонтальна.

а. Уголъ тренія о стѣнку равенъ нулю.

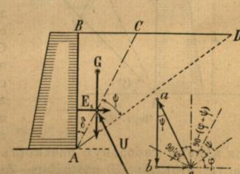
Такой случай имѣетъ мѣсто напр. при расчетѣ плотинъ, когда позади-лежащая насыпь настолько насыщена водою, что треніе о стѣнку весьма мало и имъ рекомендуется пренебрегать. Въ этомъ случаѣ можно вывести простую формулу, позволяющую обойтись безъ графическаго построенія.

Вѣсъ призмы обрушенія

$$G = \frac{1}{2}\gamma h^2 \operatorname{tg}\delta\,,$$

гдѣ буквы соотвѣтствуютъ обозначеніямъ принятымъ на черт. 89. Опредѣлимъ уголъ bac въ $\Delta\ abc$. Этотъ уголъ назовемъ черезъ ψ. Изъ $\Delta\ abc$

$$E_1 = G \operatorname{tg}\psi = \frac{1}{2}\gamma h^2\cdot\operatorname{tg}\delta\cdot\operatorname{tg}\psi\cdot$$



Черт. 89.

Произведенiе двухъ множителей, дающихъ въ суммѣ опредѣленное число, будетъ наибольшимъ, когда множители между собою равны, т. е. max. E_1, или предѣльное равновѣсiе будетъ при $\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\psi$, откуда

$$\delta = \psi = \frac{1}{2}(90^0 - \varphi);$$

Слѣдовательно имѣемъ для распора значенiе:

$$E_1 = \frac{1}{2}\gamma h^2 \operatorname{tg}^2 (45^0 - \frac{1}{2}\varphi) \cdot \qquad (64)$$

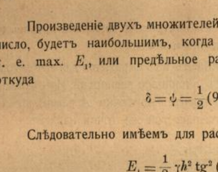
Это выраженiе въ частныхъ случаяхъ различныхъ грунтовъ даетъ легко запоминаемыя формулы:

1. Растительный и глинистый грунты, естеств. влаж.: (при $\varphi = \infty 45^0$).	$E_1 = \frac{\gamma h^2}{12}$
2. Неслежавшiйся насыпной грунтъ: (при $\varphi = \infty\ 30^0$).	$E_1 = \frac{\gamma h^2}{6}$
3. Въ плотинахъ, для грунта насыщеннаго водой: (при $\varphi = \infty\ 20^0$).	$E_1 = \frac{\gamma h^2}{4}$
4. Для воды: (когда $\varphi = 0^0$).	$E_1 = \frac{\gamma h^2}{2}$

ѣ. Тренiе о стѣнку принято во вниманiе.

Обратимся къ графическому построенiю.

1. При $\varphi = \varphi_1 = 45^0$, направляющая сольется съ поверхностью насыпи какъ на черт. 90. Сравнивая этотъ чертежъ со всѣми предыдущими, замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ точки I, F и D совпадаютъ въ одну точку D. Съ перваго взгляда вопросъ о построенiи базы и плоскости скольженiя кажется неопредѣленнымъ, на самомъ дѣлѣ онъ рѣшается весьма просто. Въ этомъ случаѣ плоскость скольженiя дѣлитъ свободную плоскость насыпи BD на двѣ равныя части; отрѣзокъ CD изобразитъ—базу. Дѣйствительно, первая теорема Ребгана удовлетворена, ибо пл. $\Delta\, ABC =$ пл. $\Delta\, ACD$, по равенству



Черт. 90.

основанiй и высотъ, причемъ $\Delta\, ACD$ есть треугольникъ составленный линiями скольженiя, естественнаго откоса и базы.

Величина распора для случая изображеннаго на этомъ чертежѣ будетъ

$$E_1 = \gamma \text{ пл. } \Delta\, CDH = \frac{\gamma}{2}\, CD \quad DH \sin 45^0 \cdot$$

Но $CD = DH$ и по построенiю $CD = \frac{h}{2}$,

слѣдовательно

$$E_1 = \gamma \quad \frac{1}{2}\left[\frac{h}{2}\right]^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \gamma \left[\frac{h}{4}\right]^2 \sqrt{2},$$

откуда, по вычисленiи

$$E_1 = 0{,}08839\, \gamma h^2,$$

и послѣ округленiя

$$E_1 = 0{,}09\, \gamma h^2\,. \qquad (65)$$

Горизонтальная проекцiя этого распора $E_1 \cos 45^0 = 0{,}063\ \gamma\, h$, что составляетъ 75% отъ величины даваемой формулой (64).

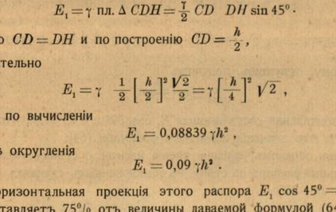
2. При $\varphi = \varphi_1 = 30^0$, т. е. для насыпнаго грунта имѣемъ:

$$h = AI = BI = ID = IT;$$

$$AD = 2h;$$

по формулѣ (57):

$$AF = \sqrt{AD\,.\,AI} = h\,\sqrt{2}.$$



Черт. 91.

Вслѣдствiе этого—

$$CF = FD = AD - AF = 2h - h\,\sqrt{2};$$

$$CF = h\,(2 - \sqrt{2}) = d.$$

Треугольникъ давленія равносторонній, а слѣдовательно высота его $d \cos 30 = d \frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому площадь треугольника давленія

$$\omega_1 = d^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = h^2 (2 - \sqrt{2})^2 \frac{\sqrt{3}}{4};$$

откуда

$$\omega_1 = h^2 (4 - 4\sqrt{2} + 2) \frac{\sqrt{3}}{4} = (3 - 2\sqrt{2}) \frac{\sqrt{3}}{2} h^2 = 0{,}149\, h^2.$$

Поэтому, округливъ, получимъ

$$E_1 = 0{,}15\, \gamma h^2. \tag{65 bis}$$

Горизонтальная составляющая $E_1 \cos 30^0 = 0{,}13\, \gamma\, h^2$, что составляетъ 77% отъ значенія, даваемаго формулой (64).

Такимъ образомъ, вліяніе тренія насыпи о стѣнку уменьшаетъ горизонтальный распоръ на стѣну, въ обыкновенныхъ случаяхъ ($\varphi = 20^0$ до 45^0) на 20—25%.

38. Поверхность насыпи направлена подъ угломъ естественнаго откоса.

Въ этомъ случаѣ направляющая совпадаетъ по величинѣ съ базой, такъ какъ послѣдняя можетъ быть прочерчена изъ любой точки линіи откоса и плоскости насыпи, пересѣкающихся въ безконечности. Построеніе треугольника давленій понятно изъ чертежа 92.

Черт. 92.

39. Поверхность насыпи ограничена ломаной линіей.

Задачу приводятъ къ основному случаю, замѣняя многогранную призму обрушенія треугольною ей равномѣрною. Для этого строятъ

фиктивную стѣнку, напр. на черт. 93, соединивъ точку L съ A, на основаніи AL строимъ треугольникъ AB_1L такой, чтобы пл. $\Delta\, AB_1L =$ пл $\Delta\, ABL$, для чего проводимъ $BB_1 \parallel AL$ и продолжаемъ DL до пересѣченія съ BB_1 въ точкѣ B_1. Находимъ фиктивную стѣнку AB_1. Дальнѣйшія построенія производимъ, какъ указано выше, причемъ направляющую слѣдуетъ провести отсчитывая уголъ 2φ или $\varphi_1 + \varphi$ отъ дѣйствительной стѣнки. Что касается точки приложенія распора, то она располагается какъ и въ предыдущихъ случаяхъ на высотѣ $^1/_3$

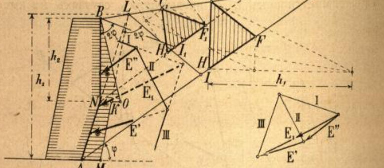
Черт. 93.

дѣйствительной стѣнки, и площадь давленія слѣдуетъ построить на отрѣзкѣ, соотвѣтствующемъ стѣнкѣ AB. Дѣйствительно, отлогость BL должна составлять съ горизонтомъ уголъ не большій угла естественнаго откоса, а во всѣхъ точкахъ такого откоса горизонтальный распоръ всегда равенъ нулю, такъ какъ откосъ самъ по себѣ находится въ равновѣсіи.

40. Подпорная стѣнка очерчена по ломаной линіи.

Въ этомъ случаѣ нужно найти площади давленій на каждый изъ прямолинейныхъ участковъ стѣнки. Тогда, получивъ величины, точки приложенія и направленіе частныхъ распоровъ, составляющихъ углы тренія съ нормалями къ соотвѣтствующимъ участкамъ стѣнки, останется сложить найденныя силы помощью веревочнаго многоугольника.

Продоживъ на чер. 94, линію AN, до пересѣченія съ поверхностью насыпи въ точкѣ L, найдемъ фиктивную стѣнки AL, нижняя часть которой будетъ дѣйствительная стѣнка. Затѣмъ строимъ направляющую, откладывая уголъ $ALI - 2\varphi$. Построивъ треугольникъ давленія, опредѣлимъ и основаніе площади давленія AM; соединивъ точку M съ L, опредѣлимъ фиктивную площадь давленія. Очевидно, что нижняя часть этой площади, соотвѣтствующая нижнему участку AN_1 стѣнки, будетъ дѣйствительною площадью давленія на нижній участокъ стѣнки и центръ тяжести этой трапеціи опредѣлитъ точку приложенія частнаго распора E'. Верхній-же участокъ долженъ быть замѣненъ площадью



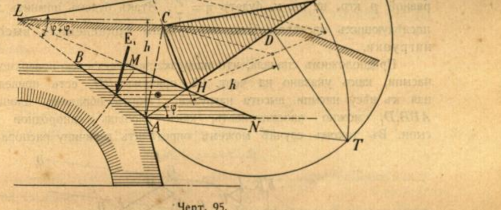
Черт. 94.

давленія на дѣйствительную стѣнку NB. Частный распоръ E'' на участокъ стѣнки NB находимъ по извѣстнымъ правиламъ проведя линію откоса, соотвѣтствующаго этой стѣнкѣ—ND_1. Двѣ силы E' и E'' сложены помощью веревочнаго многоугольника, причемъ полученъ полный распоръ E_1.

41. Направляющая располагается внѣ насыпи.

Когда верхняя часть только что изслѣдованной подпорной стѣнки сильно отклонится впередъ, то направляющая BI_1 выйдетъ изъ насыпи вверхъ и точка I_1 расположится правѣе точки D. Это происходитъ напр. при опредѣленіи давленія земли на забутку свода, составляющую острый уголъ съ поверхностью насыпки, какъ на черт. 95. Пусть требуется опредѣлить распоръ земли на грань AB. Только что видѣли, что давленіе на одну изъ граней ломаной стѣнки не зависитъ отъ давленія на выше или ниже лежащія грани, поэтому, будетъ ли выше точки B подпорная стѣнка или насыпь, давленіе на грань AB получится, построивъ площадь скольженія при точкѣ A для фиктивной стѣнки AL и вычтя изъ давленія на всю стѣну AL, давленіе на участокъ BL. Направляющая LI располагается выше поверхности насыпи LD, т. е. точка I правѣе точки D. Если въ этомъ случаѣ построить полукругъ на діаметрѣ AD, то перпендикуляръ,

возстановленный изъ точки I (см. построеніе плоскости скольженія) не пересѣкаетъ окружности, и положенія точки F мы не опредѣлимъ. По условію, для опредѣленія точки F, должно существовать отношеніе $AF^2 = AD \cdot AI$, а это отношеніе получимъ также построимъ полукругъ на діаметръ AI, возставивъ $\perp DT$ и найдя радіусъ AT, ко-



Черт. 95.

торымъ слѣдуетъ засѣчь на линіи AI точку F. Черезъ эту точку пройдетъ база FC, параллельная направляющей LI, а точка C опредѣлитъ положеніе плоскости скольженія AC *). Дѣйствительно площадь призмы обрушенія ACL = площади ΔACF, что необходимо и достаточно по теоремѣ Ребгана, если стороны ΔACF суть линіи скольженія, естественнаго откоса и база.

Дальнѣйшія построенія произведены по извѣстнымъ правиламъ, причемъ получена трапеція давленія $ABMN$, опредѣляющая и величину и точку приложенія распора E_1.

§ 9.

Нагрузка, дѣйствующая на насыпь.

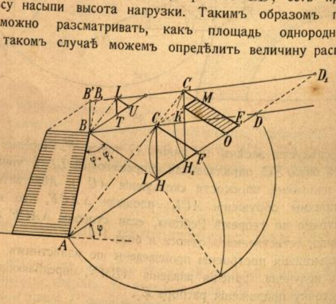
42. Параллелограмъ давленія.

Примемъ, что дѣйствующая на насыпь нагрузка распредѣляется равномѣрно по нѣкоторой площади, причемъ эта площадь тянется безгранично вдоль стѣнки. Въ сѣченіи вертикальною плоскостью, т. е.

*) Въ виду того что уголъ DCF весьма острый, лучше соединить точку F съ L и провести плоскость AC черезъ середину FL.

въ плоскости чертежа равномѣрно распредѣленная нагрузка выразится площадью прямоугольника. Эта площадь даетъ вѣсъ нагрузки на выдѣленную земляную призму съ высотою (вдоль стѣнки) равною единицѣ и очевидно, что можно выбрать такой масштабъ, что единица площади нагрузки и насыпи будутъ выражать одинъ и тотъ-же вѣсъ. Выборъ такого масштаба называется **приведеніемъ вѣса нагрузки къ вѣсу насыпи**. Если вѣсъ насыпи γ кгр. въ куб. метрѣ, т. е. на чертежѣ площадь насыпи въ 1 кв. м. даетъ вѣсъ γ, то высота площади нагрузки равной p кгр. на кв. м. будетъ $\eta = \frac{p}{\gamma}$. Итакъ будемъ помнить при послѣдующихъ изслѣдованіяхъ, что γ есть **приведенная высота нагрузки**.

Предположимъ сначала, что нагрузка занимаетъ всю поверхность насыпи, какъ указано на черт. 96, причемъ BB', есть приведенная къ вѣсу насыпи высота нагрузки. Такимъ образомъ площадь ABB_1D_1 можно разсматривать, какъ площадь однородной насыпи. Въ такомъ случаѣ можемъ опредѣлить величину распора на



Черт. 96.

фиктивную стѣнку AB_1. Въ дѣйствительности полное давленіе будетъ меньше, такъ какъ распору подвергается лишь стѣнка AB. Поэтому для полученія окончательнаго результата, надо вычесть часть распора, приходящуюся на фиктивную стѣнку BB_1 *). Оставшаяся часть распора будетъ представлять собою сумму распора отъ насыпи и отъ расположенной на ней нагрузки.

*) Въ дѣйствительности если-бы, нагрузку произвести слоемъ сыпучаго тѣла, т. е. насыпью же, то эта насыпь будетъ ограничена естественнымъ откосомъ (пунктиръ) и слѣдовательно распоръ на фиктивную стѣнку BB_1 будетъ уравновѣшенъ.

Построимъ плоскость скольженія A_1C_1 и треугольникъ давленія $C_1H_1F_1$ для фиктивной стѣнки AB_1. Построимъ также плоскость скольженія BL для точки B и треугольникъ давленія LUT. Плоскости BL и AC_1, согласно доказанной выше теоремы, **(36)** будутъ между собою параллельны, равно какъ и бока треугольниковъ $\Delta\ LUT$ и $\Delta\ C_1F_1H_1$. Изъ той-же теоремы слѣдуетъ, что плоскость скольженія AC_1 будетъ также плоскостью скольженія для точки A стѣнки AB и стороны треугольника давленія $\Delta\ CFH$, опредѣляющаго распоръ отъ насыпи на дѣйствительную стѣнку, будутъ соотвѣтственно параллельны сторонамъ $\Delta C_1F_1H_1$ и ΔLUT. Остается изъ площади треугольника давленія $C_1F_1H_1$ вычесть площади $\Delta\ CHF$ и $\Delta\ LUT$. Проведя $CM \parallel AD$ и $KO \parallel CF \parallel C_1F_1$, найдемъ

$$\Delta\ KH_1O = \Delta\ CHF;$$
$$\Delta\ C_1KM = \Delta\ LTU.$$

Дѣйствительно стороны этихъ треугольниковъ параллельны между собою и $LU = C_1M$, что видно изъ равенства.

$$\Delta BLU = \Delta\ CC_1M,$$

въ которыхъ сторонъ, $BL = CC_1$, какъ отрѣзки параллельныхъ между параллельными.

Итакъ давленіе на дѣйствительную стѣнку A_1B можетъ быть выражено произведеніе изъ величины γ на площадь параллелограмма KMF_1O. Этотъ параллелограммъ назовемъ **параллелограммомъ давленія**. Если давленіе на стѣну отъ вліянія равномѣрно распредѣленной нагрузки на насыпи назовемъ черезъ E_2, а площадь параллелограмма давленія черезъ ω_2, то можно написать:

$$E_2 = \gamma\omega_2. \tag{66}$$

Изъ чертежа видно, что для построенія параллелограмма давленія достаточно знать величины боковъ двухъ треугольниковъ давленія: соотвѣтствующаго распору земли на дѣйствительную стѣнку и соотвѣтствующаго высотѣ приведенной нагрузки.

Между давленіемъ E_2 при полной равномѣрно распредѣленной нагрузкѣ и распоромъ земли E_1 существуетъ весьма интересная зависимость.

Примемъ за основанія треугольниковъ давленія на стѣнку AB и на стѣнку BB_1 стороны HF и $KM = TU$ и обозначимъ ихъ черезъ b и b_1 а черъ b_2 обозначимъ основаніе H_1F_1 треугольника давленія на всю фиктивную стѣну. Треугольникъ давленія земли на стѣну AB и трапеція полнаго давленія на туже стѣну имѣютъ равныя высоты, поэтому

$$\frac{E}{E_1} = \frac{\text{пл. } KMF_1H_1}{\text{пл. } CFH} = \frac{b_2}{b} = \frac{b + 2b_1}{b}.$$

Но линіи b и b_1 какъ бока треугольниковъ давленій пропорціональны высотамъ соотвѣтствующихъ участковъ подпорныхъ стѣнокъ (60), т. е.

$$\frac{b_1}{b} = \frac{\eta}{h},$$

поэтому

$$E = \frac{h + 2\eta}{h} E_1. \tag{67}$$

Вычтя отсюда величину распора земли E_1, найдемъ давленіе отъ равномѣрно распредѣленной по всей поверхности насыпи нагрузки $E_2 = E - E_1$:

$$\boxed{E_2 = \frac{2\eta}{h} E_1,} \tag{68}$$

т. е. **при прямолинейномъ очертаніи насыпи и стѣнки давленіе отъ полной равномѣрно распредѣленной нагрузы на насыпи равно величинѣ распора земли, умноженной на отношеніе удвоенной высоты приведенной нагрузки къ высотѣ подпорной стѣнки.**

Примѣнимъ эту формулу къ частному случаю, когда стѣнка вертикальна и поверхность насыпи горизонтальна и уголъ тренія о стѣнку $= 0$, разсмотрѣнномъ выше **(37).**

Пусть нагрузка будетъ p тоннъ на кв. метръ насыпи.

Для этого случая выведено (64):

$$E_1 = \frac{1}{2} \gamma h^2 \operatorname{tg}^2 \left(45 - \frac{1}{2} \varphi\right),$$

руководствуясь формулой (68) и замѣняя η черезъ $\frac{p}{\gamma}$, найдемъ:

$$E_2 = ph \operatorname{tg}^2 \left(45 - \frac{1}{2} \varphi\right) \tag{69}$$

Черт. 97.

Эту формулу можно вывѣсти и непосредственно какъ (64).

Величины давленій отъ временной нагрузки при различныхъ грунтахъ будутъ:

1. Растительный и глинистый естеств. влажные грунты при $\varphi \cong 45^0$.	$E_2 = \frac{ph}{6}$.
2. Насыпные грунты въ среднемъ при $\varphi = 30^0$.	$E_2 = \frac{ph}{3}$.
3. Въ плотинахъ и при грунтахъ насыщенныхъ водой при $\varphi = 0^0$.	$E_2 = \frac{ph}{2}$.

43. Треугольникъ полнаго давленія.

Иногда вмѣсто трапеціи полнаго давленія на стѣнку, строятъ треугольникъ давленія, для чего опредѣляютъ новую высоту нагрузки y, при которой полная высота фиктивной стѣны будетъ $h + y$.

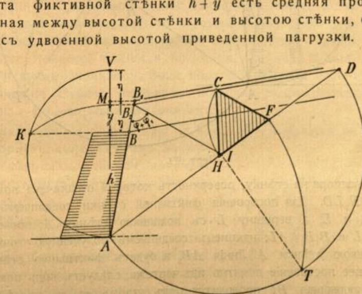
Величина y находится всего быстрѣе изъ только что выведенной зависимости между E и E_1. Имѣемъ согласно (61):

$$\frac{E}{E_1} = \frac{(h + y)^2}{h^2};$$

сравнивая это выраженіе съ (67), находимъ искомое отношеніе

$$(h + y)^2 = h(h + 2\eta),$$

высота фиктивной стѣнки $h + y$ есть средняя пропорціональная между высотой стѣнки и высотою стѣнки, сложенной съ удвоенной высотой приведенной пагрузки. На вер-

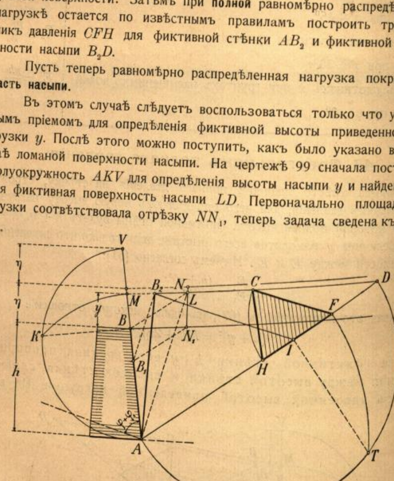


Черт. 98.

тикали AV, высота которой $h+2\eta$ строимъ полуокружность AKV. Проведя къ діаметру перпендикуляръ BK на высотѣ h, опредѣляемъ точку K; засѣкая дугою KM при радіусѣ AK точку M, находимъ искомую высоту y отъ вершины стѣнки до уровня фиктивной приведенной поверхности. Затѣмъ при **полной** равномѣрно распредѣленной нагрузкѣ остается по извѣстнымъ правиламъ построить треугольникъ давленія CFH для фиктивной стѣнки AB_2 и фиктивной поверхности насыпи B_2D.

Пусть теперь равномѣрно распредѣленная нагрузка покрываетъ **часть насыпи.**

Въ этомъ случаѣ слѣдуетъ воспользоваться только что указаннымъ пріемомъ для опредѣленія фиктивной высоты приведенной нагрузки y. Послѣ этого можно поступить, какъ было указано въ случаѣ ломаной поверхности насыпи. На чертежѣ 99 сначала построена полуокружность AKV для опредѣленія высоты насыпи y и найдена новая фиктивная поверхность насыпи LD. Первоначально площадь нагрузки соотвѣтствовала отрѣзку NN_1, теперь задача сведена къ опре-



Черт. 99.

дѣленію распора на стѣнку, поверхность которой ограничена ломаной линіей BN_1LD. Для построенія фиктивной стѣнки соединяемъ вершины B и L, а вершину L съ подошвою стѣнки A; проводимъ $N_1B_1 \parallel BL$ и $B_1B_2 \parallel AL$; наконецъ соединяемъ полученную точку B_2 съ подошвою стѣнки A. Линія AB_2 и будетъ фиктивною стѣнкою. Дальнѣйшее построеніе понятно изъ чертежа; слѣдуетъ лишь помнить, что направляющая BI проводится подъ угломъ $\varphi+\varphi_1$ къ дѣйствительной стѣнкѣ.

Для доказательства, что AB_2 будетъ дѣйствительно искомая фиктивная стѣнка обратимся къ пояснительному чертежу 99а.

Необходимо доказать, что площадь четыреугольника ABN_1N_2A равномѣрна площади пятиугольника $AB_2LN_1N_2A$. Проведемъ вспомогательныя линіи B_1L, B_2N_2 и BN_2. Имѣемъ:

Черт. 99а.

$$\text{пл. } ABN_1N_2A = \text{пл. } \Delta\, AB_1N_2 + \\ + \text{пл. } \Delta B_1BN_2 + \text{пл. } \Delta\, BN_1N_2$$

$$\text{пл. } AB_2LN_1N_2A = \text{пл. } \Delta\, AB_2N_2 + \\ + \text{пл. } \Delta\, B_2N_2L + \text{пл. } \Delta\, LN_1N_2.$$

Согласно построенію, по равенству высотъ:

$$\text{пл. } \Delta\, AB_1N_2 = \text{пл. } \Delta\, AB_2N_2$$

$$\text{пл. } \Delta\, BB_1N_2 = \text{пл. } \Delta\, B_1LN_2 = \text{пл. } \Delta\, B_2N_2L$$

$$\text{пл. } \Delta\, BN_1N_2 = \text{пл. } \Delta\, LN_1N_2,$$

Слѣдовательно равенство площадей фигуръ прочерченныхъ на чертежѣ 99а жирными линіями—доказано и AB_2 на черт. 99 дѣйствительно фиктивная стѣнка.

44. Распредѣленіе давленія на подпорную стѣнку.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что параллелограммъ давленія, построенный для различныхъ частей подпорной стѣнки всегда имѣетъ одно и тоже основаніе, поэтому площади соотвѣтствующихъ параллелограммовъ давленія пропорціональны базамъ треугольниковъ давленій для разсматриваемой плоскости скольженія, такъ какъ параллелограммъ имѣетъ своимъ бокомъ базу. Выше показано (60), что длина базы пропорціональна глубинѣ погруженія подошвы разсматриваемой части стѣнки, а слѣдовательно заключаемъ:

Давленіе на подпорную стѣнку отъ нагрузки на насыпь пропорціонально глубинѣ погруженія подошвы разсматриваемой части стѣнки подъ уровнемъ ея вершины.

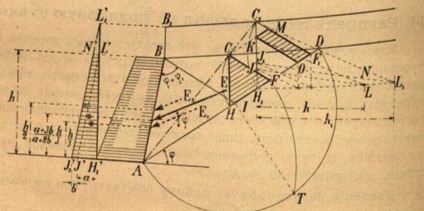
Черт. 100.

Такимъ образомъ давленіе на стѣнку отъ нагрузки на насыпи, съ увеличеніемъ высоты стѣнки, возрастаетъ по линейному закону. Опредѣлимъ давленіе отъ временной нагрузки для произвольнаго участка стѣнки, глубиною x отъ вершины. Отложимъ отъ точки $AV=\gamma$. пл. (парал. давленія); соединимъ точку V съ вершиною B, тогда асбсиса E'_x линіи AV дастъ величину давленія для участка стѣнки высотою x.

Относительное давленіе на стѣнку отъ временной нагрузки есть величина постоянная, что легко доказать, пользуясь только что построеннымъ чертежомъ. Для построенія площади относительнаго давленія достаточно найти давленіе въ одной изъ точекъ стѣны; отрѣзокъ, параллельный линіи стѣны, опредѣлитъ прямоугольникъ, площадь котораго и будетъ площадью давленій отъ временной нагрузки. Высота этого прямоугольника будетъ h, а основаніе $\frac{E_2}{h}$.

Точка приложенія давленія E_2 на стѣнку опредѣлится центромъ тяжести прямоугольника давленія, т. е. лежитъ на половинѣ высоты стѣнки.

Графически площадь давленія отъ временной нагрузки строится слѣдующимъ образомъ. Пусть B_1C_1 есть фиктивная поверхность насыпи съ приведенною нагрузкой B_1B. Строимъ треугольникъ $J_1'L_1'H_1'$, изображающій площадь давленій на фиктивную стѣнку AB_1, отложивъ $J_1'H_1'=\frac{2\omega_1\gamma}{h_1}$, гдѣ $h_1=h+\eta$. Изъ точки L', соотвѣтствующей вершинѣ дѣйствительной стѣнки, проводимъ $L'J'\parallel L_1'J_1'$ и $L'N'\parallel J_1'H_1'$, тогда



Черт. 101.

треугольникъ $L'J'H_1'$ будетъ площадью распора земли на дѣйствительную стѣнку AB, а параллелограммъ $N'L'J_1J'$, будетъ площадью давленій отъ равномѣрно распредѣленной нагрузки. Дѣйствительно, въ $\Delta L_1J_1'H_1'$ и $\Delta L_1I_1'H_1'$, площади ихъ равны площадямъ треугольниковъ давленій на соотвѣтствующіе участки подпорной стѣнки, а въ такомъ случаѣ и площадь $N'L'J_1'J'$, съ высотою равною высотѣ стѣнки, равна площади параллелограмма давленій.

Ордината точки приложенія давленія на стѣнку отъ нагрузки, расположенной на насыпи, опредѣлится какъ ордината центра тяжести площади параллелограмма $N'L'J_1'J'$. Итакъ:

точка приложенія давленія на прямолинейную стѣнку отъ равномѣрно распредѣленной нагрузки на насыпи лежитъ на половинѣ высоты стѣнки.

Точка приложенія полнаго распора $E=E_1+E_2$ опредѣлится центромъ тяжести заштрихованной площади трапеціи полнаго распора $N'L'J_1'H_1'$.

Изъ чертежа, согласно извѣстнымъ правиламъ, найдемъ разстояніе центра тяжести трапеціи давленія:

$$\zeta=\frac{h}{3}\left(\frac{a+3b}{a+2b}\right).$$

Удобнѣе величины a и b замѣнить пропорціональными имъ величинами: высотою приведенной нагрузки η и высотою h. Эти величины извѣстны заранѣе и слѣдовательно для опредѣленія величины ζ нѣтъ необходимости строить площади давленія. Такимъ образомъ

$$\zeta=\frac{h}{3}\left(\frac{h+3\eta}{h+2\eta}\right). \tag{71}$$

§ 10.

Расчетъ подпорныхъ стѣнокъ.

45. Общія указанія.

Для устойчивости подпорной стѣнки, силы на нее дѣйствующія должны удовлетворять общимъ условіямъ равновѣсія. Такъ какъ въ предыдущемъ мы свели вопросъ къ изслѣдованію силъ на плоскости, то для устойчивости ея, необходимо существованіе трехъ условій:

1, сумма вертикальныхъ составляющихъ должна равняться нулю;

2, сумма горизонтальныхъ составляющихъ должна равнять сянулю;

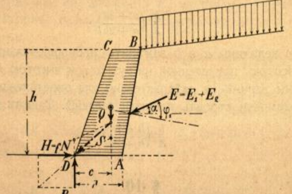
3, сумма моментовъ силъ относительно произвольной точки плоскости есть нуль.

Первое условіе, препятствующее погруженію стѣнки въ грунтъ опредѣляется равенствомъ

$$N=E\sin\alpha+Q=R, \tag{72}$$

гдѣ N есть сумма вертикальныхъ составляющихъ силъ, $E=E_1+E_2$ полный распоръ на стѣнку, α уголъ наклоненія полнаго распора къ горизонту, Q вѣсъ стѣны и R—сопротивленіе грунта (или фундамента). Послѣдняя величина опредѣляется на основаніи указаній «сопротивленія матеріаловъ»; она выражается произведеніемъ величины прочнаго сопротивленія опоры на площадь опоры, т. е. $R = \sigma \,.\, d$ если σ есть прочное сопротивленіе и d ширина подошвы стѣны. Кромѣ того изъ сопротивленія матеріаловъ извѣстно, что если равнодѣйствующая S силъ E и Q не будетъ проходить въ средней трети, то сопротивленіе опоры по одну сторону центра тяжести сѣченія подошвы будетъ положительнымъ, а по другую на протяженіе ея большей или меньшей части отрицательнымъ, т. е. появятся вытягивающія напряженія, чего въ кладкѣ допускать нельзя.

Если равнодѣйствующая S пройдетъ чрезъ центръ тяжести сѣченія подошвы, то вся подошва будетъ испытывать равномѣрное на-



Черт. 102.

пряженіе, величина котораго опредѣлится изъ предыдущей формулы, гдѣ вмѣсто $R = N$ подставимъ $\sigma \,.\, d$ и опредѣлимъ величину σ, т. е.

$$\sigma = \frac{N}{d} \tag{73}$$

или по данному $\sigma = \sigma_k$, ширину подошвы d. Если равнодѣйствующая не проходитъ черезъ центръ тяжести сѣченія, то напряженія σ_1 и σ_2 сжимающія и вытягивающія въ крайнихъ ребрахъ сѣченія, найдутся по формулѣ (73), къ которой слѣдуетъ придать членъ, зависящій отъ эксцентричности нагрузки, т. е.

$$\sigma = \frac{N}{d} \pm \frac{M}{W} = \frac{N}{d} \pm 6\,\frac{Ne}{d^2}, \tag{74}$$

гдѣ верхній знакъ соотвѣтствуетъ величинѣ σ_1, а нижній σ_2, $a\ e$ есть разстояніе точки приложенія силы R отъ центра тяжести разсматриваемаго сѣченія. Во всякомъ случаѣ равнодѣйствующая N должна проходить внутри средней трети шва, ибо иначе въ швѣ получатся вытягивающія напряженія. Очевидно, что этому условію должны удовлетворять силы, дѣйствующія въ каждомъ горизонтальномъ сѣченіи стѣнки.

Болѣе подробныя указанія см. въ № **53**.

Величины напряженій, даваемыхъ этой формулой весьма легко построить графически. Для этого изъ середины сѣченія возставляемъ перпендикуляръ и откладываемъ на немъ величину перваго члена формулы (74), т. е. величину средняго давленія на шовъ $so = \sigma_0$. Затѣмъ точки k_1 и k_2, лежащія на разстояніи $^1/_6$ ширины шва, соединяетъ съ вершиною перпендикуляра os, причемъ получаемъ наклонныя k_1q и k_2s. Точки пересеченія этихъ линій съ нормальною составляющею N т. е. точки u и q проектируемъ на вертикали реберъ шва и получаемъ $mr = \sigma_2$ и $np = \sigma_1$. Дѣйствительно изъ подобія:

$$\Delta\, k_1qt \infty \Delta k_1so;$$
$$\Delta\, k_2ut \infty \Delta\, k_2so\,,$$

имѣемъ:

$$\frac{qt}{so} = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \frac{\frac{d}{6} + e}{\frac{d}{6}};$$

$$\frac{ut}{so} = \frac{\sigma_2}{\sigma_0} = \frac{\frac{d}{6} - e}{\frac{d}{6}};$$

Черт. 103.

отсюда подставляя вмѣсто σ_0 величину $\frac{N}{d}$ найдемъ,

$$\sigma_1 = \frac{N}{d}\left(1 + \frac{6e}{d}\right);\ \sigma_2 = \frac{N}{d}\left(1 - \frac{6e}{d}\right).$$

Второе условіе, условіе устойчивости противъ скольженія требуетъ:

$$E \cos \alpha \leqq fN\,. \tag{76}$$

Если пренебречь вертикальною составляющею распора или положить уголъ $\alpha = 0$ и замѣтить, что при $\varphi = 33 - 35^0$, какъ это обыкновенно принимается, будетъ $f = \infty 0{,}7$, то получимъ:

$$E \leqq 0{,}7\,Q\,. \tag{77}$$

При прямоугольной или трапецоидальной стѣнѣ $Q = \gamma_1 \cdot hd$, гдѣ γ_1 есть вѣсъ куб. метра кладки, а d толщина стѣны (при трапецоидальной—средняя толщина). Выразивъ распоръ въ зависимости отъ величины треугольника давленія и замѣтивъ, что отношеніе $\frac{\gamma}{\gamma_1}$ всегда близко къ 0,7 найдемъ приближенное легко запоминаемое выраженіе для толщины стѣны, обезпечивающее устойчивость противъ скольженія,

$$d \leqq \frac{\omega}{h}, \tag{78}$$

т. е. толщина стѣны должна быть не меньше площади треугольника давленія, дѣленнаго на высоту стѣны.

Если воспользуемся формулами для E, приведенными на стр. 126, то получимъ, что толщина d, взависимости отъ грунта насыпи, не должна быть меньше $^1/_{12}$ до $^1/_4$ высоты стѣны.

Третье условіе, устойчивость противъ опрокидыванія требуетъ, чтобы равнодѣйствующая S пересѣкала подошву опоры. Условіе равновѣсія въ предѣльный моментъ, когда равнодѣйствующая S проходитъ черезъ ребро стѣнки D, выразится условіемъ равновѣсія моментовъ силъ относительно точки D.

$$M_D = \left(E_1 \frac{h}{3} + E_2 \frac{h}{2}\right) \cos\alpha = Qc,$$

или

$$M_D = E_1 \cdot \left(\frac{h}{3} + \eta\right) \cos\alpha = Qc,$$

или наконецъ

$$M_D = E \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{h + 3\eta}{h + 2\eta} \cos\alpha = Qc, \tag{79}$$

гдѣ c есть разстояніе между вертикалью центра тяжести стѣны и ребромъ D.

Въ случаѣ прямоугольной стѣнки или трапецоидальной съ незначительнымъ уклономъ, толщина стѣны найдется изъ выраженія *).

$$d \geqq \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}\left(\frac{2}{3}\omega_1 + \omega_2\right) \cos\alpha}, \tag{80}$$

гдѣ ω_1 и ω_2 площади давленій насыпи и временной нагрузки (треугольника и параллелограмма давленій); или же

$$d \geqq 1{,}414 \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}\omega_1\left(\frac{h}{3} + \eta\right) \cos\alpha}. \tag{80 bis}$$

Если равномѣрно-распредѣленной нагрузки нѣтъ, или она пренебрегаема сравнительно съ вѣсомъ насыпи, то для примѣрныхъ подсчетовъ имѣемъ приближенное выраженіе:

$$d = \geqq 0{,}7\sqrt{\omega}, \tag{81}$$

т. е. для устойчивости противъ опрокидыванія, ширина подошвы стѣны должна быть не меньше 0,7 корня квадратнаго изъ площади (треугольника) давленія.

При проектированіи стѣны, рекомендуется придерживаться слѣдующаго порядка вычисленій:

1. Построить площадь давленій, или опредѣлить величину распора E по формуламъ (64) и (69).

2. Опредѣлить приближенные размѣры ширины подошвы по указаннымъ формуламъ (78), (80) или (81) и помножить большую изъ полученныхъ величинъ для d' на коэффиціентъ устойчивости

$$\mu = 1{,}25 \text{ до } 1{,}50,$$

послѣ чего получимъ ширину опоры d.

*) Для трапецоидальнаго сѣченія это выраженіе будетъ приближеннымъ.

Примѣчаніе. Точное опредѣленіе ширины опоры изъ выраженій (72), (76) и (79), возможное только путемъ попытокъ,—такъ какъ величина Q заранѣе неизвѣстна,—излишне, ибо послѣдующія вычисленія могутъ снова измѣнить найденную уже величину d.

3. Опредѣлить вѣсъ стѣны и найти точку пересѣченія равнодѣйствующей S съ подошвою стѣны. Если эта равнодѣйствующая пересѣкаетъ подошву въ средней трети, то выбранная толщина стѣны возможна.

4. Вычислить наибольшее напряженіе въ основаніи по формулѣ (74); если это напряженіе превосходитъ допускаемое, то изъ той-же формулы, вставивъ вмѣсто $\max\sigma$ допускаемое напряженіе σ_k и вычислить требуемую для этого напряженія ширину стѣны.

5. Исправить по точной величинѣ d, вычисленія указанныя въ п.п. 3 и 4.

§ 11.

Отпоръ земли.

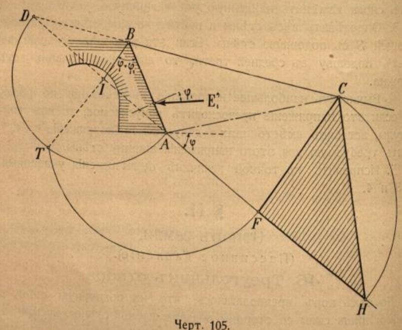
(Пассивное давленіе).

46. Треугольникъ отпора.

До сихъ поръ предполагалось, что на подпорную стѣну дѣйствовали лишь силы со стороны поддерживаемой стѣною насыпи, такъ что стѣна должна была оказывать противодѣйствіе опусканію призмы обрушенія. Можетъ однако случится, что часть насыпи, лежащая непосредственно за подпорною стѣнкою будетъ стремится быть приподнятою; это произойдетъ въ томъ случаѣ, когда на стѣну будутъ дѣйствовать горизонтальныя силы со стороны противоположной насыпи, напр. горизонтальный распоръ отъ поддерживаемаго стѣнкою свода. Подъ вліяніемъ такого распора, стѣнка будетъ прижиматься къ насыпи и когда величина горизонтальнаго распора превзоодетъ горизонтальную составляющую распора E, часть насыпи перемѣстится такимъ образомъ, что пройзойдетъ подниманіе призмы сдвиженія по нѣкоторой поверхности скольженія, черт. 104. Полагая, какъ и въ случаѣ распора земли, что эта поверхность будетъ плоскостью, мы вопросъ о равновѣсіи системы рѣшимъ согласно предыдущему.

Черт. 104.

Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ, въ предѣльный моментъ равновѣсія, равнодѣйствующія сопротивленія отпорной стѣны и насыпи, приложенныя къ призмѣ, стремящейся перемѣститься вверхъ, отклонятся отъ



Черт. 105.

соотвѣтственныхъ нормалей, на углы тренія первая вверхъ, а вторая, слѣдовательно отпоръ E_1—внизъ, т. е. противоположно тому, какъ это было указано въ изслѣдованіи равновѣсія призмы обрушенія.

Поэтому желая воспользоваться графическимъ способомъ Ребгона, мы должны углы φ и φ_1, откладывать въ стороны обратныя тѣмъ, какъ то дѣлалось при опредѣленіи распора земли. Отложивъ отъ горизонта уголъ φ внизъ, найдемъ линію, опредѣляющую направленіе передачи давленія стѣнки на насыпь и соотвѣтствующую плоскости естественнаго откоса при распорѣ земли.

Построеніе треугольника отпорнаго давленія произведено на черт. 105, причемъ для наглядности, буквы соотвѣтствуютъ построенію треугольника давленія для распора земли черт. 85.

Точка приложенія отпора E_1' расположена на разстояніи $\frac{1}{3}$ высоты стѣнки отъ давленія. Это можно доказать подобно тому какъ было указано на стр. 125.

Можно воспользоваться для опредѣленія величины отпора и аналитическимъ выраженіемъ, (64), но въ немъ необходимо передъ φ измѣнить знакъ. Такимъ образомъ получимъ:

$$E_1' = \frac{1}{2}\gamma h^2 \operatorname{tg}^2\left(45 + \frac{1}{2}\varphi\right) \qquad (82)$$

Дла различныхъ грунтовъ получимъ слѣдующія значенія:

1. Растительный и глинистый грунты естеств. влажн. когда $\angle \varphi \cong 45°$	$E_1' = 3{,}0\,\gamma h^2$
2. Неслежавшійся насыпной грунтъ, когда $\angle \varphi \cong 30°$.	$E_1' = 1{,}5\,\gamma h^2$
3. Въ плотинахъ для грунта насыщеннаго водой когда $\angle \varphi \cong 20°$	$E_1' = 1{,}0\,\gamma h^2$

Изъ этой таблицы видно, что величина отпора земли всегда значительно больше величины распора и иногда, напримѣръ для хорошаго слѣжавшагося грунта, отпоръ насыпи въ 36 разъ больше распора, а для насыпного въ 9.

Для увеличенія отпора насыпи, ее загружаютъ равномѣрно распредѣленною нагрузкою. Построеніе величины отпора въ этомъ случаѣ можетъ быть произведено, какъ указано, воспользовавшись приведенною поверхностью насыпи и фиктивною стѣнкою.

Точка приложенія полнаго отпора опредѣлится положеніемъ центра тяжести трапеціи давленій насыпи на стѣну при отпорѣ и будетъ:

$$\zeta = \frac{h}{3} \cdot \frac{h + 3\eta}{h + 2\eta},$$

считая отъ основанія стѣнки.

Если воспользоваться аналитической формулой (69) выведенной для распора, то въ случаѣ отпора она приметъ видъ:

$$E_2' = ph\operatorname{tg}^2\left(45 + \frac{1}{2}\varphi\right). \qquad (83)$$

Для различныхъ грунтовъ получимъ слѣдующія значенія.

1. Растительный грунтъ естественно влажный, при $\varphi \cong 45°$	$E_2' = 3{,}6\,ph.$
2. Насыпные грунты въ среднемъ, при $\varphi \cong 30°$ . .	$E_2' = 3{,}0\,ph.$
3. Въ плотинахъ для грунта насыщеннаго водой, при $\varphi \cong 0°$.	$E_2' = 2{,}0\,ph.$

Изъ сравненія этой таблицы съ таблицею стр. 135 видно, что величина отпора отъ вліянія равномѣрно распредѣленной на насыпи нагрузки для слежавшагося грунта въ 21,6, а для насыпнаго въ 9 разъ больше распора.

ГЛАВА IV.

Цилиндрическій сводъ.

§ 12.

Равновѣсіе свода.

47. Общія замѣчанія.

Простѣйшею и весьма распространенною формою сводчатаго перекрытія является цилиндрическій сводъ. Къ тому же, изслѣдованіе сводовъ другихъ видовъ, напр. купольнаго, крестоваго, можетъ быть произведено, пользуясь данными теоріи цилиндрическаго свода, почему послѣдняя и должна быть разсмотрѣна, какъ основная теорія сводовъ.

Цилиндрическій сводъ мы будемъ предполагать безграничной длины (считая по производящей) и потому для изслѣдованія условій равновѣсія свода будемъ, какъ это дѣлалось при изслѣдованіи подпорныхъ стѣнокъ, разсматривать часть свода, выдѣленную двумя вертикальными плоскостями, перпендикулярными къ производящей свода и длиною равною единицѣ. Такой участокъ свода въ дѣйствительности представляетъ собою арку и слѣдовательно дальнѣйшія изслѣдованія могутъ быть отнесены къ изученіи арокъ, или арочныхъ фермъ. Въ послѣднемъ случаѣ однако предполагается, что ферма или состоитъ изъ сплошного тѣла, или изъ системы тѣлъ между собою связанныхъ какъ напр. въ рѣшетчатыхъ фермахъ. Мы же разсмотримъ лишь своды, состоящіи изъ одного или двухъ монолитныхъ (сплошныхъ) тѣлъ, или наконецъ изъ системы тѣлъ лишь соприкасающихся между собою. Въ такихъ условіяхъ именно и находится сводъ, состоящій изъ клиньевъ. Хотя отдѣльные клинья и соединяются между собою на практикѣ растворомъ (известковымъ, цементнымъ), но такую связь нельзя считать дѣйствительной въ той мѣрѣ, чтобы систему клиньевъ принимать за сплошное однородное тѣло, тѣмъ болѣе, что полное отвердѣніе и наибольшая прочность раствора проявляются лишь по истеченіи болѣе или менѣе значительнаго срока послѣ постройки свода.

Прежде чѣмъ изслѣдовать равновѣсіе свода, скажемъ нѣсколько словъ о нагрузкѣ, дѣйствующей на сводъ. Такая нагрузка можетъ быть разсматриваема, какъ сосредоточенная, равномѣрная, постоянная и т. п., какъ это сдѣлано выше, въ главѣ первой. Но въ данномъ вопросѣ преимущественное значеніе пріобрѣтаетъ нагрузка непрерывно распредѣленная, такъ какъ своды покрываются кромѣ слоя забутки еще и насыпью и съ непосредственной сосредоточенной нагрузкой на практикѣ не приходится имѣть дѣла. Непрерывно распредѣленная нагрузка, дѣйствующая на сводъ слагается изъ собственнаго вѣса свода, забутки и насыпи и кромѣ того изъ временной нагрузки. Нагрузка, дѣйствующая на сводъ, можетъ быть изображена грузовою площадью, которая опредѣлитъ собою, какъ величину нагрузки, такъ и законъ измѣненія величины этой нагрузки съ измѣненіемъ абсциссы x; послѣднюю всегда будемъ отсчитывать отъ такой либо опредѣленной точки слѣва направо. Въ изслѣдованіи сводовъ, непрерывно распредѣленная нагрузка уже не будетъ въ большинствѣ случаевъ равномѣрною и площадь этой нагрузки уже не будетъ прямоугольникъ, почему здѣсь объ ней и упомянули. Вѣсъ добавочной (кромѣ собственнаго вѣса свода) нагрузки отъ забутки, насыпи и временной нагрузки приводится обыкновенно къ вѣсу кладки свода, какъ это дѣлалось и въ предыдущей главѣ, т. е. ордината площади нагрузки $=\frac{\gamma_1}{\gamma}$, гдѣ γ вѣсъ кубической единицы матеріала свода а γ_1 вѣсъ равномѣрно распредѣленной нагрузки на квадратную единицу, (въ томъ случаѣ если мы разсматриваемъ участокъ свода въ единицу длины).

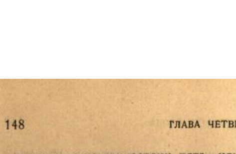
Грузовую площадь разсматриваютъ при вертикально дѣйствующей нагрузкѣ, но кромѣ того на сводъ могутъ дѣйствовать и силы, имѣющія горизонтальную составляющую, напримѣръ давленіе насыпи, принимаемое во вниманіе въ подъёмистыхъ сводахъ; въ пологихъ сводахъ обыкновенно принимаютъ во вниманіе лишь насыпь, соотвѣтствующую пролету свода и разсматриваютъ ее какъ нагрузку. Впрочемъ принятіе во вниманіе силъ, дѣйствующихъ на сводъ не вертикально, а наклонно, не представляетъ какихъ либо затрудненій въ изслѣдованіи равновѣсія свода.

Необходимо остановиться еще на терминахъ, употребляемыхъ при изученіи сводовъ.

Вершина свода, т. е. верхній клинъ свода называется **замкомъ**, нижніе клинья, соприкасающіеся съ опорами называются **пятами**. Разстояніе отъ уровня опоръ (или отъ хорды, стягивающей опредѣленныя точки въ опорахъ) до уровня нижней поверхности замковаго клина, или до опредѣленной точки въ замкѣ называется **подъемомъ** свода, или **стрѣлкою** подъёма свода. Эту величину будемъ называть черезъ f. Разстояніе между внутренними поверхностями пятъ, или между опредѣленными точками пятовыхъ швовъ называютъ пролетомъ свода, ее назовемъ черезъ l. По величинѣ отношенія f къ l подраздѣляютъ своды на подъёмистые, когда $\frac{f}{l} > \frac{1}{2}$ и пологіе, когда это отношеніе $< \frac{1}{2}$. Затѣмъ по формѣ образующей кривой, своды называются полуциркульными (круговыми), эллиптическими, коробовыми, параболическими.

48. Статическая опредѣлимость, сопротивленія опоръ, горизонтальный распоръ.

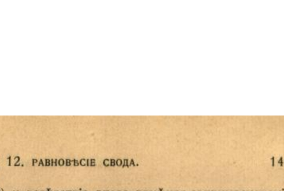
Разсмотримъ равновѣсіе внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на сводъ. При этомъ очевидно безразлично, будетъ ли сводъ состоять изъ клиньевъ, или представлять изъ себя сплошное тѣло. Внѣшнія силы, дѣйствующія на сводъ будутъ: 1) равнодѣйствующая собственнаго вѣса свода и вѣса нагрузки, изображенной на черт. 106 грузовою площадью; и 2) сопротивленія опоръ A и B, приложенныя къ плоскостямъ пятъ и направленныя или по нормалямъ къ этимъ плоскостямъ, или отклонящіяся отъ нормалей на углы не большіе угловъ тренія матеріаловъ пятъ и опоръ, въ одну или другую сторону. Первая изъ перечисленныхъ силъ задана, когда данъ чертежъ свода и извѣстна нагрузка на него дѣйствующая, а силы A и B, какъ силы пассивныя, должны быть опредѣлены. Всѣ перечисленныя силы располагаются въ одной плоскости—въ плоскости симметріи разсматриваемаго элемента свода, совмѣщенной съ плоскостью чертежа. Для изслѣдованія равновѣсія силъ на плоскости мы располагаемъ тремя условными уравненіями. Число неизвѣстныхъ, которыя требуется опредѣлить для рѣшенія: $2 . 3 = 6$, такъ какъ сила опредѣляется тремя элементами: величиною точкою приложеніе, и направленіемъ. Итакъ трехъ уравненій статики недостаточно для опредѣленія всѣхъ неизвѣстныхъ и задача будетъ $(6-3=3)$ трижды статически неопредѣлимою. Поэтому для изслѣдованія сводовъ при помощи статики сооруженій, задаютъ двѣ точки приложенія сопротивленій опоръ и еще одну точку въ сводѣ. Такое заданіе дѣлается или въ дѣйствительности, т. е. выполняется при помощи конструктивныхъ мѣръ, замѣняя пятовые и обыкновенно зам-



Черт. 106.

ковый швы шарнирами *) и вслѣдствіе этого замѣняя соприкосновеніе по плоскости соприкосновеніемъ въ точкѣ (или линіи)—или эти точки задаются лишь фиктивно, т. е. дѣлаются извѣстныя предположенія о точкахъ приложенія опоръ и третьей опредѣленной точкѣ, на основаніи извѣстныхъ соображеній. Въ такомъ случаѣ очевидно рѣшеніе задачи уже не будетъ математически правильнымъ и потому **статическая теорія сводовъ безъ шарнировъ или съ числомъ шарнировъ меньшимъ трехъ есть теорія приближенная.** Для точнаго рѣшенія вопроса, необходимо добавленіе уравненій, характеризующихъ деформацію свода. Такое рѣшеніе вопроса помимо своей сложности, не всегда можетъ быть признано правильнымъ, ввиду значительной неоднородности и даже измѣнчивости матеріала свода.

Когда **три точки въ сводѣ заданы,** то сопротивленія опоръ находятся весьма просто, разложеніемъ силы на двѣ пересѣкающихся составляющихъ, т. е. построеніемъ треугольника силъ. Пусть напр. на сводъ съ тремя шарнирами дѣйствуетъ одна сила P_1 лѣвѣе средняго шарнира, тогда правѣе силы P_1 дѣйствуютъ сопротивленія шарнировъ c и b, и эти сопротивленія могутъ взаимно уравновѣшиваться лишь въ томъ случаѣ, если будутъ между собою равны и направлены по прямой bc. Поэтому одна изъ составляющихъ на которую разложится сила P_1, для уравновѣшиванія съ сопротивленіями опоръ, будетъ направлена по cb, а слѣдовательно направленіе другой опредѣлится линіей as, такъ какъ для равновѣсія трехъ силъ, онѣ должны пересѣкаться въ одной точкѣ. Величина силъ A и B опредѣлится изъ треугольника силъ kmO_1. Точку O_1 можно принять за полюсъ, а mO_1 и nO_1 будутъ лучи, тогда as_1b будетъ веревочный многоугольникъ, построенный на силѣ P_1. Полныя сопротивленія опоръ A_1 и B_1 можно разложить на вертикальныя и горизонтальныя составляющія, для чего въ треугольникѣ силъ mkO_1 проведемъ горизонтальную линію изъ вершины O_1. Эта линія i_1O_1 будетъ также полюснымъ разстояніемъ для веревочнаго многоугольника as_1b. Вертикальныя составляю-

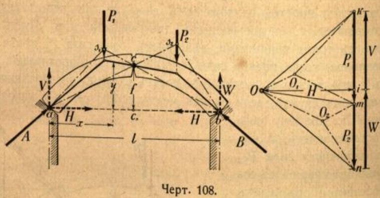


Черт. 107.

*) Шарнирнымъ, соединеніе двухъ тѣлъ называется тогда, когда два связанныя подвижнымъ образомъ или лишь опирающіяся тѣла, соприкасаются между собою — или при посредствѣ третьяго тѣла — (напр. цапфа) по кривой поверхности, или по линіи (напр. опирающаяся на ребро призма).

щія будутъ: для лѣвой опоры $V_1 = ki_1$, а для правой—$W_1 = i_1 m$; горизонтальная составляющая, называемая **распоромъ** свода будетъ $O_1 i_1 = H$.

Если мы теперь вообразимъ что и на правую часть свода дѣйствуетъ нѣкоторая сила P_2, черт. 108, то такой случай можно разсматривать, какъ общій случай нагрузки, ибо всегда активныя силы, дѣйствующія на каждый полусводъ можно замѣнить равнодѣйствующими. Сопротивленія опоръ, вызываемыя силою P_2 найдемъ, какъ указано выше, построивъ треугольникъ на силѣ P_2 и опредѣливъ полюсъ O_2 изъ условія, что лучи $mO_2 \parallel s_2 a$, и $nO_2 \parallel s_2 b$ и найдя, какъ только что указано, сопротивленія опоръ A_2 и B_2, а также горизонтальный распоръ H_2 и вертикальныя составляющія V_2 и W_2. Полныя



Черт. 108.

сопротивленія опоръ A и B, вызываемы обоими грузами найдемъ геометрическимъ сложеніемъ $\overline{A} = A_1 + \overline{A}_2$ и $\overline{B} = B_1 + \overline{B}_2$. Это произведено въ многоугольникѣ силъ, гдѣ построены $\triangle\, kO_1O$ и $\triangle\, nO_2O$, причемъ получены составляющія $kO = A$ и $nO = B$ и полюсъ O. Изъ построенія слѣдуетъ, что полюсъ O опредѣляется построеніемъ параллелограмма $O_1 m O_2 O$. Полюсу O соотвѣтствуетъ полюсное разстояніе H.

Полюсное разстояніе для веревочнаго многоугольника, построеннаго на силахъ P_1 и P_2 и проходящаго черезъ точки a, b и c, представитъ собою величину горизонтальнаго распора, вызываемаго совокупностью силъ P_1 и P_2. Вертикальныя составляющія будутъ $V = ki$ и $W = in$.

Что веревочный многоугольникъ, построенный по лучамъ Ok, Om и On и проходящій черезъ точку a, пройдетъ и черезъ точки b и c, было доказано въ курсѣ Статики ч. I стр. 50 и 51.

Весьма просто величины V, W и H опредѣлить и численно

Теперь представимъ себѣ, что силы P_1 и P_2 дѣйствуютъ на воображаемую балку ab. Тогда силы V и W найдемъ, какъ указано въ

главѣ I, по формулѣ (2). Затѣмъ составимъ выраженіемъ изгибающаго момента, какъ для простой балки:

$$M = Hy, \tag{84}$$

гдѣ y ордината многоугольника моментовъ, нами только что построеннаго и имѣющаго замыкающимъ бокомъ линію ab. Чтобы воспользоваться этимъ выраженіемъ независимо отъ чертежа веревочнаго многоугольника, опредѣлимъ величину M для точки c_1, лежащей на вертикали средняго шарнира. Для этой точки ордината y обращается въ $cc_1 = f$ и извѣстна заранѣе. Такимъ образомъ найдемъ

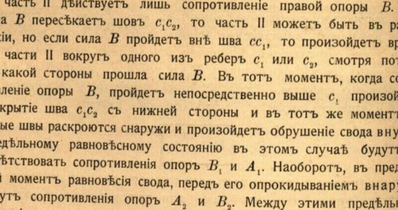
$$\boxed{H = \frac{M_c}{f}.} \tag{85}$$

Итакъ, величина горизонтальнаго распора равна изгибающему моменту, опредѣленному какъ для простой балки, относительно сѣченія, проходящаго черезъ данную въ замкѣ точку, дѣленному на стрѣлку свода.

49. Коэффиціентъ устойчивости.

Все сказанное о силахъ A, B и H, какъ было уже замѣчено, справедливо лишь для случая, когда извѣстны точки a, b и c. Но въ сводѣ, состоящемъ изъ клиньевъ и не имѣющимъ въ указанныхъ точкахъ шарнировъ, положеніе этихъ точекъ неизвѣстно. Точками a и b можетъ быть любая изъ точекъ пятовыхъ швовъ, а точка c можетъ быть принята не только въ произвольномъ мѣстѣ шва, но и положеніе шва, въ которомъ слѣдуетъ предположить точку c, заранѣе неизвѣстно. Такимъ образомъ, для безшарнирнаго свода можетъ быть безчисленное множество равновѣсныхъ состояній. Чтобы ограничить нѣсколько неопредѣленность задачи, можно прибѣгнуть къ слѣдующимъ соображеніямъ. При обрушеніи свода онъ раздѣлится на части. Такихъ частей будетъ во всякомъ случаѣ не меньше двухъ; между этими частями и неподвижными опорами будетъ три раскрывшіеся шва, наконецъ, въ моментъ раскрытія этихъ швовъ, касаніе между двумя частями свода и опорами произойдетъ въ трехъ точкахъ: по одной въ каждомъ изъ пятовыхъ швовъ и третья въ среднемъ изъ раскрывшихся швовъ. Послѣдній шовъ будетъ гдѣ либо близъ середины пролета. Если имѣемъ дѣло съ симметричнымъ сводомъ, нагруженномъ также симметрично, то естественно принять замковый шовъ за наиболѣе вѣроятный шовъ разрушенія, если же сводъ не симметриченъ или нагрузка не симметрична, то точныхъ указаній дать нельзя. Этотъ средній, изъ раскрывающихся въ предѣльный моментъ равновѣсія, шовъ назовемъ **главнымъ швомъ разрушенія**.

Изложенное ясно изъ чертежа 109. Пусть равнодѣйствующая внѣшнихъ силъ будетъ сила R, дѣйствующая на лѣвую часть свода I, отдѣленную отъ правой части II главнымъ швомъ разрушенія c_1c_2. На часть II дѣйствуетъ лишь сопротивленіе правой опоры B. Если сила B пересѣкаетъ швъ c_1c_2, то часть II можетъ быть въ равновѣсіи, но если сила B пройдетъ внѣ шва cc_1, то произойдетъ вращеніе части II вокругъ одного изъ реберъ c_1 или c_2, смотря потому, съ какой стороны прошла сила B. Въ тотъ моментъ, когда сопротивленіе опоры B, пройдетъ непосредственно выше c_1 произойдетъ раскрытіе шва c_1c_2 съ нижней стороны и въ тотъ же моментъ пятовые швы раскроются снаружи и произойдетъ обрушеніе свода внутрь. Предѣльному равновѣсному состоянію въ этомъ случаѣ будутъ соотвѣтствовать сопротивленія опоръ B_1 и A_1. Наоборотъ, въ предѣльный моментъ равновѣсія свода, передъ его опрокидываніемъ внаружу, будутъ сопротивленія опоръ A_2 и B_2. Между этими предѣльными значеніями сопротивленій опоръ можетъ заключаться безчисленное множество значеній A и B; всѣ лучи, соотвѣтствующіе въ треугольникѣ силъ этимъ промежуточнымъ значеніямъ сопротивленій опоръ, будутъ заключены внутри площади knO_1O_2. Чѣмъ величина этой площади (при данномъ значеніи R) больше, тѣмъ устойчивѣе будетъ сводъ. Значенія A_1 и B_1 соотвѣтствуютъ величинѣ горизонтальнаго распора H_1, а значеніе A_2, B_2, распору H_2. При этомъ, при опрокидываніи свода внутрь, будетъ $H_1 = \text{minimum}\ H$, а при опрокидываніи внаружу $H_2 = \text{maximum}\ H$. О степени устойчивости свода можно судить по величинѣ отношенія H max къ H min. Такое отношеніе называютъ коэффиціентомъ устойчивости свода. Впрочемъ въ настоящее время это понятіе утратило свое значеніе, такъ какъ величины H max и H min находятся различнымъ образомъ и тогда очевидно и коэффиціентъ устойчивости не есть величина опредѣленная. Напримѣръ, нѣкоторые изслѣдователи совершенно не разсматриваютъ точки c_2 и предполагаютъ, что давленіе части II на I всегда происходитъ въ верхней части шва c_1c_2. Тогда предѣльныя значенія для A и B будутъ иныя,



Черт. 109.

и отношеніе H max къ H min также измѣнится. Далѣе, если принять во вниманіе свойства матеріаловъ, то не всякое изъ положеній силъ A и B, заключающихся между предѣльными значеніями A_1 A_2 и B_1 B_2 безопасно для свода. Если матеріалъ свода не допускаетъ вытягивающихъ напряженій, то точки приложенія силъ, дѣйствующихъ на швы должны заключаться въ средней трети швовъ (см. сопротивленіе матеріаловъ). При такомъ условіи получимъ новыя предѣльныя значенія для A, B и для H min. и H max.

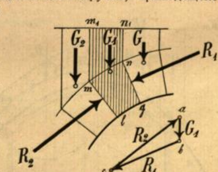
50. Кривая давленій.

До сихъ поръ мы разсматривали равновѣсіе свода въ его цѣломъ и интересовались лишь давленіями въ трехъ швахъ свода. Теперь посмотримъ, какимъ образомъ можно всего нагляднѣе опредѣлить давленіе въ любомъ швѣ свода. Для этого разсмотримъ равновѣсіе отдѣльнаго клина въ сводѣ. Выдѣлимъ одинъ изъ клиньевъ, напр. клинъ $nmlg$ и изслѣдуемъ условія его равновѣсія. На этотъ клинъ дѣйствуютъ слѣдующія силы:

1. Давленіе непрерывно распредѣленной нагрузки, приходящейся на этотъ клинъ. Величина этой нагрузки опредѣлится грузовою площадью mnm_1n_1.

2. Собственный вѣсъ клина, опредѣляемый грузовою площадью $mnlg$.

Обѣ эти силы вертикальны и равнодѣйствующая ихъ G_1 пройдетъ черезъ общій центръ тяжести площадокъ mnm_1n_1 и $mnlg$, если только непрерывная нагрузка приведена къ вѣсу кладки свода.



Черт. 110.

3. Давленіе на швъ ng, или что тоже—дѣйствіе праваго клина на разсматриваемый. Это давленіе замѣнимъ равнодѣйствующей R_1.

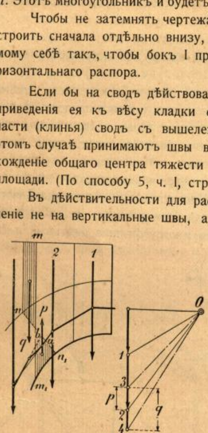
4. Давленіе на швъ ml, или дѣйствіе лѣваго клина на разсматриваемый. Это давленіе выразимъ равнодѣйствующей R_2.

Три силы R_1R_2 и G_1, какъ лежащія въ одной плоскости, должны пересѣкаться въ одной точкѣ и многоугольникъ силъ, на нихъ построенный, долженъ быть сомкнутый. Положимъ, что сила R_1 дана, какъ по величинѣ, такъ и по теченію. Тогда сила R_2 опредѣлится помощью треугольника силъ; затѣмъ, переходя къ изслѣдованію слѣдующаго (лѣваго клина), мы подобно предыдущему будемъ знать тяжести каждаго клина и къ каждому изъ нихъ приложимъ вѣсъ соотвѣтствующаго клина. На многоугольникѣ силъ отложимъ отъ точки d внизъ въ порядкѣ силы g_1 g_2 g_3 и g_4 и проведемъ $eo \parallel as$, а затѣмъ остальные лучи. Наконецъ черезъ точку c проведемъ веревочный многоугольникъ, послѣдняя сторона котораго должна пройти черезъ точку a. Этотъ многоугольникъ и будетъ многоугольникомъ давленій въ сводѣ.

Чтобы не затемнять чертежа, веревочный многоугольникъ можно строить сначала отдѣльно внизу, а затѣмъ перенести параллельно самому себѣ такъ, чтобы бокъ I прошелъ черезъ точку приложенія горизонтальнаго распора.

Если бы на сводъ дѣйствовала добавочная нагрузка, то послѣ приведенія ея къ вѣсу кладки свода, раздѣлили бы на отдѣльныя части (клинья) сводъ съ вышележащей нагрузкой. Обыкновенно въ этомъ случаѣ принимаютъ швы вертикальными, что облегчаетъ нахожденіе общаго центра тяжести каждаго участка, клина и грузовой площади. (По способу 5, ч. I, стр. 113, 114).

Въ дѣйствительности для расчета свода необходимо знать давленіе не на вертикальные швы, а на наклонные. Для перехода отъ давленія на вертикальный шовъ mm_1 къ давленію на дѣйствительный шовъ nn_1, какъ видно изъ чертежа 113, необходимо изъ давленія на вертикальный шовъ вычесть силу p, равную вѣсу треугольной призмы съ основаніемъ m_1n_1b и прибавитъ q вѣсъ призмы mnb. Для этого въ многоугольникѣ силъ отъ точки 2, конца силы 2, откладываемъ вверхъ отрѣзокъ 2—3, равный силѣ p и отъ точки 3 внизъ отрѣзокъ 3—4, изображающій силу q; изъ точки 3 и 4 проводимъ къ полюсу лучи 3—0 и 4—0; остается исправить построеніе веревочнаго многоугольника, включивъ въ многоугольникъ силъ силы p и q. Лучъ 4—0 опредѣлитъ величину и направленіе и точку приложенія b давленія на шовъ nn_1.



Черт. 113.

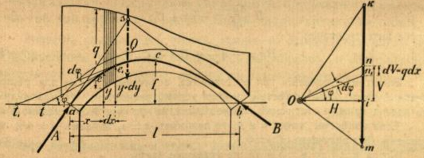
Пользуясь однако многоугольникомъ давленій для опредѣленія давленій въ сѣченіяхъ, проведенныхъ между двумя сосѣдними швами, мы уже не получаемъ непосредственно величины давленія въ сводѣ, а потому очевидно, что точность всей задачи зависитъ отъ числа клиньевъ, которое было принято при построеніи многоугольника давленій. При безграничномъ числѣ клиньевъ, многоугольникъ давленій обратится въ кривую линію, касательную къ многоугольнику давленій,

причемъ точки касанія расположены на вертикаляхъ участковъ, на которые была подраздѣлена грузовая площадь. Это было доказано на стр. 46. Такая кривая, соединяющая точки приложенія давленій въ швахъ свода, называется **кривою давленій** или **линіею давленій** въ сводѣ.

Когда построена кривая давленій, то направленіе давленія въ любомъ швѣ свода опредѣлится касательной къ кривой давленія въ точкѣ пересѣченія этой кривой съ даннымъ швомъ, а величина давленія опредѣлится, когда въ многоугольникѣ силъ проведемъ лучъ, параллельный построенной касательной.

Постоеніе кривой давленія, какъ касательной къ многоугольнику давленій всегда проще и быстрѣе чѣмъ ея опредѣленіе аналитическимъ путемъ, такъ какъ въ послѣднемъ случаѣ приходится имѣть дѣло съ дифференціальнымъ уравненіемъ, которое не всегда можно представить въ конечномъ видѣ.

Уравненіе кривой давленія должно связывать между собою величины x, y, абсциссу и ординату линіи давленій и $q = f(x)$, т. е. нагрузку на погонную единицу пролета свода. Пусть эта зависимость выражается нѣкоторою грузовою площадью, какъ на черт. 114 Построимъ равнодѣйствующую всей нагрузки въ видѣ многоугольника силъ, которыйвыразится нѣкоторою прямою $km = Q$, такъ какъ нагрузка дѣйствуетъ вертикально. Выберемъ полюсъ O при полюсномъ разстояніи H.



Черт 114.

Этотъ полюсъ опредѣлится если мы изъ точки m проведемъ лучъ mO параллельно касательной bs и изъ точки k лучъ kO, параллельно касательной as, такъ какъ эти касательныя опредѣляютъ положеніе равнодѣйствующей Q. Абсциссѣ x и ординатѣ y соотвѣтствуетъ точка e кривой давленія. Направленіе давленія въ этой точкѣ опредѣлится касательной et; пусть эта касательная составляетъ уголъ φ съ горизонтомъ. Величина этой силы найдется, когда проведемъ лучъ $nO = R$ подъ угломъ φ къ горизонту. Силу R разложимъ на составляющія V и H, тогда найдемъ

$$tg\,\varphi = \frac{V}{H}.$$

Теперь опредѣлимъ такую точку e_1, кривой давленія, которая соотвѣтствуетъ абсциссѣ $x + dx$. Касательная въ точкѣ e_1, образуетъ съ касательной въ точкѣ e уголъ $d\varphi$. Построимъ лучъ, параллельный этой касательно. Изъ дифференціальнаго исчисленія имѣемъ: $tg\varphi = \frac{dy}{dx}$, слѣдовательно

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V}{H}.$$

Для полученія $dtg\varphi$ надо это выраженіе продифференцировать

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = d\left(\frac{V}{H}\right).$$

Здѣсь величина H постоянная, а dV есть величина нагрузки, приходящейся на элементъ свода ee_1 и равна заштрихованной площадкѣ, т. е. $dV = -qdx$. Знакъ - опредѣляется теченіемъ силы dV. Перенеся H въ лѣвую часть,

$$Hd\left(\frac{dy}{dx}\right) = -q\,dx,$$

а по раздѣленіи на dx,

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = -q; \tag{86}$$

это есть дифференціальное уравненіе кривой давленія. Когда q задано въ функціи отъ x, то послѣ двойного интегрированія, найдемъ уравненіе кривой давленія въ конечномъ видѣ, если только входящіе при интегрированіи произвольныя постоянныя могутъ быть опредѣлены.

Для случая когда величина q постоянна, задача доводится до конца весьма просто.

Первое интегрированіе даетъ:

$$H\frac{dy}{dx} = -qx + C_1;$$

второе интегрированіе:

$$Hy = -q\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2. \tag{87}$$

Въ этомъ уравненіи три постоянныхъ величины, которыя для рѣшенія задачи должны быть извѣстны помимо условій равновѣсія. Отсюда видимъ, что задача трижды статически неопредѣлима, на что уже было указано выше.

Если извѣстны точки a и b, то положивъ $x = o$, найдемъ $y = o$ и изъ уравненія (87) получаемъ $C_2 = O$.

Когда $x = l$ то $y = o$ и то же уравненіе даетъ:

$$C_1 = \frac{ql}{2}.$$

Уравненіе кривой давленія, которое въ этомъ случаѣ есть парабола, можно представить въ видѣ:

$$y = \frac{q}{2H}(lx - x^2). \tag{88}$$

Величина y будетъ опредѣлена когда задана и третья постоянная - точка кривой давленія, напр. когда извѣстна стрѣлка подъема f. Въ этомъ случаѣ, если положить $y = f$, при $x = \frac{l}{2}$, найдемъ

$$H = \frac{ql^2}{8f}, \tag{89}$$

и ординаты кривой давленій опредѣлятся изъ выраженія

$$y = H\frac{f}{l}\left(x - \frac{x^2}{l}\right) \tag{90}$$

Когда положеніе трехъ точекъ a, b и c въ сводѣ не задано, т. е. въ сводѣ не имѣется трехъ шарнировъ, то каждому равновѣсному состоянію свода соотвѣтствуетъ нѣкоторая кривая давленія. Такимъ образомъ въ сводъ можно построить безчисленное множество кривыхъ давленій, удовлетворяющихъ условіямъ равновѣсія. Всѣ такія кривыя должны обладать слѣдующими свойствами.

1. Всѣ кривыя давленія должны заключаться въ толщѣ свода, т. е. кривая давленія ни въ одной точкѣ не должна пересѣкать образующихъ свода.

2. Касательная къ кривой давленія должна составлять съ нормалью къ любому шву уголъ, меньшій угла тренія.

Нарушеніе перваго условія влечетъ за собою опрокидываніе клиньевъ свода вокругъ ребра, соотвѣтствующаго точкѣ пересѣченія кривой давленія съ образующей; это было уже указано выше (**49**); Если же давленіе въ какомъ либо швѣ свода составляетъ съ нормалью къ этому шву уголъ большій угла тренія, т. е. когда не соблюдено второе изъ перечисленныхъ условій, то произойдетъ скольженіе смежныхъ клиньевъ другъ по другу. Этими двумя условіями и исчерпываются статическія требованія, предъявляемыя къ начертанію той или другой изъ произвольнаго числа кривыхъ въ сводѣ.

Значенія предѣльныхъ угловъ тренія и соотвѣтствующихъ имъ коеффиціентовъ тренія, для различныхъ матеріаловъ и состоянія ихъ поверхности соприкосновенія, сведены въ нижеприводимой таблицѣ. При этомъ данныя въ этой таблицѣ лишь круглыя, такъ какъ точность въ данномъ случаѣ не имѣетъ значенія.

Таблица коеффиціентовъ и угловъ тренія матеріаловъ кладки сводовъ.

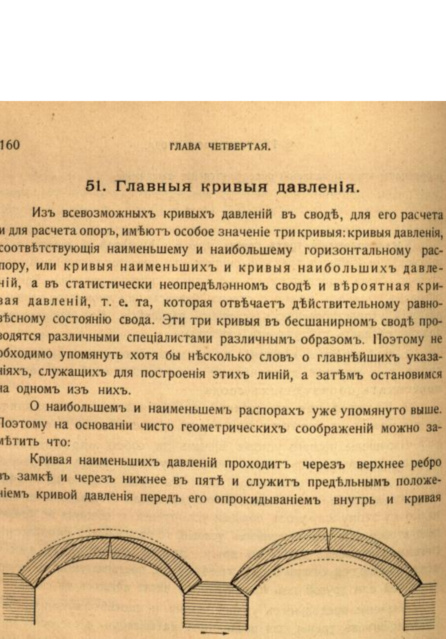
Матеріалъ клиньевъ.	Состояніе ихъ поверхностей.	$f = tg\,\varphi$	φ
Гранитъ	Гладкая поверхность по грубоотес	0,65	33°
	Поверхность смазана растворомъ	0,50	26°
Известнякъ	Чистоотесаная сухія	0,60	30°
	Грубоотесаныя »	0,80	38°
Песчаникъ	Чистоотесаныя »	0,70	35°
	» съ растворомъ	0,65	33°
Бутовый камень по глинѣ.	Сухія	0,50	27°
	Размягченный водою грунтъ	0,33	19°

51. Главныя кривыя давленія.

Изъ всевозможныхъ кривыхъ давленій въ сводѣ, для его расчета и для расчета опоръ, имѣютъ особое значеніе три кривыя: кривыя давленія, соотвѣтствующія наименьшему и наибольшему горизонтальному распору, или кривыя наименьшихъ и кривыя наибольшихъ давленій, а въ статистически неопредѣлэнномъ сводѣ и вѣроятная кривая давленій, т. е. та, которая отвѣчаетъ дѣйствительному равновѣсному состоянію свода. Эти три кривыя въ бесшанирномъ сводѣ проводятся различными специалистами различнымъ образомъ. Поэтому необходимо упомянуть хотя бы нѣсколько словъ о главнѣйшихъ указаніяхъ, служащихъ для построенія этихъ линій, а затѣмъ остановимся на одномъ изъ нихъ.

О наибольшемъ и наименьшемъ распорахъ уже упомянуто выше. Поэтому на основаніи чисто геометрическихъ соображеній можно замѣтить что:

Кривая наименьшихъ давленій проходитъ черезъ верхнее ребро въ замкѣ и черезъ нижнее въ пятѣ и служитъ предѣльнымъ положеніемъ кривой давленія передъ его опрокидываніемъ внутрь и кривая



Черт. 115.

наибольшихъ давленій проходитъ черезъ нижнее ребро въ замкѣ и черезъ верхнее въ пятѣ и есть предѣльное положеніе кривой давленія передъ его опрокидываніемъ внаружу.

Такое положеніе предѣльныхъ кривыхъ давленій даетъ весьма широкія предѣлы для возможныхъ равновѣсныхъ состояній свода; при такихъ условіяхъ коэффиціентъ устойчивости, повѣряемаго расчетомъ свода будетъ всегда весьма значительнымъ.

Если принять указанное положеніе предѣльныхъ кривыхъ давленія, то о положеніи вѣроятной кривой давленія сказать ничего нельзя. Можно только быть увѣреннымъ, что она будетъ лежать между указанными предѣльными значеніями и самое простое взять для этого среднее положеніе, т. е. принять такую величину горизонтальнаго распора, при которой кривая давленій будетъ наименѣе всего отклоняться отъ оси свода; полученная кривая и будетъ, вѣроятно, кривою

давленія. Это положеніе было подтверждено Винклеромъ—доказательствомъ, выведеннымъ при условіи незначительной толщины свода въ сравненіи съ пролетомъ. Многіе (преимущественно въ Германіи) инженеры придерживаются такого начертанія выроятной кривой давленія и до сихъ поръ, т. е. проводятъ кривую давленія черезъ середины замковаго и пятоваго швовъ.

Впервые опредѣленный взглядъ на положеніе кривой давленія въ сводѣ былъ высказанъ англійскимъ инженеромъ Мозелеемъ въ 1837 г. Его теорія, распространенная въ Германіи Шеффлеромъ: «принципъ наименьшихъ сопротивленій», давала, казалось, опредѣленный отвѣтъ на положеніе дѣйствительной кривой давленія. Сущность соображеній этой теоріи относительно точки приложенія и величины горизонтальнаго распора заключается въ слѣдующемъ:

Разсмотримъ равновѣсіе полусвода. Если мы къ замковому шву будемъ прикладывать нѣкоторую силу H—горизонтальный распоръ, возрастающую отъ нуля, то полусводъ до тѣхъ поръ не будетъ уравновѣшенъ, пока сила H не достигнетъ наименьшей возможной величины горизонтальнаго распора; это будетъ та величина при которой кривая давленія касается верхняго ребра въ замкѣ и нижняго въ пятѣ, т. е. то, что выше названо H_{min}. Полусводъ начнетъ опрокидываться внаружу при такомъ наименьшемъ изъ возможныхъ распоровъ, которому соотвѣтствуетъ кривая давленія, приложенная въ той же верхней точкѣ замка и касающаяся верхняго же ребра въ пятѣ. Теорія Мозелей'я (Шеффлера) въ настоящее время совершенно оставлена, и если здѣсь о ней упомянуто, то только потому, что еще и въ самое послѣднее время нѣкоторые инженеры проводили обѣ предѣльныя кривыя давленія черезъ верхнее ребро въ замкѣ. При этомъ способѣ разница въ H_{min} и H_{max} меньше чѣмъ при проведеніи H_{max} черезъ нижнее ребро замка и потому для достиженія опредѣленной величины коеффиціента устойчивости, каковой обыкновенно колеблется въ предѣлахъ 1,25—2, требуется большая толщина свода, т. е. такой способъ служитъ въ пользу устойчивости свода.

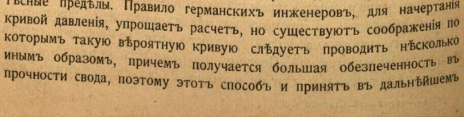
Принципъ наименьшихъ сопротивленій пытался разрѣшить задачу, исходя изъ положенія объ абсолютной твердости клиньевъ свода. Въ дѣйствительности это не имѣетъ мѣста и, при созданіи теоріи о положеніи кривой давленія, надо считаться съ данными сопротивленія матеріаловъ.

Если клинья свода и представляютъ изъ себя матеріалъ значительной твердости, то промежутки между ними—швы, заполняются матеріаломъ или весьма малой твердости, или во всякомъ случаѣ твердости незначительной. Поэтому ни одна изъ кривыхъ давленія въ дѣйствительности не можетъ касаться верхнихъ или нижнихъ реберъ клиньевъ. Дѣйствительно, проще всего принять что напряженія въ ребрахъ клина слѣдуютъ линейному закону, т. е. распредѣляются по закону Бернулли (Навье), а тогда, какъ извѣстно, при эксцентричномъ дѣйствіи нормальной къ сѣченію, т. е. къ шву силы (когда кривая давленія не проходитъ черезъ середину шва) возможно появленіе вытягивающихъ напряженій, (**45**, **53**), а такихъ напряженій матеріалъ, заполняющій швы свода, не выдерживаетъ, или напряженія могутъ быть лишь весьма малы. Если кривая давленія приближается къ одному изъ наружныхъ реберъ свода, напряженія въ немъ значительно возрастаютъ и когда кривая коснется этого ребра, то напряженія будутъ безконечно большими. Другими словами матеріалъ, заполняющій швъ свода, сожмется и слѣдовательно кривая давленія сейчасъ же отойдетъ отъ наружнаго ребра внутрь. Далѣе, на томъ же основаніи, какъ только кривая давленія выйдетъ изъ ядра сѣченія, т. е. изъ средней трети свода, въ противоположной крайней точкѣ шва должна появиться трещина. Изъ этихъ соображеній вытекаетъ важное заключеніе для сводовъ, построенныхъ изъ матеріаловъ, **въ которыхъ не допускается вытягивающихъ напряженій**:

3. *Всѣ кривыя давленій должны заключаться въ средней трети свода.*

Это правило должно быть прибавлено къ первымъ двумъ указаннымъ на стр. 159, для начертанія кривой давленія, почему и помѣчено цифрою 3.

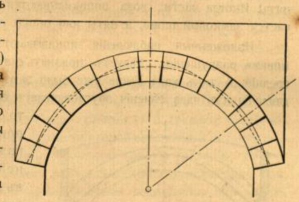
Такимъ образомъ предѣльное положеніе кривыхъ давленія въ бесшарнирномъ сводѣ соотвѣтствуетъ чертежу 116. Линія наибольшихъ давленій будетъ самою плоскою, а линія наименьшихъ давленій самою выпуклою изъ кривыхъ давленія, начерченныхъ въ средней трети свода.



Черт. 116.

Теперь, для положенія вѣроятной кривой давленія, имѣемъ болѣе тѣсные предѣлы. Правило германскихъ инженеровъ, для начертанія кривой давленія, упрощаетъ расчетъ, но существуютъ соображенія по которымъ такую вѣроятную кривую слѣдуетъ проводить нѣсколько инымъ образомъ, причемъ получается большая обезпеченность въ прочности свода, поэтому этотъ способъ и принятъ въ дальнѣйшемъ

изложеніи. Основаніемъ для начертанія вѣроятной кривой давленія служатъ видимыя деформаціи сводовъ и наблюденіе надъ ихъ разрушеніемъ. При раскружаливаніи сводовъ, какъ извѣстно, происходитъ ихъ осѣданіе, обусловливаемое сжатіемъ еще не вполнѣ отвердѣвшихъ швовъ. Еслибы дѣйствительная (вѣроятная) кривая давленій совпадала съ осью свода, или отъ нея мало бы отклонялось, то сжатіе всѣхъ швовъ было бы одинаковымъ. Въ дѣйствительности этого не наблюдается. Средняя часть свода понижается всего болѣе, причемъ наиболѣе всего сжимаются верхніе швы снаружи. Затѣмъ весьма часто появляются видимыя трещины вблизи наружной поверхности свода на высотѣ $^1/_3$—$^1/_2$, считая отъ пятъ, наконецъ пятовые швы также сжимаются замѣтнымъ образомъ. Такимъ образомъ картина сжатія швовъ можетъ быть ясно усмотрѣна изъ чертежа 117.



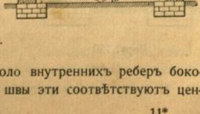
Черт. 117.

Изъ него слѣдуетъ, что кривая давленія отклоняется отъ оси свода въ замкѣ и между пятами и замкомъ.

Наблюденіе надъ разрушеніемъ сводовъ вполнѣ подтверждаютъ это положеніе. Типичные случаи разрушенія сводовъ представлены на чертежахъ 118.

Въ полуциркульныхъ сводахъ разрушеніе происходитъ чаще всего такъ: верхнія части свода опускаются внизъ, взаимно упираясь

I



II III

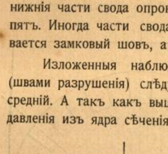
Черт. 118.

у верхней точки замка и вращаясь около внутреннихъ реберъ боковыхъ швовъ, открывающихся внаружу; швы эти соотвѣтствуютъ центральному углу около 120°. Въ другихъ случаяхъ происходитъ часто скольженіе средней части внизъ, вдоль боковыхъ швовъ (III), причемъ нижнія части свода опрокидываются внаружу, вращаясь около реберъ пятъ. Иногда части свода опрокидываются внутрь, причемъ раскрывается замковый шовъ, а пяты или опоры скользятъ внаружу (II).

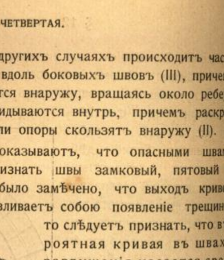
Изложенныя наблюденія показываютъ, что опасными швами (швами разрушенія) слѣдуетъ признать швы замковый, пятовый и средній. А такъ какъ выше уже было замѣчено, что выходъ кривой давленія изъ ядра сѣченія обусловливаетъ собою появленіе трещинъ, то слѣдуетъ признать, что вѣроятная кривая въ швахъ разрушенія касается средней трети свода; при этомъ въ замкѣ она стремится выйти внаружу, а въ среднемъ швѣ разрушенія, который назовемъ швомъ перелома — внутрь. Черт. 119.

Черт. 119.

Сказанное не относится къ готическимъ или подъёмистымъ параболическимъ сводамъ, въ особенности, когда они подвержены боковымъ давленіямъ, напр., давленіямъ отъ насыпи, если надъ самимъ сводомъ толщина этой насыпи незначительна. Въ этомъ случаѣ замковый шовъ можетъ раскрыться внаружу, а шовъ перелома, внутрь какъ указано на черт. 120.



Черт. 120



Черт. 121.

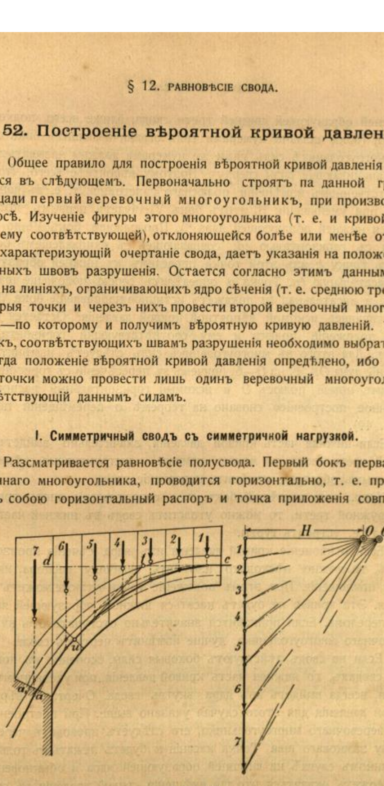
Поэтому кривая давленія соотвѣтствуетъ чертежу 121.

52. Построеніе вѣроятной кривой давленія.

Общее правило для построенія вѣроятной кривой давленія заключается въ слѣдующемъ. Первоначально строятъ па данной грузовой площади первый веревочный многоугольникъ, при произвольномъ полюсѣ. Изученіе фигуры этого многоугольника (т. е. и кривой давленія, ему соотвѣтствующей), отклоняющейся болѣе или менѣе отъ кривой, характеризующій очертаніе свода, даетъ указанія на положеніе вѣроятныхъ швовъ разрушенія. Остается согласно этимъ даннымъ выбрать на линіяхъ, ограничивающихъ ядро сѣченія (т. е. среднюю треть) нѣкоторыя точки и черезъ нихъ провести второй веревочный многоугольникъ—по которому и получимъ вѣроятную кривую давленій. Такихъ точекъ, соотвѣтствующихъ швамъ разрушенія необходимо выбрать три, и тогда положеніе вѣроятной кривой давленія опредѣлено, ибо черезъ три точки можно провести лишь одинъ веревочный многоугольникъ, сотвѣтствующій даннымъ силамъ.

I. Симметричный сводъ съ симметричной нагрузкой.

Разсматривается равновѣсіе полусвода. Первый бокъ перваго веревочнаго многоугольника, проводится горизонтально, т. е. представляетъ собою горизонтальный распоръ и точка приложенія совпадаетъ



Черт. 122.

съ верхнею гранью ядра сѣченія, т. е. бокъ I проходитъ черезъ точку c. Пусть выбранному горизонтальному распору соотѣтствуетъ полюсъ O_1. Разсматривая полученный веревочный многоугольникъ, замѣчаемъ, что къ нижней образующей средней трети свода, ближе всего подходитъ бокъ VI, (бока названы нумерами силъ ограничивающихъ бока слѣва а въ многоугольникѣ силъ тѣми же нумерами должны называться лучи, ограничивающіе силы сверху). Поэтому вѣроятнѣе всего, что при соотвѣтственномъ измѣненіи полюснаго разстоянія, т. е. въ данномъ случаѣ при уменьшеніи H_I этотъ бокъ VI, будетъ первымъ, который коснется нижней образующей ядра *). Продолживъ бокъ VI до пересѣченія съ горизонталью cd, совпадающей съ направленіемъ бока I, найдемъ точку t; изъ этой точки проведемъ къ нижней образующей ядра касательную tu. Точка u опредѣлитъ собою положеніе шва перелома, а касательная tu покажетъ истинное направленіе бока VI, соотвѣтствующее искомой вѣроятной кривой давленія. Остается найти новое положеніе полюса и ему соотвѣтствующій горизонтальный распоръ. Для этого въ многоугольникѣ силъ слѣдуетъ измѣнить направленіе луча O_1—6, на O—6, причемъ въ пересѣченіи съ горизонталью получимъ новый полюсъ O и искомый горизонтальный распоръ H. Указанное построеніео сновано на теоремѣ о перемѣщеніи полюса. (I, стр. 49).

Если нижняя часть кривой давленія значительно выйдетъ изъ средней трети свода, то можно принять конструктивныя мѣры, или приличнымъ образомъ измѣнить начертаніе свода.

Напр., если послѣдній бокъ, т. е. сопротивленіе опоры пройдетъ въ наружной трети, то можно утолстить сводъ въ нижней части снаружи, т. е. устроить гурты.

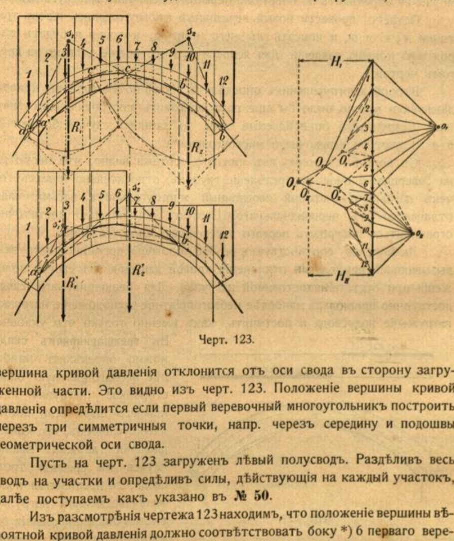
Если отклоненіе кривой давленія изъ ядра сѣченія произойдетъ внутрь, то можно нѣсколько измѣнить величину распора, или его точку приложенія. При этомъ положеніе точки u также можетъ измѣниться. Эта кривая не будетъ касаться нижней образующей ядра въ швѣ перелома. Если приходится значительно отступать отъ второго веревочнаго многоугольника, лучше измѣнитъ чертежъ свода.

Если на сводъ дѣйствуютъ боковыя силы, особенно въ повышенныхъ сводахъ, то нижняя часть кривой давленія, при указанномъ построеніи, всегда выйдетъ изъ ядра внутрь свода. Очертаніе вѣроятной кривой давленія для этого случая указано выше. При построеніи перваго веревочнаго многоугольника, его слѣдуетъ проводитъ черезъ середину замковаго шва Точка касанія u будетъ лежать въ только что указанномъ случаѣ на внѣшней образующей ядра и обыкновенно выше. Можетъ оказаться, что для вмѣщенія кривой давленія въ среднюю треть свода, ее придется провести въ замкѣ даже ближе къ нижней образующей ядра.

*) Нижней и верхней образующими ядра будемъ условно называть линіи, выдѣляющія среднюю треть свода.

II. Односторонняя нагрузка симметричнаго свода.

Самымъ невыгоднымъ случаемъ несимметричной нагрузки можно считать загруженіе одного полусвода; тогда кривая давленія наиболѣе отклоняется отъ своего нормальнаго положенія. Въ этомъ случаѣ замковый шовъ уже не будетъ главнымъ швомъ разрушенія, такъ какъ



Черт. 123.

вершина кривой давленія отклонится отъ оси свода въ сторону загруженной части. Это видно изъ черт. 123. Положеніе вершины кривой давленія опредѣлится если первый веревочный многоугольникъ построить черезъ три симметричныя точки, напр. черезъ середину и подошвы геометрической оси свода.

Пусть на черт. 123 загруженъ лѣвый полусводъ. Раздѣливъ весь сводъ на участки и опредѣливъ силы, дѣйствующія на каждый участокъ, далѣе поступаемъ какъ указано въ **№ 50.**

Изъ разсмотрѣнія чертежа 123 находимъ, что положеніе вершины вѣроятной кривой давленія должно соотвѣтствовать боку *) 6 перваго веревочнаго много угольника; далѣе бокъ 5 наиболѣе приближается къ верхней образующей ядра. Затѣмъ бокъ 10 наиболѣе приближается къ нижней образующей ядра. Такимъ образомъ положеніе вѣрно швовъ разрушенія выяснилось и вѣроятную кривую слѣдуетъ провести черезъ точки b' и c'. Что касается до третьей точки, то ее надо предполо-

*) Номеръ бока названъ номеромъ груза ограничивающаго бокъ справа.

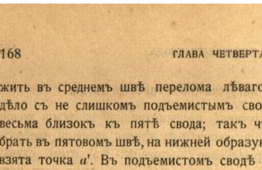
жить въ среднемъ швѣ перелома лѣваго полусвода и если имѣемъ дѣло съ не слишкомъ подъемистымъ сводомъ, то этотъ шовъ будетъ весьма близокъ къ пятѣ свода; такъ что третью точку можно выбрать въ пятовомъ швѣ, на нижней образующей ядра. Въ данномъ случаѣ взята точка a'. Въ подъемистомъ сводѣ эта точка поднимется выше и можно ее опредѣлить по очертанiи перваго веревочнаго многоугольника.

Остается провести новый веревочный многоугольникъ черезъ три точки a', c' и b', и вписать въ него кривую, которая и будетъ вѣроятною кривою давленiй. Для ясности это построенiе сдѣлано на другомъ чертежѣ.

Второй многоугольникъ опредѣлитъ собою новую вершину кривой давленiя и можно было бы еще разъ исправить построенiе, намѣтивъ швы разрушенiя, опредѣляемые напр. въ данномъ случаѣ боками 2, 6 и 11 второго веревочнаго многоугольника.

Съ другой стороны, изъ нижняго чертежа видно, что несмотря на совершенно иное распредѣленiе грузовъ, относительно новыхъ точекъ a', b' и c' — второй веревочный многоугольникъ весьма мало отличается отъ первоначальнаго. Поэтому обыкновенно достаточно ограничиться построемъ перваго веревочнаго многоугольника.

Любому шву соотвѣствуетъ особое положенiе временной нагрузки, вызывающей наибольшiя отклоненiя кривой давленiя отъ своего положенiя при отстствiи постоянной нагрузки. Для безшарнирнаго свода достаточно принять за наиболѣе неблагопрiятное расположенiе нагрузки загруженiе полусвода и поступить, какъ именно только что указано.



Черт. 124.

Въ **трехшарнирномъ сводѣ** можно опредѣлить наиболѣе неблагопрiятную одностороню нагрузку для каждаго шва. Если поставлено условiемъ, что кривая давленiя должна заключаться въ средней трети свода, то предѣльныя положенiя временной нагрузки, вызывающiя наибольшiя отклоненiя кривой давленiя найдутся слѣдующимъ образомъ. Строимъ предѣльныя направленiя опорныхъ сопротивленiй для груза дѣйствующаго на одинъ полусводъ какъ указано въ **№ 48** для двухъ крайнихъ точекъ ядра. Когда грузъ пройдетъ черезъ точку c_0 сопротивленiе лѣвой опоры пройдетъ черезъ верхнюю точку ядра. Всякiй грузъ лежащiй лѣвѣе точки c_0 вызоветъ уже отрицательное значенiе для напряженiя σ_u въ противоположномъ

ребрѣ, а всякiй грузъ правѣе c_0 положительное значенiе напряженiя σ_u. Точка c_0 будетъ точкою раздѣла нагрузки; для полученiя наибольшаго отклоненiя кривой, давленiя вверхъ надо загрузить лѣвую часть свода, вплоть до точки раздѣла нагрузки. Обратно для полученiя наибольшаго отклоненiя кривой давленiя внизъ, надо грузить правую часть, причемъ точка раздѣла нагрузки будетъ c_u. Дальнѣйшiя поясненiя къ этому см. въ **№ 53**.

III. Несимметричный сводъ.

Первый веревочный многоугольникъ проводимъ черезъ вершину и основанiя геометрической оси свода. Вершина опредѣляется точкой касанiя, касательной, параллельной хордѣ, стягивающей основанiя оси. Когда первый веревочный многоугольникъ полученъ, то опредѣляемъ новыя три точки въ средней трети свода, какъ указано выше и черезъ нихъ проводимъ вѣроятную кривую давленiя.

Черт 125.

На черт. 125 первый веревочный многоугольникъ проведенъ черезъ точки a, b и c, причемъ оказалось, что его бока приближаются къ образующимъ ядро сѣченiя въ точкахъ a', b' и c'; черезъ эти точки и проведена кривая давленiя.

При односторонней нагрузкѣ, необходимо изслѣдовать два случая: загруженiе части свода лѣвѣе полученнаго главнаго шва разрушенiя и загруженiе части свода правѣе этого шва.

IV. Своды подъ насыпями.

Въ этомъ случаѣ кромѣ вертикальныхъ силъ являются и наклонныя. Веревочный многоугольникъ строится на равнодѣйствующихъ, изъ которыхъ каждая представляетъ изъ себя вертикальную силу—грузъ клина и наклонную—давленiе земли на этотъ клинъ.

Если вся насыпь по отношенiю къ своду незначительна, то давленiе на клинья можно опредѣлить, какъ на подпорную стѣнку (см. давленiе на ломаную стѣнку); если же наоборотъ размѣры свода по отношенiю къ насыпи незначительны, или глубина погруженiя свода велика, то такая постановка вопроса была бы ошибочна. Дѣйствительно при большой глубинѣ, мы получили бы чудовищные размѣры давленія земли, между тѣмъ, какъ изъ практики извѣстно, что наоборотъ чѣмъ глубже отъ поверхности мы зарываемся, тѣмъ большую встрѣчаемъ связь между частицами земли, такъ что является возможность отрывать галлереи, пользуясь весьма слабою одеждою стѣнокъ и верхняго покрытія. *Такимъ образомъ трактовать насыпь какъ идеально сыпучее тѣло можно лишь вблизи поверхности земли.* Поэтому мы и не распространяли выше теоріи давленія земли на подпорную стѣнку, для случая давленія въ неограниченной насыпи подъ свободною поверхностью, какъ то иногда дѣлается *).

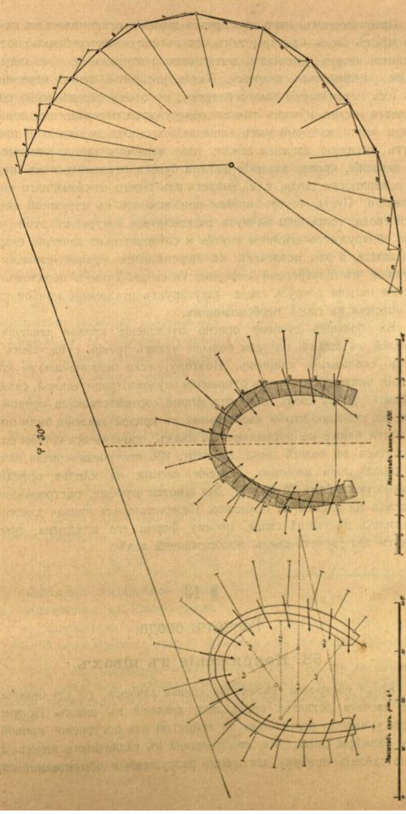
Расчетъ давленія земли на сводъ, лежащій вдали отъ свободной поверхности долженъ быть произведенъ въ предположеніи существованія кромѣ тренія еще и сцѣпленія между частицами земли. Такая постановка вопроса требуетъ особаго изслѣдованія и потому въ настоящемъ учебникѣ и не дается указаній для расчета сводовъ глубоко засыпанныхъ въ землѣ.

Итакъ, будемъ опредѣлять давленіе земли на сводъ, какъ давленіе на подпорную стѣнку.

Остается только условиться относительно угла φ_1. Такъ какъ сводъ подъ насыпью является болѣе уравновѣшеннымъ чѣмъ сводъ, стоящій свободно, то слѣдуетъ принять такое направленіе давленія, которое наиболѣе измѣняетъ форму кривой давленія въ сводѣ подъ насыпью, сравнительно со сводомъ свободно стоящимъ, а это будетъ если положимъ $\varphi_1 = 0$. При этомъ, какъ видѣли выше (**37**), величина давленія земли будетъ на 20—25% больше, нежели въ присутствіи тренія земли о стѣнку. Такое допущеніе не будетъ въ противорѣчіи съ дѣйствительностью. Вода, заключенная въ грунтѣ, обсыпающемъ сводъ, задерживается при своемъ движеніи сводомъ, непропускающимъ или мало пропускающимъ влагу и такимъ образомъ поверхность свода, окружена прослойкою грунта, насыщеннаго водою и слѣдовательно коэффиціентъ тренія насыпи о сводъ долженъ быть весьма малъ.

При начертаніи кривой давленія въ сводѣ, обсыпанномъ землею, не слѣдуетъ добиваться умѣщенія кривой давленія въ средней трети свода, что весьма часто можетъ оказаться затруднительнымъ и поведетъ къ принятію излишней толщины свода. Насыпь, окружающая сводъ, сама препятствуетъ опаснымъ отклоненіямъ кривой давленія, что можно себѣ объяснить слѣдующимъ образомъ.

*) Въ послѣднемъ случаѣ возникаетъ слѣдующее противорѣчіе Если размѣры сооруженія въ насыпи весьма незначительны по сравненію съ самою насыпью, то едва ли правильно пренебрегать сцѣпленіемъ, а если наоборотъ размѣры засыпаннаго сооруженія таковы, что малѣйшее перемѣщеніе сооруженія влечетъ перемѣщеніе всей насыпи, то насыпь нельзя принять неограниченною и достаточно пользоваться пріемами указанными въ подпорныхъ стѣнкахъ.



Черт. 126.

Предположимъ, напр. что кривая давленія отклонилась въ какомъ либо мѣстѣ свода,—внутрь, такъ что въ наружныхъ ребрахъ соотвѣтственныхъ швовъ появились вытягивающія напряженія, т. е. швы эти начали раскрываться внаружу. Такое раскрытіе швовъ невозможно безъ ихъ перемѣщенія также внаружу; но этому перемѣщенію сопротивляется насыпь и, какъ только обнаружится перемѣщеніе, появится отпоръ земли, который какъ выше видѣли всегда значительно превосходитъ активное давленіе земли; подъ вліяніемъ такого увеличившагося давленія, кривая давленія должна будетъ отклониться къ наружной поверхности свода, т. е. выйдетъ изъ своего отклоненнаго внутрь положенія. Пусть теперь кривая приблизилась къ наружной поверхности свода, тогда швы начнутъ раскрываться внутрь, въ этой части свода обнаружится движеніе внутрь и слѣдовательно давленіе снаружи уменьшится, а это повлечетъ къ перемѣщенію кривой давленія отъ наружной къ внутренней поверхности свода. Такимъ образомъ присутствіе насыпи вокругъ свода—регулируетъ отклоненіе кривой давленія, опасныя въ сводѣ необсыпанномъ.

Въ большей степени опасно отклоненіе кривой давленія отъ нормалей къ швамъ, на углы большіе угловъ тренія, слѣдствіемъ чего будетъ скольженіе клиньевъ. Поэтому, если первоначальная кривая давленія окажется въ этомъ отношеніи неудовлетворительной, слѣдуетъ измѣнить форму свода, дабы эта форма соотвѣтствовала кривой давленія, на столько, чтобы касательныя къ кривой давленія были по возможности ближе къ нормалямъ къ швамъ, причемъ вся кривая должна умѣститься въ толщѣ свода. На черт. 126 построена кривая давленія для свода подъ насыпью. Давленіе насыпи на клинья опредѣлено согласно указаніямъ **№ 40** и **41**. Для ясности чертежа, построеніе давленій земли на клинья не показано. Первоначальная кривая давленія не умѣстилась въ толщѣ свода, почему форма его измѣнена, причемъ принятъ для расчета сводъ, изображенный лѣвѣе.

§ 13.

Расчетъ свода.

53. Напряженіе въ швахъ.

Когда построена вѣроятная кривая давленія, то для окончательнаго расчета остается опредѣлить давленія въ швахъ. Полученныя цифры укажутъ достаточны ли принятыя для построенія кривой давленія размѣры свода, т. е. его толщина въ различныхъ швахъ. Достаточно сдѣлать повѣрку для швовъ разрушенія и обыкновенно опредѣ-

ляется давленіе въ замкѣ, швахъ перелома и въ пятахъ. Хотя указанный расчетъ относится къ предмету сопротивленія матеріаловъ, но обыкновенно для полноты статическаго изслѣдованія сводовъ, вопросъ о напряженіяхъ въ швахъ, какъ вытекающій естественно вслѣдъ за полученіемъ кривой давленія, разсматриваютъ попутно.

Распредѣленіе давленія предполагаютъ линейнымъ и потому для опредѣленія напряженія служитъ извѣстная формула Бернулли-Навье, для эксцентрическаго сжатія:

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W}} \qquad (91)$$

гдѣ N есть нормальная составляющая давленія въ данномъ сѣченіи, F площадь сѣченія, а W моментъ сопротивленія сѣченія.

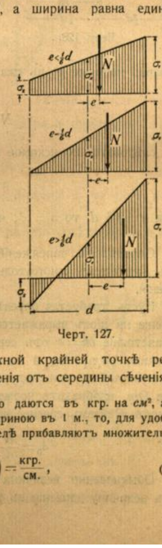
Такъ какъ въ данномъ случаѣ сѣченіе F есть прямоугольникъ, коего высота есть длина шва d, а ширина равна единицѣ, то $W = \frac{d^2}{6}$; назовемъ разстояніе точки приложенія (кривой) давленія отъ ц. т. сѣченія, т. е. отъ его середины черезъ e; въ такомъ случаѣ находимъ напряженія въ крайнихъ ребрахъ *).

$$\sigma = \frac{N}{d} \pm \frac{6\,Ne}{d^2} = \frac{N}{d}\left(1 \pm \frac{6\,e}{d}\right). \qquad (92)$$

Діаграмма напряженій, опредѣленныхъ по этой формулѣ имѣетъ видъ, указанный на черт 127.

Когда $e = \frac{1}{6}\,d$, т. е. кривая давленія проходитъ черезъ границу средней трети (ядра), то

$$\sigma_1 = 2\,\frac{N}{d}\,;\ \sigma_2 = 0, \qquad (93)$$



Черт. 127.

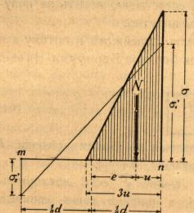
гдѣ σ_1 напряженіе въ крайней точкѣ ребра, ближайшаго къ кривой давленія, а σ_2 напряженіе въ противоположной крайней точкѣ ребра. При дальнѣйшемъ удаленіи кривой давленія отъ середины сѣченія, въ

*) Такъ какъ напряженія обыкновенно даются въ кгр. на $см^2$, а для изслѣдованія свода была выдѣлена арка шириною въ 1 м., то, для удобства пользованія формулою, часто въ знаменателѣ прибавляютъ множитель 100, т. е. имѣемъ

$$\sigma = \frac{N}{100\,d}\left(1 \pm \frac{6\,e}{d}\right) = \frac{\text{кгр.}}{\text{см.}}, \qquad (92\ а)$$

если e и d опредѣлены въ м.

противоположной части шва появляются вытягивающія напряженія, и въ этомъ случаѣ площадь напряженій расположится по обѣимъ сторонамъ оси абциссъ. Если матеріалъ не можетъ сопротивляться вытягиванію, то давленіе N должно быть распредѣлено лишь на части шва. Такъ какъ площадь давленія изобразится треугольникомъ съ основаніемъ равнымъ наибольшему давленію въ сжатомъ ребрѣ и вершиною въ той точкѣ гдѣ $\sigma_2 = 0$, то размѣры этого треугольника опредѣлятся изъ условія, что сила N должна проходить черезъ его центръ тяжести. Разстояніе силы N отъ основанія треугольника (отъ сжатаго ребра шва) $u = \frac{d}{2} - e$, а слѣдовательно высота $3\left(\frac{d}{2}-e\right)$ и основаніе равно напряженію въ сжатомъ ребрѣ σ. Поэтому находимъ



Черт. 128.

$$N = \frac{3\left(\frac{d}{2}-e\right)\sigma}{2}; \tag{94}$$

слѣдовательно искомое наибольшее напряженіе

$$\sigma = \frac{2}{3}\cdot\frac{N}{0{,}5\,d - e}.$$

Когда $e = 0{,}5\ d$, то $\sigma = \infty$, чему соотвѣтствуетъ полное раскрываніе шва.

Опредѣленіе напряженій удобно производить графически, пользуясь чертежемъ многоугольника силъ, путемъ весьма простого построенія.

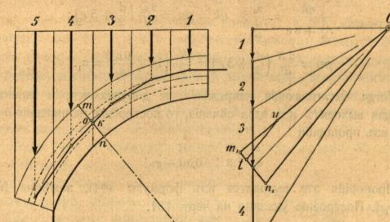
Пусть требуется опредѣлить давленіе на шовъ mn — черт. 129. Давленіе на шовъ выражается лучемъ 4-мъ и приложено въ точкѣ k, на разстояніе $ok = e$ отъ середины шва mn. Черезъ вершину силы 4 проводимъ $m_1 n_1 \parallel mn$ и на полученную линію опускаемъ изъ O перпендикуляръ Om_1; изъ полученной точки m_1 откладываемъ $m_1 n_1 = mn$. Линія Om_1 изобразитъ нормальную составляющую N полнаго давленія на шовъ. Найдемъ среднее давленіе на шовъ mn.

$$\sigma_0 = \frac{N}{d} = \frac{Om_1}{m_1 n_1} = \frac{\text{тоннъ}}{\text{метръ}}.$$

Обыкновенно величина силъ выражается въ тоннахъ, т. е. Om_1 даетъ величину давленія въ тоннахъ; ширина шва d также выражается

въ метрахъ; между тѣмъ напряженія выражаютъ преимущественно въ клгр. на кв. см. Зависимость между давленіемъ въ тон./м². и клгр./см.² такова:

$$\frac{1}{10}\ \frac{\text{тон.}}{\text{м}^2} = 1\ \frac{\text{кгр.}}{\text{см}^2}.$$



Черт. 129.

Поэтому если отложимъ $m_1 t = 0{,}1$ метра и проведемъ $tu \parallel n_1 O$, то найдемъ

$$m_1 u = \frac{1}{10}\ \frac{Om_1}{m_1 n} = \sigma_0 \cdot \frac{\text{кгр.}}{\text{см.}}$$

т. е. отрѣзокъ $m_1 u$ выразитъ среднее напряженіе σ_0 на шовъ mn въ кгр. на кв. см.

Дальнѣйшее построеніе указано уже на черт. 103 въ **№ 45**, а также на черт. 133. Можно также поступить такъ: изъ середины шва mn возставимъ перпендикуляръ и отложимъ $os = \sigma_0$; на разстояніи e проведемъ направленіе нормальной составляющей давленія на шовъ. Затѣмъ отъ середины шва отложимъ въ сторону силы N, отрѣзокъ $ok = 3e$ и изъ полученной точки $kq \perp mn$, наконецъ проводимъ линіи ms до пересѣченія съ kq въ точкѣ q и изъ этой точки $qp \parallel mn$. Остается соединить точку p съ s и продолжить линію ps до пересѣченія съ перпендикуляромъ въ точкѣ m; площадь, очерченная жирной линіей, будетъ площадь давленій на шовъ mn и напряженія въ крайнихъ ребрахъ будутъ σ_1 и σ_2.

Черт. 130.

Указанное построеніе соотвѣтствуетъ тому случаю, когда кривая давленія проходитъ въ ядрѣ сѣченія, а также если она лежитъ и внѣ ядра, но допускаются вытягивающія напряженія. Дѣйствительно, изъ подобія

$$\triangle mqk \infty \triangle mso,$$

$$\frac{qk}{\frac{d}{2}+3e} = \frac{\sigma_0}{\frac{d}{2}}; \quad qk = pn = \frac{2\sigma_0}{d}\left(\frac{d}{2}+3e\right);$$

$$pn = \frac{2N}{d^2}\left(\frac{d}{2}+3e\right) = \frac{N}{d}\left\{1+\frac{6e}{d}\right\} = \sigma_1.$$

Когда вытягивающія напряженія не допускаются, и равнодѣйствующая выходитъ изъ ядра сѣченія, то построеніе, напряженія σ слѣдуетъ изъ пропорціи

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{2}{3} \cdot \frac{d}{0{,}5d - e} \cdot$$

Пропорція эта выводится изъ формулы (94), замѣняя N черезъ $\sigma_0 d$. Построеніе указано на черт. 131.

Черт. 131.

Выраженіе для наибольшихъ напряженій въ ребрахъ шва иногда удобно представить въ иномъ видѣ. Если въ формулѣ (90) вмѣсто W подставить $W = kF$, гдѣ напр. для прямоугольнаго сѣченія $k = \frac{d}{6}$; затѣмъ величину M замѣнимъ черезъ $M = Ne$, то находимъ:

$$\sigma_1 = \frac{N}{k_2 F}(k_2 + e);$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{k_1 F}(k_1 - e);$$

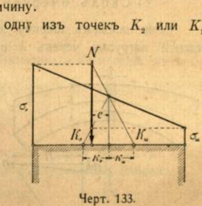
Черт. 132.

что можно написать болѣе кратко такъ:

$$\sigma_1 = \frac{M_{k2}}{W}; \qquad \sigma_2 = \frac{M_{k1}}{W}; \qquad (95)$$

гдѣ M_{k2} есть моментъ относительно точки K_2, а M_{k1}, моментъ относительно точки K_1. Знакъ σ опредѣляется знакомъ момента M_k, при условіи считать положительнымъ моментъ съ кажущимся вращеніемъ отъ ребра, соотвѣтствующаго данной точкѣ ядра—вверхъ и къ центру шва. Если сила N приложена внутри ядра, то, σ_1 и σ_2 всегда положительны и при вычисленіи моментовъ M_{k1} и M_{k2} слѣдуетъ обращать вниманіе лишь на ихъ численную величину.

Когда сила N проходитъ черезъ одну изъ точекъ K_2 или K_1, то моменты M_{k2} или M_{k1} обращаются въ нуль и напряженіе въ противоположномъ ребрѣ сѣченія принимаетъ значеніе нуля; это ясно также изъ діаграммы чертежа 133.



Черт. 133.

Всѣ указанія настоящаго № даютъ возможность повѣрить прочность уже существующаго свода или провѣрить правильность принятыхъ для расчетовъ размѣровъ.

54. Толщина свода.

Формулы, опредѣляющія толщину свода можно подраздѣлить на математически обоснованныя и на эмпирическія, но и тѣ и другія имѣютъ лишь приблизительное значеніе.

Такимъ образомъ этотъ номеръ подраздѣлимъ на двѣ части: сначала укажемъ формулы для опредѣленія толщины сводовъ, затѣмъ дадимъ указанія для проектированія формы свода, когда она не задана.

А. Формулы, математически обоснованныя.

а) Произвольная форма свода.

Величина горизонтальнаго распора можетъ быть опредѣлена, какъ указано выше, или по предварительному эскизу. Полагая, что вѣроятная кривая касается ядра въ замковомъ швѣ и задаваясь допускаемымъ напряженіемъ max. $\sigma = \sigma_k$, найдемъ

$$d_0 = \frac{2H}{\sigma_k},$$

причемъ приблизительную величину H возьмемъ по формулѣ (85).

Точно также для ширины пятоваго шва

$$d_1 = \frac{2A}{\sigma_k},$$

гдѣ сопротивленіе A опредѣляется, какъ указано выше: стр. 150, 153.

Если выборъ формы свода можетъ быть произволенъ, то рекомендуется построить предварительный эскизъ и опредѣлить приблизительно кривую давленія, а затѣмъ измѣнить форму свода такимъ образомъ, чтобы его ось совпадала съ кривой давленія. Такой сводъ называется сводомъ, очерченнымъ по кривой давленія.

b) Сводъ очерченъ по кривой давленія.

Если назовемъ ширину замковаго клина черезъ b, высоту приведеной нагрузки черезъ h и вѣсъ матеріала куб. м. свода γ, то грузъ, дѣйствующій на первый клинъ будетъ $q = \gamma bh$. Изъ чертежа слѣдуетъ, что два треугольника съ основаніями b и γbh, въ предѣлѣ, будутъ между собою подобны и слѣдовательно имѣемъ:

Черт. 134.

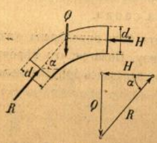
$$\frac{H}{\gamma bh} = \frac{\rho}{b},$$

гдѣ ρ есть радіусъ кривизны свода. Отсюда имѣемъ

$$H = \gamma h \rho. \qquad (96)$$

Этою формулою можно пользоваться какъ приближенною и въ тѣхъ случаяхъ, когда сводъ и не очерченъ по кривой давленія. Напр. для полуциркульнаго свода, можно положить $\rho = r$ — радіусу свода.

Если кривая давленія подходитъ близко къ оси свода, т. е. касательная въ кривой давленія нормальна къ швамъ, то толщину свода всего лучше опредѣлить изъ условія, чтобы напряженія во всѣхъ швахъ были одинаковы, тогда получимъ сводъ равнаго сопротивленія.



Черт. 135.

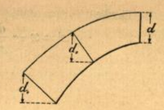
Ширина любого шва опредѣлится изъ пропорціи.

$$\frac{d}{d_0} = \frac{R}{H};$$

для любого шва имѣемъ:

$$\frac{R}{H} = \frac{1}{\cos\alpha},$$

гдѣ α есть уголъ образуемый силой R съ горизонтомъ.



Черт. 136.

Изъ этихъ пропорцій находимъ:

$$d = \frac{d_0}{\cos\alpha}, \quad d\cos\alpha = d_0 \qquad (97)$$

Т. е. вертикальная проекція шва должна равняться замковому шву.

Болѣе точное изслѣдованіе для свода, очерченнаго по кривой давленія заключается въ слѣдующемъ:

Выше имѣли (86):

$$H = q\,\frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Съ другой стороны изъ дифференціальнаго исчисленія извѣстно:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \qquad (98)$$

Замѣняя числитель этого выраженія черезъ $\sec^3\varphi$, гдѣ φ есть уголъ, образуемый радіусомъ кривизны съ вертикалью, найдемъ:

$$H = q\rho\cos^3\varphi; \qquad (99)$$

для вершины свода найдемъ, какъ уже видѣли выше (96):

$$H = q_0\rho_0.$$

Если σ_k есть допускаемое напряженіе, то (100)

$$\sigma_k d_0 = q_0\rho_0.$$

Здѣсь величина ρ_0 неизвѣстна. Обыкновенно при проектированіи свода, задается величина радіуса кривизны внутренней образующей свода. Пусть она будетъ ρ'. Выведемъ соотношеніе между величинами ρ_0 и ρ'. Проведемъ оси абсциссъ x и x', какъ указано на чертежѣ 137. Имѣемъ:

$$\rho' = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y'}{(dx')^2}}. \qquad (98a)$$

Согласно (97) найдемъ

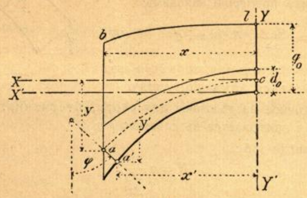
$$y - \frac{d_0}{2} = y' - \frac{d\cos\varphi}{2} = y' - \frac{d_0}{2}, \qquad (101)$$

или

$$y = y'.$$

Далѣе

$$x' = x - \frac{d_0}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi, \text{ или } x' = x - \frac{d_0}{2}\,\frac{dy}{dx};$$



Черт. 137.

Продифференцируемъ это выраженіе, тогда

$$dx' = dx - \frac{d_0}{2}\,\frac{d^2y}{dx} = dx\left(1 - \frac{d_0}{2}\,\frac{d^2y}{dx^2}\right). \tag{102}$$

Для вершины свода изъ (98), принимая во вниманіе, что $\frac{dy}{dx}$ обращается въ нуль и ρ обращается въ ρ_0, находимъ

$$\rho_0 = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}; \qquad \rho' = \frac{1}{\frac{d^2y'}{(dx')^2}};$$

но $(dy')^2 = dy^2$, а также (102)

$$(dx')^2 = dx^2\left(1 - \frac{d_0}{2\rho_0}\right)^2.$$

Подставляя эти значенія въ предыдущее равенство, найдемъ

$$\rho' = \rho_0\left(1 - \frac{d_0}{2\rho_0}\right)^2;$$

членъ $\left(\frac{d_0}{2\rho_0}\right)^2$ весьма малъ, поэтому можно написать

$$\rho' = \rho_0 - d_0; \qquad \rho_0 = \rho' + d_0; \tag{103}$$

поэтому согласно (100)

$$\sigma_k\, d_0 = q_0\,(\rho' + d_0);$$

отсюда получаемъ

$$\boxed{d_0 = \frac{q_0\,\rho'}{\sigma_k - q_0}.} \tag{104}$$

Для практическаго пользованія этой формулой, предположимъ, что внутренняя кривая свода есть парабола, радіусъ кривизны которой въ вершинѣ равенъ ея параметру. Положимъ

$$\rho' = \frac{l_0^2}{8 f_0},$$

сдѣ l_0 и f_0 пролетъ и стрѣла свода въ свѣту; тогда

$$d_0 = \frac{q_0\, l_0^2}{8 f (\sigma_k - q_0)}. \tag{105}$$

Чѣмъ больше отношеніе $\frac{f_0}{l_0}$, тѣмъ больше внутренняя кривая свода отличается отъ параболы. Чтобы принять это обстоятельство во вниманіе, профессоръ Мертенсъ совѣтуетъ къ послѣдней формулѣ прибавить членъ $0{,}20\left(1 + \frac{f_0}{l_0}\right)$, съ тѣмъ чтобы для весьма малыхъ отверстій наименьшая толщина свода въ замкѣ получалась $d_0 = 0{,}25$ м. Наконецъ выразимъ q_0 въ высотѣ приведенной нагрузки h_0 и вѣсѣ γ куб. м. кладки, тогда окончательная формула напишется такъ:

$$d_0 = \frac{\gamma\, h_0\, l_0^2}{8 f_0 (\sigma_k - \gamma h_0)} + 0{,}2\left(1 + \frac{f_0}{l_0}\right) \tag{106}$$

Эта формула, какъ математически обоснованная, можетъ быть особенно рекомендована.

Формулы Толкмитта для сводовъ, очерченныхъ по кривой давленія выведены математическимъ путемъ, при извѣстныхъ предположеніяхъ и допущеніяхъ. Знакомство съ выводами этихъ формулъ требуетъ разсмотрѣнія всей теоріи Толкмитта, почему и не можетъ быть здѣсь приведено. Слѣдуетъ лишь замѣтить, что формулы Толкмитта весьма часто употребляются при самыхъ строгихъ расчетахъ.

Толщина свода въ замкѣ *).

$$d_0 = \frac{0{,}5\,\eta \cdot f}{z + 015 f}, \tag{107}$$

здѣсь $z = z_1 + d_0 + 0{,}5\,\eta$ гдѣ z_1 высота забутки, а η приведенная высота временной нагрузки

$$d_0 = 0{,}000014\,\frac{\gamma}{\sigma_0}\,\frac{l^2}{f}\,(z + 0{,}2 f) \tag{108}$$

гдѣ σ_0 *среднее* давленіе въ замковомъ швѣ.

Величина e, f, η выражена въ метрахъ, и σ_0 въ кгр. на кв. см., а γ вѣсъ куб. м. матеріала въ кгр. Величина d_0 должна быть вычислена по обѣимъ формуламъ (107, 108). Первое условіе должно быть соблюдено, для того, чтобы кривая

*) Эта формула даетъ наиболѣе правильные результаты, когда площадь нагрузки ограничена горизонтальною линіею. Вмѣсто коеффиціентовъ 0,5 и 0,15 въ числителѣ и знаменателѣ можно брать соотвѣтственно 0,4 и 0,1.

давленія при самой невыгодной односторонней нагрузкѣ не выходили изъ внутренней трети сѣченія свода, а второе—для того чтобы напряженіе σ_{max} не превосходило наибольшаго допустимаго, причемъ при соблюденіи второго условія наибольшее напряженіе не превзойдетъ $2\,\sigma_0$. Изъ двухъ значеній полученныхъ для d_0 слѣдуетъ взять наибольшее.

Если извѣстна величина горизонтальнаго распора, то

$$d_0 = 0{,}06\,\frac{pl^2}{H}, \tag{109}$$

гдѣ H можно опредѣлить какъ указано выше, для свода очерченнаго по кривой давленія, а p временной нагрузки на погон. м. пролета.

В. Эмпирическія формулы.

Формулы Кавена для желѣзнодорожныхъ и уличныхъ сводовъ. Сводъ сложенъ изъ тесанаго камня (песчаникъ, известнякъ), надъ сводомъ насыпь отъ 0 до 1,0 метра. Пролетъ $l =$ до 30 м.

$$d_0 = 0{,}25 + l\left(0{,}025 + 0{,}0034\,\frac{l}{f}\right), \tag{110}$$

гдѣ l, f и d_0 въ метрахъ.

Для указанныхъ пролетовъ формула Кавена даетъ весьма хорошіе результаты.

Если высота насыпи $\eta_1 \lesseqgtr 10 \lesseqgtr 30$ м. и при пролетѣ $l \lesseqgtr 10$ м., для полуциркульнаго свода

$$d_0' = \nu\, d_0,$$

гдѣ для желѣзнодорожныхъ сводовъ $\nu = \sqrt{1 + \frac{\eta_1 - 1}{4{,}5}}$;

» » уличныхъ » $\nu = \sqrt{1 + \frac{\eta_1 - 1}{7}}$.

Для сводовъ изъ кирпича на цементномъ растворѣ

$$d_0'' = \mu\, d_0,$$

гдѣ для клинкернаго кирпича $\mu = \frac{1}{2}(3 - d_0)$

» » обыкновеннаго » $\mu = \frac{1}{2}(3{,}3 - d_0)$

Если въ этомъ случаѣ высота насыпи $\eta_1 > 1$ м., то полученныя значенія слѣдуетъ умножить на коеффиціентъ ν.

Формула Хэнеля для сводовъ изъ бутовой кладки и также при высотѣ насыпи $\eta_1 \lesseqgtr 1{,}0$ м. для сводовъ, въ которыхъ $\frac{f}{l} = \frac{1}{4}$ до $\frac{1}{6}$, т. е. для сводовъ со среднимъ подъемомъ

$$d_0 = m\sqrt{l} + 0{,}1, \tag{111}$$

въ метрахъ, причемъ коеффиціентъ m имѣетъ значеніе:

для желѣзнодорожныхъ мостовъ $m = 0{,}25$;

» уличныхъ » $m = 0{,}20$.

Этою формулою лучше всего пользоваться при пролетахъ $l = 10$ до 30 м.

Формулы Кавена и Хэнеля по своей простотѣ весьма удобно примѣнять при предварительныхъ расчетахъ, когда не можетъ еще быть рѣчи о точной необходимой толщинѣ свода.

Еще болѣе простыя, но и менѣе точныя **формулы Ронделе** (въ метрахъ).

1) Для полуциркульныхъ кирпичныхъ сводовъ:

$$d_0 = 0{,}02\,l \text{ до } 0{,}03\,l;$$

2) для бутовыхъ ненагруженныхъ сводовъ:

$$d_0 = 0{,}01\,l + 0{,}1; \tag{112}$$

3) для бутовыхъ и гранитныхъ нагруженныхъ сводовъ:

$$d_0 = 0{,}04\,l + 0{,}3.$$

55. Начертаніе свода.

Подъ начертаніемъ свода мы будемъ подразумѣвать, опредѣленіе формы свода. Первоначальные размѣры подбираются или на основаніи существующихъ сооруженій, или на основаніи приблизительныхъ формулъ, опредѣляющихъ толщину свода обыкновенно въ замкѣ и пятахъ, или только въ замкѣ, какъ указано въ **№ 54**.

Когда начертаніе формы свода зависитъ отъ проектирующаго, весьма выгодно совмѣщать ось свода съ кривой давленія. Это можно произвести графически, или аналитически, послѣ перваго приближенія. Для этого первоначально очерчиваютъ ось свода по произвольной кривой, по извѣстному способу строятъ многоугольникъ давленій, проводя его черезъ шарниры, d въ безшарнирномъ сводѣ черезъ точки a, b и c, лежащія на оси свода. Затѣмъ полученный многоугольникъ служитъ для начертанія оси новаго свода; послѣ вторичнаго построенія многоугольнкиа давленія уже для вновь начерченнаго свода, кривая давленія будетъ весьма близка къ оси свода. Въ исключительныхъ случаяхъ построеніе понадобится повторить еще разъ.

Если желательно получить ординаты кривой давленія численно, то, разбивъ сводъ на участки и опредѣливъ ихъ вѣсъ, находимъ ординаты кривой давленія изъ выраженія

$$y = \frac{M_0}{H},$$

гдѣ M_0 есть моментъ какъ для простой балки, H горизонтальный распоръ, опредѣляемый по формулѣ (85). Второе приближеніе получается подобнымъ же образомъ.

Такимъ образомъ мы получимъ кривую давленія, совпадающую съ осью свода, при данной грузовой площади, т. е. при данномъ состояніи нагрузки. При иномъ расположеніи временной нагрузки, произойдетъ отклоненіе кривой давленія отъ оси свода. Вопросъ заключается въ томъ: **при какомъ способѣ загруженія свода слѣдуетъ произвести совмѣщеніе кривой давленія съ осью свода, чтобы отклоненія кривой давленія отъ оси свода, при дѣйствіи подвижной нагрузки — были наименьшія?**

На чертежѣ 138 построены, при увеличенномъ вертикальномъ масштабѣ, слѣдующія три кривыя давленія, проходящія черезъ шарниры a, b и c (дѣйствительные или лишь воображаемые).

Черт. 138.

Линія I, наиболѣе крутая изъ симметричныхъ кривыхъ давленій, соотвѣтствуетъ нагруженному состоянію свода; линія II болѣе плоская, — кривая давленія для разгруженнаго свода; наконецъ линія III, соотвѣтствуетъ одностороннему загруженію. Изъ чертежа видно что наименьшія отклоненія кривыхъ давленія будутъ при такомъ начертаніи оси свода, когда ось свода пройдетъ по серединѣ заштрихованныхъ на чертежѣ площадокъ; а кривая давленія, проходящая по срединѣ между кривыми I и II, получится при величинѣ грузовой площади средней между G и $G + \eta l$, если G есть грузовая площадь, равная постоянной нагрузки, а η есть приведенныя высоты временной нагрузки. Величина средняя между этими двумя грузовыми площадями будетъ:

$$G + \frac{\eta l}{2}. \tag{113}$$

Итакъ, **наименьшее отклоненіе кривой давленія отъ оси свода получится при такомъ начертаніи оси свода, когда она совпадаетъ съ кривой давленія, построенной при грузовой площади, соотвѣтствующей постоянной нагрузкѣ и половинѣ временной, распредѣленной равномѣрно по всему пролету.**

Для дальнѣйшаго расчета рекомендуется руководствоваться формулами (105, 106) или формулами Толкмитта.

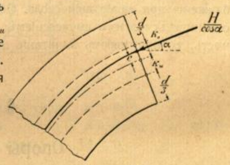
Въ **трехшарнирныхъ**, сводахъ, гдѣ кривая давленія можетъ быть опредѣлена строго точно, можно добиться наибольшей экономіи ма-

теріала, если опредѣлить форму свода и толщину свода по способу проф. Мёрша. Пусть кривая давленія отъ постоянной нагрузки опредѣлена или графически или найдена ея ордината изъ выраженія $Hy = M_0$; тогда извѣстно разстояніе e кривой давленія отъ оси свода въ любомъ сѣченіи.

При загруженіи лѣвой или правой части свода, считая отъ соотвѣтствующихъ точекъ раздѣла (стр. 168), будутъ происходить наибольшія отклоненія кривой давленія вверхъ или внизъ, причемъ будутъ соотвѣтственно возрастать напряженія въ верхнемъ или нижнемъ ребрахъ шва. Найдемъ **такое положеніе кривой давленія, соотвѣтствующей постоянной нагрузкѣ, а также такую толщину шва d, при которыхъ наибольшія напряженія въ крайнихъ ребрахъ при невыгоднѣйшемъ расположеніи нагрузки будутъ между собою равны.**

Въ выраженіяхъ (95) можно положить:

$M_{ko} = M'_{ko} + M''_{ko}$; $M_{ku} = M'_{ku} + M''_{ku}$ гдѣ M'_{ko} и M'_{ku} моменты относительно точекъ K_o и K_u отъ постоянной нагрузки, а M''_{ko} и M''_{ku} моменты, относительно тѣхъ же точекъ, отъ временной нагрузки. Согласно чертежу 139 и не обращая вниманія на знаки, имѣемъ:



Черт. 139.

$$M'_{ko} = \frac{H}{\cos\alpha}\left(\frac{d}{6} - e\right);$$

$$M'_{ku} = \frac{H}{\cos\alpha}\left(\frac{d}{6} + e\right).$$

Поэтому имѣемъ изъ выраженія (95), положивъ $W = 1 \cdot \frac{d^2}{6}$ и $\sigma_o = \sigma_u = \sigma$:

$$\frac{H}{\cos\alpha}\left(\frac{d}{6} + e\right) + M''_{ku} = \sigma\frac{bd^2}{6}; \tag{114}$$

$$\frac{H}{\cos\alpha}\left(\frac{d}{6} - e\right) + M''_{ko} = \sigma\frac{bd^2}{6};$$

исключая отсюда e, т. е. складывая уравненія, найдемъ квадратное уравненіе для опредѣленія d, при данной величинѣ допущеннаго напряженія σ

$$\frac{H}{\cos\alpha} \cdot \frac{d}{3} + M''_{ko} + M''_{ku} = \sigma\frac{bd^2}{3}. \tag{115}$$

Въ это уравненіе слѣдуетъ подставить лишь численныя значенія M'' такъ какъ по условію истинная кривая давленія пройдетъ внутри ядра сѣченія. Величины M'' могутъ быть вычислены по формулѣ

$$M''_k = M''_{ok} - H''y_k, \tag{116}$$

гдѣ M''_{ok} есть изгибающій моментъ относительно точекъ k, какъ для простой балки, H горизонтальный распоръ, вызываемый временной нагрузкой, по формулѣ (85).

Такимъ образомъ получимъ величину d для каждаго сѣченія.

Для опредѣленія дѣйствительнаго положенія кривой давленія, найдемъ величину e изъ уравненій (114):

$$e = \frac{M_{ko} - M_{ku}}{2H} \cos\alpha, \tag{117}$$

или по вертикальному направленію найдемъ экцентриситетъ ξ:

$$\xi = \frac{M_{ko} - M_{ku}}{2H}. \tag{118}$$

Зная теперь ординаты y оси свода, величину экцентриситета ξ и толщины швовъ d, имѣемъ всѣ данныя для опредѣленія перваго приближенія при начертаніи свода. Обыкновенно практически достаточно ограничиться этимъ вычисленіемъ; если же требуется особенная точность, то повторяютъ вычитаніе d и ξ по найденной величинѣ e.

§ 14.

Опоры сводовъ.

56. Устои.

Устой (береговая опора) можетъ быть расчитанъ какъ стѣнка, подверженная кромѣ вертикальныхъ еще и горизонтальнымъ силамъ, напр. какъ подпорная стѣнка; поэтому для расчета устоевъ пригодны указанія № **45**. Если за устоемъ имѣется насыпь, то устой долженъ быть разсчитанъ въ отдѣльности на давленіе земли, т. е. какъ подпорная стѣнка и какъ устой, при отсутствіи позади него насыпи. Если желаемъ изслѣдовать совокупное дѣйствіе на устой распора насыпи и распора свода, то слѣдуетъ поступить, какъ указано ниже, для расчета быка.

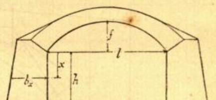
Силы, дѣйствующія на устой, заданы, когда расчитанъ сводъ, опирающійся на устой, т. е. когда извѣстны: вѣсъ свода съ вышележащей нагрузкой (полная грузовая площадь съ ея ц. т.), горизонтальный распоръ и размѣры опоры. Имѣя эти данныя можемъ составить условіе равновѣсія системы, выразивъ его въ уравненіи моментовъ

относительно ребра опрокидыванія и помноживъ выведенную изъ этого условія ширину устоя на коеффиціентъ устойчивости $\mu = 1{,}2$ до 1,5. Въ составляемое условное уравненіе войдетъ, неизвѣстная заранѣе, опредѣляемая величина b — ширина устоя, — поэтому вопросъ рѣшается попытками. Ввиду этого вопросы по расчету устоя всегда проще рѣшать графическимъ путемъ, попутно съ расчетомъ свода. Для приблизительной же оцѣнки и первоначальной попытки, можно воспользоваться эмпирическими формулами. Это является удобнымъ еще и въ томъ случаѣ, когда расчета самого свода не производится, а извѣстны лишь его главные размѣры.

Весьма удобна слѣдующая формула (113), опредѣляющая толщину устоя при данномъ пролетѣ и подъемѣ свода и для любой высоты устоя, см. черт. 140

$$b_x = \sqrt{l} \cdot \left\{ 0{,}6 + n\left(\frac{l}{f} - 2\right) + 0{,}04\,x \right\}$$

значенія буквъ b, l, f и x видны на чертежѣ; значенія коэффиціента n таковы:



Черт. 140.

1. для плоскаго (лучковаго) свода: $n = 0{,}10$;
2. для коробоваго свода: $n = 0{,}05$; (113)
3. для полуциркульнаго свода: $n = 0$.

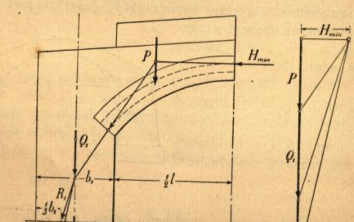
При графическомъ рѣшеніи вопроса, задача заключается въ томъ, чтобы, пользуясь имѣющимся уже для расчета свода многоугольникомъ силъ съ прибавленными къ нему грузами — вѣсомъ опоры и ея основанія, получить нѣсколько точекъ приложенія линіи давленія въ опорѣ; обыкновенно достаточно бываетъ найти давленіе въ нижнемъ швѣ опоры, и давленіе отъ фундамента на основаніе. Построеніе производится начертаніемъ веревочнаго многоугольника и вполнѣ ясно изъ разсмотрѣнія чертежей 141, 142 и 143 *).

Остается поближе разсмотрѣть какой способъ загруженія свода слѣдуетъ принять для расчета опоры, какую величину горизонтальнаго распора надо взять для начертанія веревочнаго многоугольника и

*) Иногда устой дѣлятъ вертикальными швами на участки и производятъ построеніе, какъ бы продолжая построеніе многоугольника давленій, полученнаго въ сводѣ — въ предѣлахъ опоры. При подъемистыхъ сводахъ и широкихъ опорахъ это неудобно.

наконецъ какимъ условіямъ должна удовлетворять равнодѣйствующая давленія въ швахъ опоры.

Наиболѣе опаснымъ для расчета опоры является всегда ея разгруженіе, что объясняется наибольшимъ въ этомъ случаѣ отклоненіемъ кривой давленія отъ оси устоя, хотя давленіе на шовъ устоя при его разгруженіи и можетъ оказаться нѣсколько меньшимъ. Въ практикѣ извѣстны случаи обрушенія сводчатаго покрытія отъ замѣны тяжелой кирпичной стѣнки, нагружающей опору — легкою деревянною. Что касается до нагрузки на сводъ, то, такъ какъ послѣдняя увеличиваетъ вертикальную составляющую давленія на опору, то обыкновенно для

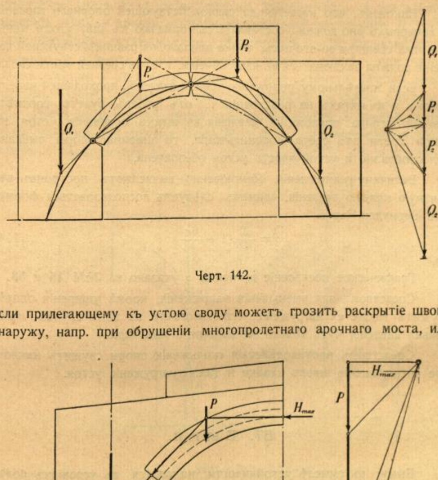


Черт. 141.

расчета устоя располагаютъ временную нагрузку—надъ перекрываемымъ сводомъ отверстіемъ. Впрочемъ это можетъ оказаться и не наиневыгоднѣйшимъ нагруженіемъ свода для его устойчивости. На черт. 142, построена кривая давленія для трехшарнирнаго свода съ относительно большою временною нагрузкою, расположенною лишь надъ правымъ полусводомъ. При этомъ оказывается, что лѣвый устой находится въ менѣе устойчивомъ положеніи, нежели правый, ибо кривая давленія въ лѣвой опорѣ проходитъ ближе къ наружному ребру устоя, нежели въ правой.

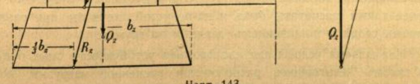
Принятіе для расчета наибольшаго или наименьшаго горизонтальнаго распора зависитъ отъ условій въ коихъ находится сводъ, относительно возможности его обрушенія. Сводъ отдѣльно стоящій, и подверженный дѣйствію грузовъ можетъ разрушиться лишь обрушеніемъ внутрь, чему будетъ соотвѣтствовать, какъ то указано выше, кривая

наименьшихъ давленій. При этомъ способѣ расчета ширина устоя получается сравнительно небольшая, см. черт. 141. Съ другой стороны,



Черт. 142.

если прилегающему къ устою своду можетъ грозить раскрытіе швовъ внаружу, напр. при обрушеніи многопролетнаго арочнаго моста, или



Черт. 143.

при давленіи на устой позади лежащей насыпи, безопаснѣе принять для расчета кривую наибольшихъ давленій въ сводѣ, какъ это сдѣлано на черт. 143, причемъ этомъ случаѣ получится всегда болѣе значительная ширина опоры.

Наконецъ, что касается до равнодѣйствующей опорнаго давленія то вопервыхъ оно должно составлять съ нормалью къ шву уголъ меньшій угла тренія, и во-вторыхъ, точка приложенія равнодѣйствующей давленія должна заключаться въ ядрѣ сѣченія, т. е. въ средней трети свода.

Если предѣльному положенію кривой давленія, проходящей черезъ замокъ и въ пятахъ на разстояніи $^1/_3$ отъ реберъ, будетъ соотвѣтствовать точка приложенія давленія въ швахъ основанія устоя въ одной трети отъ ребра опрокидыванія, то ширина опоры выбрана цѣлесообразно и устойчивость устоя обезпечена.

Величину напряженія обыкновенно вычисляютъ построивъ вѣроятную кривую давленія, причемъ слѣдуетъ воспользоваться формулою Бернулли-Навье.

$$\sigma = \frac{N}{b}\left(1 + \frac{6e}{b}\right). \qquad (114)$$

Графическое построеніе величины σ указано въ №№ **45** и **53**.

Средствомъ для уменьшенія напряженія, кромѣ уширенія опоры, служитъ также ея нагруженіе, что помогаетъ въ томъ случаѣ, когда кривая давленія чуть только не выходитъ изъ ядра.

Средствомъ противодѣйствія скольженію опоры служитъ наклонное расположеніе швовъ кладки и также нагруженіе устоя.

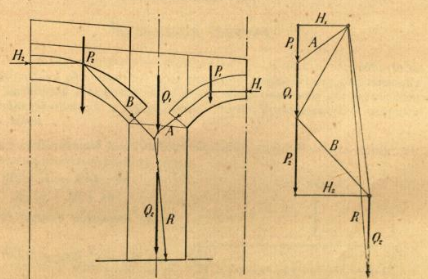
57. Быки.

Быкъ, въ смыслѣ устойчивости, находится въ условіяхъ болѣе благопріятныхъ, чѣмъ крайняя опора—устой, поэтому толщина быка всегда менѣе значительна, нежели устоя. Однако, при постройкѣ, быкъ можетъ подвергаться случайному одностороннему распору, напр., при неосторожномъ раскружаливаніи. Поэтому не слѣдуетъ быкъ дѣлать слишкомъ тонкимъ, хотя бы то и допускалось расчетомъ. Не лишнее также расчитать быкъ и какъ устой, хотя бы при разгруженномъ сводѣ и повышенномъ давленіи на грунтъ.

Нормальныя условія для изслѣдованія устойчивости быка будутъ при такомъ невыгодномъ расположеніи временной нагрузки, когда сводъ, перекрывающій большій изъ пролетовъ, прилегающихъ къ быку, будетъ загруженъ временною нагрузкою, а сводъ будетъ имѣть стремленіе скользить или опрокинутся въ сторону разгруженнаго пролета. Слѣдствіемъ такого перемѣщенія быка будетъ обрушеніе разгруженнаго

свода внаружу. Предѣльному состоянію равновѣсія передъ обрушеніемъ будутъ соотвѣтствовать; для нагруженнаго свода — кривая наименьшихъ давленій, а слѣдовательно значеніе H_{min}, а для ненагруженнаго свода — кривая наибольшихъ давленій и значеніе H_{max}. Такимъ образомъ, активныя силы, дѣйствующія на устой, являются заданными и остается найти равнодѣйствующую двухъ сопротивленій опоръ сводовъ и вѣса быка. Вопросъ всегда слѣдуетъ рѣшать графическимъ путемъ, причемъ получается наиболѣе наглядное рѣшеніе.

Пусть на черт. 144 лѣвый пролетъ нагруженъ, а правый разгруженъ; строимъ для праваго свода H_{max} и A_{max}. Направленіе сопротивленія A продолжаемъ до пересѣченія съ осью быка, гдѣ складываемъ



Черт. 144.

съ вѣсомъ головы быка; затѣмъ прибавляетъ силу B. Силы H_1, P_1, Q_1 сложены въ многоугольникъ силъ, причемъ получена равнодѣйствующая, какъ крайній лучъ многоугольника силъ P_1 и Q_1, при полюсѣ, соотвѣтствующемъ полюсному разстоянію $H_1 = H_{max}$. Давленіе на шовъ, отдѣляющій голову быка получимъ продолживъ бокъ веревочнаго многоугольника, соотвѣтствующій крайнему лучу многоугольника силъ P_1Q_1. Треугольникъ силъ B, H_{min} и P_2 пристраиваемъ къ многоугольнику силъ H_{max} P_1 и Q_1 и затѣмъ къ этому треугольнику пристраиваемъ силу Q_2; наконецъ получаемъ равнодѣйствующую всѣхъ силъ, какъ лучъ R.

Полное давленіе R, не должно выходить изъ ядра сѣченія быка и слѣдовательно напряженія опредѣляются по формулѣ (114).

Указанное построеніе приложимо къ различнымъ случаямъ, конечно измѣняя его сообразно обстоятельствамъ. Напр., если ось свода пересѣкается сопротивленіемъ B выше чѣмъ сопротивленіемъ A, то удобнѣе начать построеніе кривой давленія съ силы H_2, т. е. сначала построить многоугольникъ силъ P_2, Q_1, затѣмъ прибавить треугольникъ силъ P_1 A и H и т. д.

ПРИЛОЖЕНІЕ I.

Задачи и примѣры

КЪ ГЛАВАМЪ I и II.

Балочная ферма.

1. Балка AB перекрываетъ пролетъ $l = 5$ м. и несетъ на себѣ грузъ $P = 1000$ кгр. въ разстояніи $a = 3$ м. отъ лѣвой опоры. Найти сопротивленія опоръ, наибольшій изгибающій моментъ и поперечныя силы для различныхъ сѣченій аналитическимъ и графическимъ путемъ, пренебрегая собственнымъ вѣсомъ балки.

Для сопротивленій опоръ имѣемъ выраженія для изгибающихъ моментовъ относительно противоположныхъ опоръ.

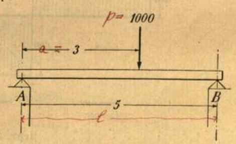
$$M_b = Al - P\,(l - a)$$
$$M_a = -Bl + Pa$$

Изъ перваго выраженія находимъ:

$$A = P\,\frac{l-a}{l} = 1000\,\frac{2}{5} = 400 \text{ кгр.}$$

Изъ втораго:

$$B = P\,\frac{a}{l} = 1000\,\frac{3}{5} = 600 \text{ кгр.}$$



Черт. 145.

Наибольшій изгибающій моментъ будетъ подъ грузомъ P. Проведя здѣсь вертикальное сѣченіе и взявъ моментъ всѣхъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ лѣвѣе этого сѣченія, напишемъ:

$$M = Aa = 400 \,.\, 3 = 1200 \text{ кгр. м.}$$

Перерѣзывающая сила между опорою A и даннымъ грузомъ будетъ:

$$S = A = 400.$$

Въ сѣченіи гдѣ расположенъ грузъ —

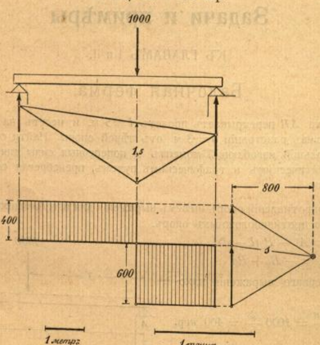
$$S_a = A - P = 400 - 1000 = -600 \text{ кгр.}$$

Въ сѣченіяхъ между $x = 3$ и $x = l$ будетъ:

$$S_{3-l} = A - P = S_a = -600 \text{ кгр.}$$

При графическомъ рѣшеніи строимъ многоугольникъ Вариньона, выбираемъ полюсъ, для чего проводимъ изъ концовъ многоугольника лучи до взаимнаго пересѣченія. По данному многоугольнику строимъ веревочный многоугольникъ и проводимъ между его точками пересѣченія съ вертикалями опоръ замыкающую. Послѣ этого въ многоугольникѣ Вариньона проводимъ лучъ, параллельно только что найденной замыкающей сторонѣ и такимъ образомъ находимъ сопротивленія опоръ. Для данной силы P отложено 2,5 см., поэтому.

$$A = 1 \text{ см.} = 400 \text{ кгр.}$$
$$B = 1{,}5 \text{ см.} = 600 \text{ кгр.}$$



Черт. 146.

Измѣривъ ординату между боками веревочнаго многоугольника подъ грузомъ, найдемъ $y = 1{,}5$ см., что при принятомъ масштабѣ выражаетъ собою 1,5 м. Принявъ во вниманіе, что полюсное разстояніе $H = 2{,}0$ см. и выразивъ его въ тоннахъ, что при принятомъ масштабѣ дастъ 0,8 тоннъ, найдемъ:

$$M = Hy = 1{,}5 \,.\, 0{,}8 = 1{,}2 \text{ тон. мтр.} = 120000 \text{ кгр. см.}$$

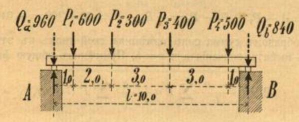
Для опредѣленія перерѣзывающихъ силъ, изъ точки раздѣла сопротивленій опоръ. въ многоугольникѣ Вариньона проводимъ горизонтальную линію, на которую проектируемъ данную балку съ точкой приложенія груза. Затѣмъ проводимъ изъ верхняго конца многоугольника Вариньона горизонтальную линію до пересѣченія ея съ вертикалью даннаго груза. Ординаты четыреугольника, заключеннаго между проведенною линіей, линіею балки и вертикалями лѣвой опоры и даннаго груза даютъ перерѣзывающую силу $S_{0a} = 400$ для любого сѣченія, расположеннаго между лѣвою опорою и даннымъ грузомъ. Проведя изъ нижняго конца многоугольника Вариньона горизонтальную линію

найдемъ также, что ординаты четыреугольника, заключеннаго между вертикалями груза и правой опоры и линіями балки и только что проведенной дадутъ перерѣзывающую силу

$$S_{al} = 600$$

для сѣченій между грузомъ и правою опорою; эта сила отрицательна, такъ какъ ординаты расположены *ниже* линіи балки.

2. На балку AB пролетомъ $l = 10$ м. дѣйствуютъ четыре груза, какъ показано на черт. 147. Найти сопротивленія опоръ и изгибающіе моменты для



Черт. 147.

сѣченій $x = 1{,}5$ м. и для опаснаго сѣченія и поперечную силу для сѣченій подъ грузами какъ аналитическимъ, такъ и графическимъ путемъ.

Для сопротивленій опоръ имѣемъ выраженія

$$A = \sum_1^4 P_i \frac{l - a_i}{l};$$

$$B = \sum_1^4 P_i \frac{a}{l}.$$

Подставляя численныя значенія найдемъ:

$$A = \frac{1}{10}\left\{600 \,.\, 9 + 300 \,.\, 7 + 400 \,.\, 4 + 500 \,.\, 1\right\} = \frac{9600}{10} = 960 \text{ кгр.}$$

$$B = \frac{1}{10}\left\{600 \,.\, 1 + 300 \,.\, 3 + 400 \,.\, 6 + 500 \,.\, 9\right\} = \frac{8400}{10} = 840 \text{ кгр.}$$

Дѣйствительно $A + B = 960 + 840 = 1800$ кгр. $=$ суммѣ грузовъ:

Для опредѣленія изгибающаго момента относительно сѣченія $x = 1{,}5$ м., проще всего взять сумму моментовъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ лѣвѣе даннаго сѣченія, такъ какъ такихъ силъ имѣется всего двѣ: сопротивленіе опоры A и грузъ P_1.

$$M_{1,5} = A \,.\, 1{,}5 - P_1 \,.\, 0{,}5 = 960 \,.\, 1{,}5 - 300 \,.\, 0{,}5 = 1290 \text{ кгр./м.}$$

Опасное сѣченіе, т. е. то, для котораго изгибающій моментъ имѣетъ наибольшее значеніе, по приблизительному взгляду, можетъ быть расположено или подъ грузомъ P_2, т. е. для $x = 3$ или для $x = 6$ подъ грузомъ P_3. Вопросъ можно было бы рѣшить попытками но такъ какъ требуется кромѣ того опредѣлить и перерѣзывающія силы для различныхъ сѣченій, то найдемъ для котораго изъ сказанныхъ двухъ сѣченій величина S мѣняетъ свой знакъ.

Имѣемъ въ общемъ случаѣ

$$S_x = A - \sum_1^x P.$$

Для даннаго случая, для сѣченія вправо отъ P_2:

$$S_3 = A - P_1 - P_2 = 960 - 600 - 300 = 60 \text{ кгр.}$$

Эта же перерѣзывающая сила имѣетъ мѣсто и для всѣхъ сѣченій между грузами P_2 и P_3, т. е. между $x = 3$ и $x = 6$. Для сѣченія чуть правѣе груза P_3 будетъ:

$$S_6 = A - P_1 - P_2 - P_3 = S_3 - P_3 = 60 - 400 = -340.$$

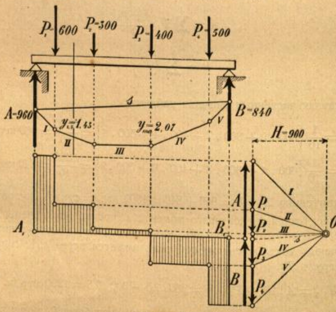
Такимъ образомъ сумма силъ измѣнила свой знакъ въ этомъ сѣченіи, а потому M_{max} имѣетъ значенія для $x = 6$. Примѣнивъ общую формулу —

$$M = \frac{l-a}{l} \sum_1^a Pa + \frac{a}{l} \sum_a^l P(l-a),$$

напишемъ, отнеся P_3 къ лѣвымъ грузамъ:

$$M_{\max} = M_6 = \frac{4}{10}\left\{600.1 + 300.3 + 400.6\right\} + \frac{6}{10}\,500.1 = 1860 \text{ кгр. м.}$$

Графическое рѣшеніе вопроса изображено на черт. 148, гдѣ всѣ построенія сдѣланы какъ объяснено въ предыдущей задачѣ.



Черт. 148.

Величины изгибающихъ моментовъ, вычисленныхъ графически будутъ:

$$M_{1,5} = 900.1,43 = 1287 \text{ кгр. м.};$$

$$M_6 = 900.2,07 = 1863 \text{ кгр. м.}$$

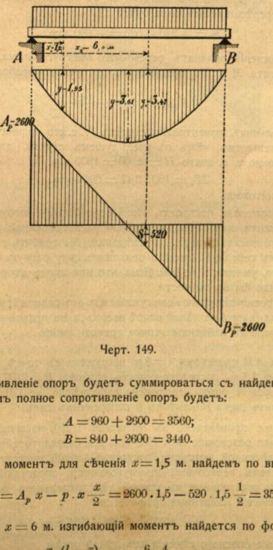
3. Изслѣдовать тотъ же случай, принимая во вниманіе и собственный вѣсъ балки равный 70 кгр. на погонный метръ ея длины, если она совмѣстно съ другими балками поддерживаетъ покрытіе, вѣсящее 500 кгр. на квадр. метръ его площади и разстояніе между балками 0,9 м.

Полная равномѣрно распредѣленная нагрузка приходящаяся на 1 погонный метръ балки

$$p = 70 + 0,9.500 = 520 \text{ кгр./м.}^2.$$

Сопротивленіе опоръ, вызываемое этой нагрузкой будетъ:

$$A_p = B'_p = \frac{pl}{2} = \frac{520.10}{2} = 2600.$$



Черт. 149.

Это сопротивленіе опоръ будетъ суммироваться съ найденнымъ прежде и такимъ образомъ полное сопротивленіе опоръ будетъ:

$$A = 960 + 2600 = 3560;$$

$$B = 840 + 2600 = 3440.$$

Изгибающій моментъ для сѣченія $x = 1,5$ м. найдемъ по выраженію:

$$M'_{1,5} = A_p\,x - p.x\frac{x}{2} = 2600.1,5 - 520.1,5\frac{1}{2} = 3510.$$

Для сѣченія $x = 6$ м. изгибающій моментъ найдется по формулѣ

$$M'_6 = p\frac{x.(l-x)}{2} = 520\frac{6.4}{2} = 6240 \text{ кгр./м.}$$

Прибавивъ эти величины къ найденнымъ въ предыдущей задачѣ отъ вліянія сосредоточенныхъ грузовъ, найдемъ:

$$M_{1,5} = 1290 + 4290 = 5580 \text{ кгр. м.}$$
$$M_6 = 1860 + 6240 = 8100 \text{ кгр. м.}$$

Перерѣзывающая сила отъ равномѣрно распредѣленной нагрузки найдется по выраженію

$$S_x = A_p - px,$$

что для сѣченія, напр. $x = 6$, будетъ имѣть значеніе:

$$S'_6 = 2600 - 520 \cdot 6 = -520.$$

Принимая же во вниманіе найденную въ предыдущемъ примѣрѣ величину, полная перерѣзывающая сила будетъ:

$$S_6 = -340 - 520 = -860 \text{ кгр.}$$

Для нахожденія ординатъ веревочнаго многоугольника, входящихъ въ выраженіе момента $M = Hy$, проще всего построить параболу со стрѣлкою.

$$y'_{\max} = \frac{pl^2}{8H} = 3{,}61.$$

Многоугольникъ моментовъ построенъ (т. е. его ордината) въ масштабѣ въ два раза меньшемъ, чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ, для чего полюсное разстояніе удвоено т. е. взято $H = 2.900 = 1800$ кгр.

$$M'_6 = 1800 . 3{,}47 = 6246 \text{ кгр.}$$

т. е. ошибка ничтожна.

Еслибъ пожелали построить общій веревочный многоугольникъ для изгибающаго момента, какъ отъ равномѣрно распредѣленной нагрузки, такъ и отъ сосредоточенныхъ грузовъ, то слѣдовало бы разбить грузовую площадь на участки и къ серединѣ каждаго приложить силу равную его площади, т. е. напр. длину его, умножить на 520. Ясно, что при этомъ второмъ способѣ, рѣшеніе пострадало бы въ точности

Для построенія діаграммы для суммы силъ отъ равномѣрно распредѣленной нагрузки откладываемъ на лѣвой опорѣ вверхъ, а на правой внизъ $A_p = B_p = 2600$ и соединяемъ найденныя точки прямою линіею.

4. Балка AB пролетомъ $l = 8$ м. нагружена въ точкѣ C, отстоящей отъ лѣвой опоры на 1,5 м., сосредоточеннымъ грузомъ $P = 2100$ кгр., а отъ точки D вплоть до правой опоры загружена равномѣрно по 120 кгр. на погонный метръ. Построить линіи моментовъ и поперечныхъ силъ.

Построеніе произведено въ масштабѣ 1:200, масштабъ силъ принятъ 1:3000, полюсное разстояніе $H = 4500$ кгр. Для сосредоточеннаго груза и равномѣрно распредѣленной нагрузки построенъ общій многоугольникъ силъ, по которому найдемъ веревочный многоугольникъ, представляющій на участкѣ $D_1 B_1$ стороны касательныя къ кривой дѣйствительнаго веревочнаго многоугольника. Значенія найденныя графически:

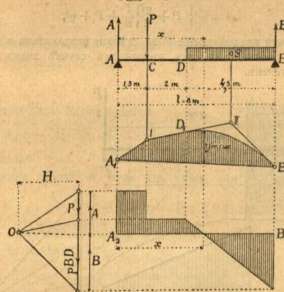
$$A = 3225 \text{ кгр. } B = 4275 \text{ кгр.}$$

Разстояніе опаснаго сѣченія отъ лѣвой опоры

$$x_n = 4{,}45 \text{ м.}$$

Соотвѣтствующая этому сѣченію ордината кривой моментовъ

$$y_{\max} = 1{,}7 \text{ м.}$$



Черт. 150.

Наибольшій изгибающій моментъ

$$M_{\max} = 4{,}5 \ . \ 1{,}7 = 7{,}65 \text{ тонно метровъ}$$

Примѣчаніе. Если бы требовалось опредѣлить величину изгибающаго момента для сѣченій около середины DB то слѣдовало бы раздѣлить этотъ участокъ нагрузки на отдѣльныя части и для нихъ построить веревочный многоугольникъ и тогда уже вписывать кривую.

5. Балка AC задѣлана однимъ концомъ въ стѣну, гдѣ имѣетъ двѣ опоры A и B у краевъ стѣны. Кромѣ собственнаго вѣса 9 кгр. на погонный метръ на балку дѣйствуетъ грузъ P, расположенный на ея правомъ концѣ. Опредѣлить реакцію опоръ наибольшій изгибающій моментъ и поперечную силу.

Для опредѣленія сопротивленія опоры B возьмемъ сумму моментовъ внѣшнихъ силъ относительно опоры A, полагая что сопротивленіе опоры B направлено вверхъ.

$$M_A = Pl + ql\frac{l}{2} - B \ . \ d = 0,$$

откуда

$$B = \left\{ P + \frac{ql}{2} \right\} \frac{l}{d} .$$

Знакъ плюсъ показываетъ, что сопротивленіе опоры B направлено дѣйствительно вверхъ.

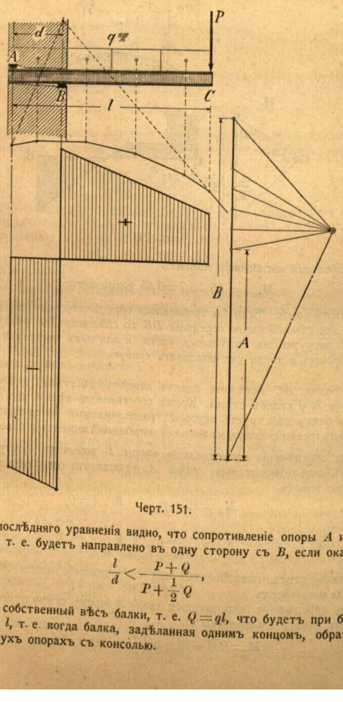
Для опредѣленія сопротивленія опоры A беремъ сумму моментовъ внѣшнихъ силъ относительно опоры B.

$$M = P(l - d) + ql\left(\frac{l}{2} - d\right) + Ad,$$

гдѣ предположено сначала, что сопротивленіе опоры A течетъ въ одну сторону съ сопротивленіемъ опоры B. Изъ послѣдняго уравненія находимъ:

$$A = -\left\{P + \frac{ql}{2}\right\}\frac{l}{d} + P + ql,$$

откуда видимъ, что предположеніе было сдѣлано неправильно и сопротивленіе опоры A течетъ внизъ, такъ какъ въ данномъ случаѣ знакъ передъ выраженіемъ отрицателенъ.



Черт. 151.

Изъ послѣдняго уравненія видно, что сопротивленіе опоры A измѣнитъ свой знакъ, т. е. будетъ направлено въ одну сторону съ B, если окажется

$$\frac{l}{d} < \frac{P + Q}{P + \frac{1}{2}Q},$$

гдѣ Q есть собственный вѣсъ балки, т. е. $Q = ql$, что будетъ при большомъ d и маломъ l, т. е. когда балка, задѣланная однимъ концомъ, обратится въ балку на двухъ опорахъ съ консолью.

Найдемъ величину поперечной силы.

Для сѣченія надъ A перерѣзывающая сила будетъ

$$S_A = -A,$$

т. е. отрицательна, такъ какъ A есть абсолютная величина.

Для сѣченія между A и B

$$S_x = -A - qx,$$

для сѣченія надъ B, она будетъ

$$S_B = -A + B - qd = P + ql - qd = P + q\,(l - d),$$

т. е. положительна.

Для сѣченія правѣе B, напр. для точки, лежащей отъ A на x, она будетъ

$$S_x = A + B - qx = P + q\,(l - x),$$

т. е. остается положительнымъ вплоть до праваго конца, гдѣ она въ точкѣ, лежащей чуть чуть лѣвѣе силы P:

$$S'_c = A + B - ql = P,$$

а для самаго конца

$$S_c = A + B - ql - P = 0,$$

Итакъ перерѣзывающая сила измѣнила свой знакъ въ сѣченіи надъ опорой B, а потому изгибающій моментъ въ этомъ сѣченіи будетъ наибольшій (для силъ лѣвѣе этого сѣченія).

$$M_{max} = M_B = -Ad,$$

т. е.

$$M_b = \left\{P + \frac{ql}{2}\right\} l - Pd - ql \cdot d,$$

что нашли бы взявъ и моментъ силъ правѣе даннаго сѣченія.

Графическое рѣшеніе ясно изъ чертежа 151.

6. На балку AB пролетомъ $l = 12$ м. дѣйствуетъ равномѣрно распредѣленная нагрузка постоянная по 400 кгр. на погонный метръ длины балки и временная по 600 кгр. на погонный метръ ея длины. Найти величину наибольшей поперечной силы для сѣченія отстоящаго отъ лѣвой опоры на разстояніи $x = 4$ м. аналитическимъ и графическимъ путемъ и сѣченіе, для котораго въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто M_{max}.

Наибольшее значеніе перерѣзывающей силы получится, когда подвижная нагрузка займетъ положеніе отъ разсматриваемаго сѣченія до правой опоры, какъ показано на черт. 152. Въ этомъ случаѣ для разсматриваемаго сѣченія будетъ:

1) Перерѣзывающая сила отъ постоянной нагрузки (сумма силъ дѣйствующихъ лѣвѣе даннаго сѣченія).

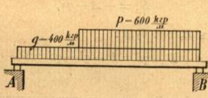
$$S' = A' - gx = \frac{gl}{2} - gx = g\left(\frac{l}{2} - x\right). \qquad (1)$$

2) Перерѣзывающая сила отъ подвижной нагрузки.

$$S''_x = A''_x \qquad (2)$$

гдѣ A''_x есть сопротивленіе опоры, вызываемое даннымъ расположеніемъ нагрузки; оно будетъ:

$$A_x = p\,\frac{(l-x)^2}{2l} \qquad (3)$$



Черт. 152.

Такимъ образомъ полная величина поперечной силы

$$S_x = S'_x + S''_x = g\left(\frac{l}{2} - x\right) + \frac{p}{2}\,\frac{(l-x)^2}{l}. \qquad (4)$$

Подставляя данныя значенія, найдемъ:

$$S_x = 400\,(6-4) + 300\,\frac{64}{12} = 800 + 1600 = 2400. \qquad (5)$$

Для нахожденія, соотвѣтствующаго этому расположенію нагрузокъ, опаснаго сѣченія, слѣдуетъ найти такое сѣченіе, въ которомъ перерѣзывающая сила мѣняетъ свой знакъ. Такъ какъ въ данномъ случаѣ имѣемъ дѣло съ нагрузкой измѣняющейся непрерывно, то мѣняя свой знакъ, перерѣзывающая сила должна пройти черезъ значеніе равное нулю. Съ другой стороны очевидно, что это сѣченіе расположено гдѣ-либо правѣе сѣченія $x = 4\ м = a$, такъ какъ лѣвѣе этого сѣченія перерѣзывающая сила отъ временной нагрузки остается неизмѣнной (2) и (3) а отъ постоянной возрастаетъ (1)и (4). Поэтому возьмемъ нѣкоторое сѣченіе $x > a$ и найдя для него выраженіе для перерѣзывающей силы, приравняемъ его нулю.

$$S_x = 0 = g\left(\frac{l}{2} - x\right) + p\left\{\frac{(l-a)^2}{2l} - (x-a)\right\} \qquad (6)$$

гдѣ первый членъ выражаетъ собою сумму силъ отъ постоянной нагрузки, а второй отъ временной. Опредѣливъ изъ этого уравненія x, найдемъ:

$$x = \frac{\frac{p}{2l}\,(l-a)^2 + pa + g\,\frac{l}{2}}{p+g}.$$

Подставляя численныя значенія:

$$x = \frac{25\ .\ 64 + 2400 + 2400}{1000} = 6{,}4\ м.$$

Весьма наглядное рѣшеніе получается графическимъ путемъ. Сначала проводимъ линію $A_1\ B_1$ — перерѣзывающей силы отъ постоянной нагрузки, для

чего откладываемъ надъ опорами въ противоположныя стороны ординаты AA' и $BB' = \frac{gl}{2} = 2400$.

Затѣмъ находимъ ординату перерѣзывающей силы отъ временной нагрузки для сѣченія $x = a$, для чего откладываемъ на лѣвой опорѣ $AB = \frac{pl}{2}$, проводимъ BC, находимъ точку D ея пересѣченія съ ординатой даннаго сѣ-

Черт. 153.

ченія, проводимъ $DE \parallel AB$, потомъ EB и находимъ искомую ординату. Перерѣзывающая сила отъ временной нагрузки лѣвѣе этого сѣченія не измѣняется, почему проводимъ $FG \parallel AB$. Остается найти еще одну точку правѣе сѣченія $x = a$, черезъ которую пройдетъ искомая линія Проще всего найти ея конечную ординату надъ опорой B. Сопротивленіе этой опоры будетъ.

$$B = p\,\frac{l-a}{l}\left(a + \frac{l-a}{2}\right) = 600\,\frac{8}{12}\left(4 + \frac{8}{2}\right) = 3200\,.$$

Отложивъ $B' = 3200$, соединяемъ точку B' съ F. Для удобства складыванія ординатъ двухъ полученныхъ линій онѣ отложены въ противоположныя стороны отъ оси абсциссъ. Пересѣченіе этихъ линій между собою въ точкѣ k опредѣляетъ собою искомое сѣченіе $x = 6{,}4$ м., такъ какъ въ немъ ордината перерѣзывающей силы равна нулю.

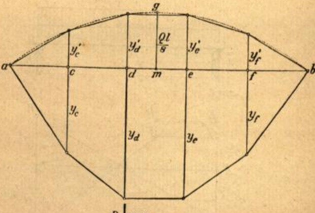
7. На балкѣ съ узловою передачею a, b, c, d, e, f расположена система подвижныхъ грузовъ отъ P_1 до P_5; кромѣ того на балку дѣйствуетъ равномѣрно распредѣленная нагрузка Q, не показанная на чертежѣ. Опредѣлить наибольшій изгибающій моментъ для узловъ балки.

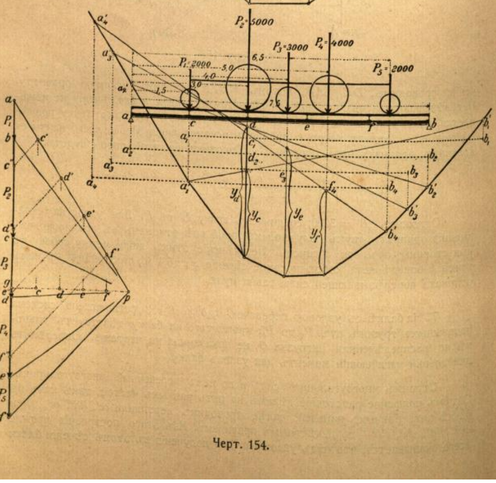
Строимъ многоугольникъ силъ и по немъ веревочный многоугольникъ. Затѣмъ полюсное разстояніе дѣлимъ на пять равныхъ частей, такъ какъ въ балкѣ пять равныхъ панелей; далѣе проводимъ вертикали cc', dd', ee', ff' и $c'c''$, $d'd''$, $e'e''$, $f'f''$ — по извѣстнымъ правиламъ. Изъ этого построенія прежде всего оказывается, что надъ узломъ c. для полученія въ этомъ сѣченіи балки наибольшаго изгибающаго момента, надо поставить грузъ P_2. И дѣйствительно аналитическая повѣрка даетъ:

$$\frac{P_1}{\sum\limits_2^5 P} = \frac{2000}{14000} < \frac{\lambda}{l} = \frac{1{,}5}{6}\ , \text{ или } \frac{1}{7} < \frac{1}{4}\ ,$$

т. е. систему слѣдуетъ продвинуть противъ своего первоначальнаго положенія

Черт. 155.





Черт. 154.

влѣво. И такъ, если придадимъ балкѣ положеніе a_1b_1 такъ чтобы точка c_1 пришлась на вертикали силы P_2 и черезъ точки a_1 и b_1 оpведемъ вертикали до пересѣченія съ боками веревочнаго многоугольника, въ точкахъ a_1' и d_1' то линія $a_1'b_1'$ будетъ замыкающимъ бокомъ многоугольника моментовъ и ордината y_c представитъ собою величину наибольшаго изгибающаго момента въ сѣченіи c, если принять что полюсное разстояніе равно единицѣ. Въ сѣченіи d наибольшій изгибающій моментъ вызывается также силою P_2, чему соотвѣтствуетъ положеніе балки a_2b_2, и для многоугольника моментовъ замыкающій бокъ $a_2'b_2'$ и величина изгибающаго момента y_d. Далѣе въ сѣченіи e надо поставить грузъ P_3, тогда получимъ наиб. изгибающій моментъ y_e. Наконецъ въ сѣченіи f наибольшій изгибающій моментъ вызывается грузомъ P_4 и равенъ y_f. Наибольшій изъ всѣхъ моментовъ будетъ y_d.

Равномѣрно распредѣленная нагрузка вызываетъ въ серединѣ балки изгибающій моментъ $\frac{Ql}{8}$ (при непосредств. передачѣ). Построивъ на балѣ ab параболу со стрѣлкою $\frac{Ql}{H8}$ и проведя въ узлахъ вертикали до пересѣченія съ построенной параболой, получимъ для сѣченія d изгибающій моментъ y'_d.

И такъ полный наибольшій изгибающій моментъ отъ подвижной и постоянной нагрузокъ будетъ $y_d + y'_d$. По измѣреніи оказывается

$$M_{H=1} = y_d + y'_d = 33 + 13 = 46 \text{ мм.}$$

что при выбранномъ масштабѣ составитъ 4,6 св.

Полюсное разстояніе = 30 мм., что при выбранномъ масштабѣ составляетъ 30.200 = 6000 кгр. Поэтому полный изгибающій моментъ будетъ

$$M = 4{,}6\ 6000 = 27\,.\,601 \text{ кгр. м.}$$

На чертежѣ 155 построена эпюра моментовъ.

8. Система подвижныхъ грузовъ движется по балкѣ ab отъ b къ a. Опредѣлить наибольшую поперечную силу въ панели cd. Величины грузовъ и разстоянія между ними указаны на чертежѣ 156.

Когда система грузовъ продвинется такимъ образомъ, что грузъ P_1 станетъ надъ узломъ d, то, согласно графическому построенію, величина поперечной силы въ панели d будетъ:

$$S_d = dg = 23 \text{ мм.} = 4600 \text{ кгр.}$$

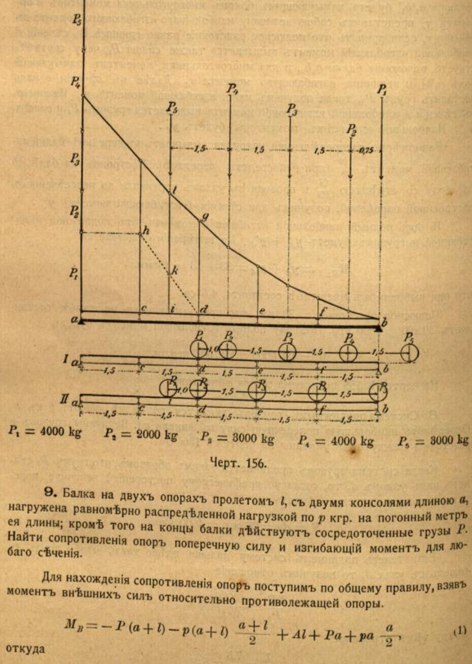
Если теперь подвинемъ систему дальше влѣво такъ, чтобы грузъ P_1 сошелъ съ узла d, то получимъ отношеніе

$$\frac{\Sigma P}{P_1} = \frac{16000}{4000} = 4\ ,$$

между тѣмъ отношеніе

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{7{,}5}{5{,}5} = 5\,.$$

Вслѣдствіе этого согласно (14 стр. 33), при второмъ положеніи системы, указанномъ на нижнемъ чертежѣ (II) поперечная сила въ панели d будетъ имѣть уже меньшее значеніе. Такъ оно получается и изъ графическаго построенія, такъ какъ отрѣзокъ $kl = 20$ мм., т. е. меньше отрѣзка dq.



Черт. 156.

9. Балка на двухъ опорахъ пролетомъ l, съ двумя консолями длиною a, нагружена равномѣрно распредѣленной нагрузкой по p кгр. на погонный метръ ея длины; кромѣ того на концы балки дѣйствуютъ сосредоточенные грузы P. Найти сопротивленія опоръ поперечную силу и изгибающій моментъ для любаго сѣченія.

Для нахожденія сопротивленія опоръ поступимъ по общему правилу, взявъ моментъ внѣшнихъ силъ относительно противолежащей опоры.

$$M_B = -P(a+l) - p(a+l)\,\frac{a+l}{2} + Al + Pa + pa\,\frac{a}{2}, \tag{1}$$

откуда

$$A = P + p\left(a + \frac{l}{2}\right) = B, \tag{2}$$

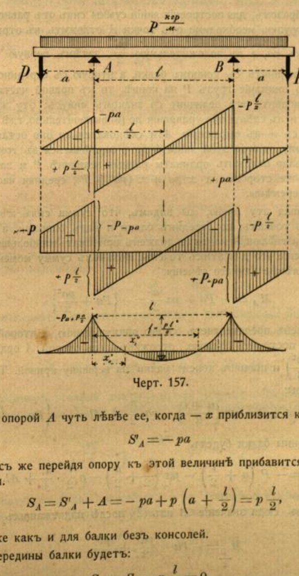
такъ какъ нагрузка симметрична.

Для нахожденія поперечной силы для любой точки, всего лучше построить діаграмму суммы силъ по нѣсколькимъ точкамъ. Сначала построимъ сумму силъ лишь отъ равномѣрно распредѣленной нагрузки, т. е. полагая $P = O$. Для лѣваго конца балки будетъ:

$$S_{-a} = 0 \tag{3}$$

За начало координатъ принята точка A, такъ какъ въ этой точкѣ никакого груза еще не дѣйствуетъ. Въ нѣкоторой точкѣ m удаленной отъ опоры A на разстояніе $-x$ будетъ

$$S_{-x} = -p(a-x) \tag{4}$$



Черт. 157.

Надъ опорой A чуть лѣвѣе ее, когда $-x$ приблизится къ нулю, будетъ

$$S'_A = -pa \tag{5}$$

Сейчасъ же перейдя опору къ этой величинѣ прибавится сопротивленіе самой опоры.

$$S_A = S'_A + A = -pa + p\left(a + \frac{l}{2}\right) = p\,\frac{l}{2}, \tag{6}$$

т. е. такъ же какъ и для балки безъ консолей.

Для середины балки будетъ:

$$S_{\frac{l}{2}} = S_A - p\,\frac{l}{2} = 0 \tag{7}$$

Далѣе она перейдетъ снова въ отрицательную сторону и надъ правой опорой со стороны середины балки ея будетъ

$$S_B = S_A - pl = -\frac{pl}{2}; \tag{8}$$

со стороны же консоли будетъ

$$S'_B = S_B - B = -p\frac{l}{2} + p\left(a + \frac{l}{2}\right) = pa \tag{9}$$

и наконецъ въ правомъ концѣ

$$S_{l+a} = 0 \tag{10}$$

Такимъ образомъ, для построенія линіи суммы силъ отъ равномѣрно распредѣленной нагрузки, необходимо отъ точки A отложить въ отрицательную сторону отрѣзокъ pa, а въ положительную $\frac{pl}{2}$, затѣмъ первую изъ этихъ двухъ точекъ соединить съ концомъ балки, а вторую съ серединою. Теперь, если принять во вниманіе грузъ P на концѣ, то къ правой части уравненія (3) придется прибавить его величину со знакомъ минусъ; эту же величину надо прибавить и въ слѣдующія уравненія до (6) включительно, гдѣ кромѣ того войдетъ еще P съ $+$ въ выраженіи A и слѣдовательно оно останется неизмѣннымъ. Поэтому отличіе этой линіи будетъ заключаться въ томъ, что отъ концовъ балки надо отложить ординаты равныя величинѣ P и затѣмъ надъ опорами въ тѣ же стороны на $\pm\, pa$ и $\pm\,(pa + P)$, средняя часть линія S остается безъ перемѣны.

Разсматривая эту линію, мы видимъ, что сумма силъ мѣняетъ свой знакъ въ трехъ точкахъ; по серединѣ балки и надъ опорами, а потому въ этихъ точкахъ изгибающій моментъ долженъ принимать наибольшее значеніе. Найдемъ выраженіе его для этихъ точекъ. Возьмемъ сумму моментовъ силъ, дѣйствующихъ лѣвѣе даннаго сѣченія.

$$M_A = -Pa - pa\frac{a}{2} = -\left\{Pa + \frac{pa^2}{2}\right\}.$$

Первый членъ представляетъ собою прямую линію, а второй параболу, поэтому легко построить кривую, отложивъ надъ опорой A ординату равную $-\left(Pa + \frac{pa^2}{2}\right)$ и принявъ конецъ балки за вершину кривой. Точно также для правой опоры:

$$M_B = -P(a+l) - pa\left(\frac{a+l}{2}\right) - pa\frac{l^2}{2} + Al = -\left\{Pa + \frac{pa^2}{2}\right\}. \tag{11}$$

Для середины балки будетъ

$$M_{\frac{l}{2}} = -P\left(a + \frac{l}{2}\right) - pa\left(\frac{l}{2} + \frac{a}{2}\right) - p\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4} + Al. \tag{12}$$

Подставивъ сюда значеніе A изъ (2), послѣ надлежащихъ сокращеній, получимъ:

$$M_{\frac{l}{2}} = -Pa - \frac{pa^2}{2} + \frac{pl^2}{8}. \tag{13}$$

Сравнивъ это уравненіе съ (11), найдемъ, что первыя два числа представляютъ собой опорный моментъ, а послѣдній моментъ отъ равномѣрно

распредѣленной нагрузки для середины простой безконсольной балки. Т. е. Можно написать.

$$M_{\frac{l}{2}} = M_A + M_{0\frac{l}{2}} \tag{13 bis}$$

Поэтому для построенія моментовъ для средняго участка балки надо построить параболу со стрѣлкою $\frac{pl^2}{8}$ отсчитанной отъ хорды, соединяющей вершины кривой опорныхъ моментовъ, что ясно на чертежѣ.

Какъ изъ послѣдняго уравненія, такъ и изъ чертежа видно, что моментъ $M_{\frac{l}{2}}$ можетъ быть какъ положительнымъ, такъ и отрицательнымъ и наконецъ въ частномъ случаѣ можетъ обратиться въ 0. Послѣднее произойдетъ, когда будетъ:

$$M_A = M^0_{\frac{l}{2}}$$

что произойдетъ, когда отношеніе величинъ грузовъ сосредоточеннаго и равномѣрно распредѣленнаго а также длины консолей и средняго пролета таково, что

$$\frac{P}{p} = \frac{1}{2}\left\{\frac{l^2}{4} - a^2\right\} \tag{14}$$

Если $M_{\frac{l}{2}}$ получается отрицательнымъ, то кривая моментовъ пересѣченія ось абсциссъ въ двухъ точкахъ, и слѣдовательно для этихъ точекъ изгибающій моментъ равенъ нулю. Чтобы найти эти точки, найдемъ сначала выраженіе изгибающаго момента для какой-либо изъ точекъ между опорами. Руководствуясь только что найденнымъ свойствомъ найденной кривой и уравненіемъ (13 bis) напишемъ.

$$M_x = M_A + M_{0x} \tag{15}$$

что можно и вывести непосредствено какъ и для середины балки.

Подставляя въ это уравненіе соотвѣтственныя значенія, найдемъ

$$M_x = -\left\{Pa + \frac{pa^2}{2}\right\} + \frac{p}{2}\,x\,(l - x) \tag{15 bis}$$

Для искомыхъ точекъ значеніе этого момента обращается въ нуль, а потому приравнявъ послѣднее уравненіе нулю и опредѣливъ значеніе для x_0, получимъ

$$x_0 = \frac{\frac{pl}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2 l^2}{4} - (2P\,pa + p^2 a^2)}}{p}, \tag{16}$$

гдѣ для x_0 получается два значенія x'_0 и x''_0 соотвѣтствующихъ двумъ знакамъ передъ корнемъ. Корень получается мнимымъ, когда

$$\frac{pl^2}{8} < Pa + \frac{pa^2}{2}$$

т. е.

$$M_{0\frac{l}{2}} < M_A$$

тогда какъ уже сказано выше линія моментовъ не пересѣкаетъ оси x—совъ. Если знакъ неравенства обращается въ $=$, то получаемъ

$$x'_0 = x''_0 = \frac{l}{2}$$

т. е. кривая касается оси x—оовъ въ серединѣ пролета.

10. На балку пролетомъ l съ двумя равными консолями a дѣйствуютъ: по срединѣ равномѣрно распредѣленная нагрузка по p кгр. на погонный метръ на участкѣ длиною C и на концы равныя силы P. Построить линіи поперечныхъ силъ и изгибающаго момента.

Руководствуясь предыдущимъ примѣромъ и симметріею расположенія, напишемъ сразу сопротивленіе опоры.

$$A = B = P + \frac{pc}{2}$$

Для построенія линіи перерѣзывающей силы примемъ ординату опоры A за начальную, тогда для всякаго сѣченія взятаго на протяженіи всей консоли, т. е. для $x = -a$ до $x = 0$, найдемъ:

$$S_{-a} = -P\,,\; S'_0 = -P.$$

Для сѣченія вправо отъ опоры A, къ этому прибавится сопротивленіе опоры A.

$$S_0 = -P + A = \frac{pc}{2}$$

Черт. 158.

Эта величина сохранится на всемъ протяженіи до точки, гдѣ начинается равномѣрно распредѣленная нагрузка, т. е. линія перерѣзывающей силы будетъ горизонтальна, откуда линія начнетъ уклоняться, такъ какъ будетъ вступать отрицательный грузъ.

$$S_x = p\left(\frac{l}{2} - x\right);$$

для $x = \frac{l}{2}$:

$$S_{\frac{l}{2}} = S_0 - pc = 0;$$

для $x = \frac{1}{2}\,l + \frac{1}{2}\,c$:

$$S_{\frac{l}{2}+\frac{c}{2}} = -\frac{pc}{2}.$$

Для сѣченія лѣвѣе опоры B будетъ тоже. Наконецъ для сѣченія вправо отъ опоры B вплоть до праваго конца будетъ

$$S'_B = -\frac{pc}{2} + B = P$$

Для построенія линіи моментовъ, сначала вспомнимъ правило, выведенное въ предыдущемъ примѣрѣ, т. е. моментъ для сѣченія консоли зависитъ лишь отъ грузовъ на консоли M_x, а моментъ для сѣченія между опорами равенъ суммѣ опорнаго момента и момента какъ для простой балки, поэтому общій видъ кривой (черт. 158) сразу понятенъ; остается опредѣлить ординаты. Надъ опорами, когда $x = 0$ будетъ:

Для сѣченія лѣвѣе опоры

$$M_{-x} = P\,(a - x),$$

что выражаетъ собою ординаты прямой линіи.

$$M_A = M_B = -Pa;$$

для сѣченія между опорами:

$$M_x = M_A + M_{ox};$$

второй же членъ равенъ:

$$M_{ox} = Ax - p\left\{x^2 - \frac{1}{2}(l - c)^2\right\}$$

и представляетъ собою параболу, стрѣлку которой слѣдуетъ отложить отъ хорды соединяющей концы опорныхъ ординатъ.

Предлагаемъ читателю произвести изслѣдованія этой кривой, какъ въ предъидущемъ примѣрѣ.

КЪ ГЛАВѢ II.

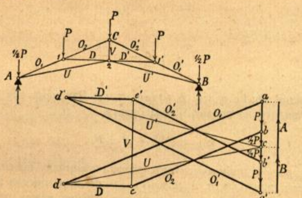
Рѣшетчатая балочная ферма.

Діаграммы Кремона *).

11. На стропильную ферму, указанную на черт. (159), дѣйствуетъ нагрузка, передающаяся узлахъ по P на каждый узелъ. Построить діаграмму.

*) Предлагаемъ читателю построить каждую діаграмму самостоятельно, воспользовавшись обозначеніями Bow'a; затѣмъ сравнить результаты съ чертежами — задачъ.

На чертежѣ 159 исполнена эта діаграмма. Сжатыя части на діаграммѣ прочерчены толстыми линіями, а вытянутыя—тонкими. Построеніе проще всего начать съ опорнаго узла.

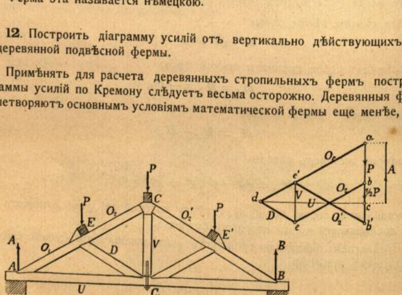


Черт. 159.

Ферма эта называется нѣмецкою.

12. Построить діаграмму усилій отъ вертикально дѣйствующихъ силъ для деревянной подвѣсной фермы.

Примѣнять для расчета деревянныхъ стропильныхъ фермъ построеніе діаграммы усилій по Кремону слѣдуетъ весьма осторожно. Деревянныя фермы удовлетворяютъ основнымъ условіямъ математической фермы еще менѣе, чѣмъ



Черт. 160.

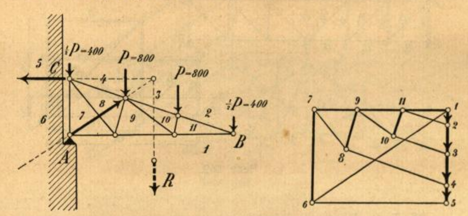
металлическія. Полученіе усилій указанными въ курсѣ способами можетъ дать лишь приблизительную оцѣнку напряженій въ частяхъ, да и то лишь для простѣйшихъ типовъ.

Построеніе исполнено на черт. 160 и не требуетъ особыхъ поясненій.

13. На навѣсъ черт. 161 дѣйствуютъ вертикальныя силы отъ собственнаго вѣса въ 33 кгр. и отъ вѣса снѣга 100 кгр. на квадр. метръ горизонтальной ея проекціи. Фермы разставлены на разстояніи 3 мет. одна отъ

другой. Найти усилія въ ея частяхъ, а также въ мѣстѣ ея задѣлки въ стѣну въ точкѣ C.

На каждый изъ среднихъ узловъ дѣйствуетъ сила $P\lambda \,.\, l = 133 . 23 . 800$, гдѣ $\lambda = 2{,}0$ м. есть горизонтальная проекція панели; крайніе узлы нагружены половинной нагрузкой, т. е. по 400 кгр.



Черт. 161.

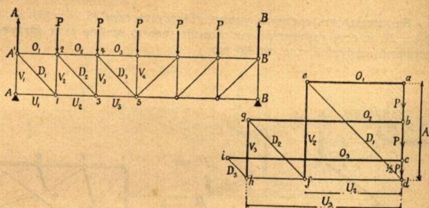
Построеніе діаграммы проще всего начать съ концевого узла B. При переходѣ къ узлу C горизонтальное напряженіе H опредѣлять изъ того условія, что сила H должна находиться въ равновѣсіи съ равнодѣйствующей $\Sigma P = 2400$ кгр. и сопротивленіемъ опоры A. Усилія прописаны по бокамъ діаграммы.

Стержни.	Усилія.	Стержни.	Усилія.
1 — 21	— 1150 кгр.	8 — 9	— 1050 кгр.
1 — 9	— 2320 »	9 — 10	+ 1150 »
1 — 7	— 3400 »	10 — 11	— 700 »
6 — 7	— 2400 »	2 — 11	+ 1200 »
7 — 8	+ 1300 »	3 — 10	+ 1450 »
		4 — 8	+ 2750 »

14. Ферма съ параллельными поясами, постоянные грузы дѣйствуютъ на верхніе узлы.

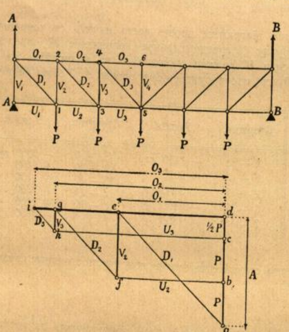
Если ферма какъ на черт. (162) симметрична, то достаточно построить діаграмму усилій для ея половины. Однако иногда можетъ оказаться, что необходимо принять во вниманіе и нѣкоторые стержни другой половины. Такъ напр. при дѣйствіи грузовъ по верху на ферму черт. (   ) для опредѣленія усилія въ средней стойкѣ необходимо опредѣлить усиліе и въ стержняхъ четвертой верхней панели, т. е. построить діаграммы какъ для верхняго, такъ и нижняго среднихъ узловъ.

впрочемъ ясно что усиліе $V_4 = P$, почему можно ограничиться построеніемъ діаграммы указаннымъ на чертежѣ.



Черт. 162.

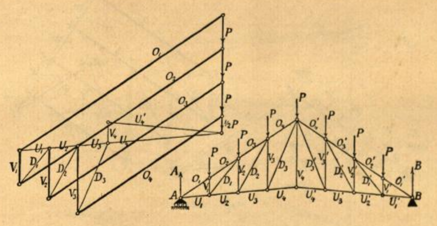
15. Та-же ферма, но постоянные грузы дѣйствуютъ на нижніе узлы.



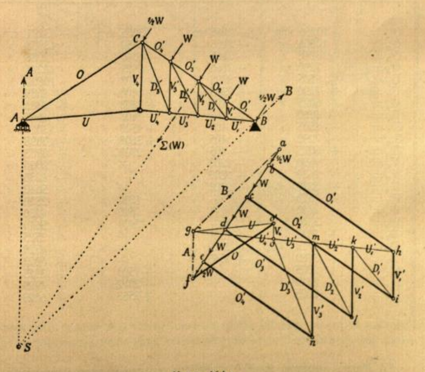
Черт. 163.

Въ этомъ случаѣ нѣтъ необходимости при построеніи діаграммы принимать во вниманіе верхній средній узелъ, такъ какъ средняя стойка не испытываетъ никакого усилія.

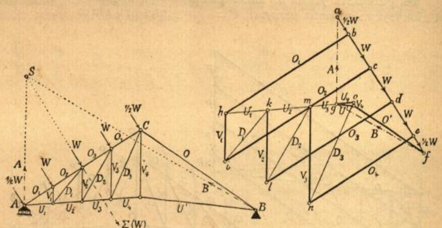
16. Расчитать усилія въ англійской стропильной фермѣ, на узлы которой дѣйствуютъ узловыя нагрузки $P =$ и усилія отъ вѣтра $W =$



Черт. 164.



Черт. 164 a.

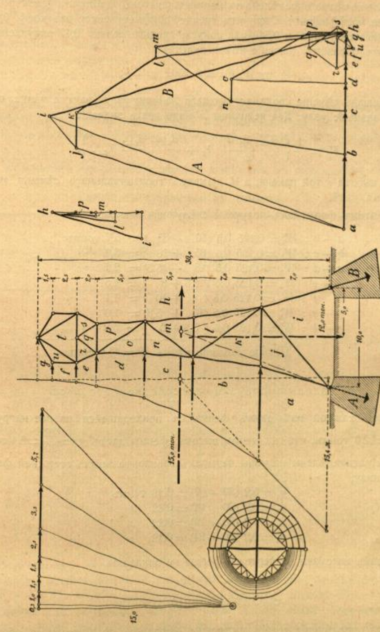


Черт. 164 b.

Стержни.	УСИЛІЯ ВЫЗЫВАЕМЫЯ:			
	собственнымъ вѣсомъ и давленіемъ снѣга.	давленіемъ вѣтра съ лѣвой стороны.	давленіемъ вѣтра съ правой стороны.	сложныя усилія.
$O'_1 =$	— 10206 кгр.	— 2166 кгр.	— 3085 кгр.	— 13291 кгр.
$O'_2 =$	— 10206 »	— 2166 »	— 3752 »	— 13958 »
$O'_3 =$	— 8748 »	— 2166 »	— 3340 »	— 12088 »
$O'_4 =$	— 7290 »	— 2166 »	— 2927 »	— 10217 »
$U_1 =$	+ 8505 »	+ 2295 »	+ 1808 »	+ 10800 »
$U_2 =$	+ 7290 »	+ 1395 »	+ 1808 »	+ 8685 »
$U_3 =$	+ 6075 »	+ 495 »	+ 1808 »	+ 7883 »
$U_4 =$	+ 4860 »	— 405 »	+ 1808 »	+ 6668 »
$U'_1 =$	+ 8505 »	— 405 »	+ 4508 »	+ 13013 »
$U'_2 =$	+ 7290 »	— 405 »	+ 3608 »	+ 10898 »
$U'_3 =$	+ 6075 »	— 405 »	+ 2708 »	+ 8783 »
$V_1 =$	— 1620 »	— 1200 »	— »	— 2820 »
$V_2 =$	— 2430 »	— 1800 »	— »	— 4230 »
$V_3 =$	— 3240 »	— 2400 »	— »	— 5640 »
$V'_1 =$	— 1620 »	— »	— 1200 »	— 2820 »
$V'_2 =$	— 2430 »	— »	— 1800 »	— 4230 »
$V'_3 =$	— 3240 »	— »	— 2400 »	— 5640 »
$D_1 =$	+ 2025 »	+ 1500 »	— »	+ 3525 »
$D_2 =$	+ 2717 »	+ 2012 »	— »	— 4729 »
$D_3 =$	+ 3460 »	+ 2563 »	— »	+ 6023 »
$D'_1 =$	+ 2025 »	—	+ 1500 »	+ 3525 »
$D'_2 =$	+ 2717 »	—	+ 2012 »	+ 4729 »
$D'_3 =$	+ 2025 »	—	+ 2563 »	+ 6023 »

17. Маякъ высотою въ 30,0 м. имѣетъ въ планѣ видъ круга черт. 165 и состоитъ изъ двухъ рѣшетчатыхъ фермъ, расположенныхъ по двумъ взаимно

перпендикулярнымъ діаметрамъ круга; вспомогательныя фермочки соединяютъ узлы главныхъ фермъ и несутъ желѣзную листовую обшивку маяка. Соб-



Черт. 165.

ственный вѣсъ маяка 24,0 тонны; давленіе вѣтра 250 кгр. на кв. м. нормальной къ вѣтру плоскости. Расчитать усилія въ главныхъ фермахъ и ихъ опорахъ.

Расчетъ произведенъ графически. Для этого вычислены первоначально узловыя нагрузки отъ дѣйствія вѣтра и отъ собственнаго вѣса.

a) Узловыя нагрузки отъ дѣйствія вѣтра.

Давленіе вѣтра опредѣлено по даннымъ опытовъ Irminger'a (см. стр. 109), причемъ за коеффиціентъ μ принятъ среднее арифметическое изъ коеф. 0,57—для длиннаго цилиндра и 0,38—для конуса; среднее ариѳм. 0,47 округлено до 0,5. Такимъ образомъ давленіе вѣтра будетъ

$$W = \mu\, W_0 F = 0{,}5\ 250F = 25F,$$

гдѣ F площадь сѣченія соотвѣтствующаго данному узлу участка маяка, передающаго давленіе узлу. Для величины F надо взять значеніе

$$F_i = \frac{1}{2}\left\{ \frac{d_{i-1} + d_i}{2}\ \lambda_i + \frac{d_i + d_{i+1}}{2}\,\lambda_{i+1} \right\},$$

здѣсь λ_i высота i той панели, а d_i діаметръ горизонтальнаго сѣченія маяка въ данномъ узлѣ.

По этимъ формуламъ получены слѣдующія значенія:

$$\begin{aligned}
a-b &: W_1 = 0{,}125 . 0{,}5\ (56 + 35\ ) = 5{,}7 \text{ тоннъ;}\\
b-c &: W_2 = 0{,}125 . 0{,}5\ (35 + 18\ ) = 3{,}3 \quad » \\
c-d &: W_3 = 0{,}125\ 0{,}5\ (18 + 15{,}5) = 2{,}1 \quad » \\
d-e &: W_4 = 0{,}125 . 0{,}5\ (15{,}5 + 8\ ) = 1{,}5 \quad » \\
e-f &: W_5 = 0{,}125 . 0{,}5\ (\ 8 + 10\ ) = 1{,}1 \quad » \\
f-g &: W_6 = 0{,}125 . 0{,}5\ (10 + 5{,}3) = 1{,}0 \quad » \\
g-h &: W_7 = 0{,}125\ 0{,}5\ (\ 5{,}3 + 0\ ) = 0{,}3 \quad »
\end{aligned}$$

Полное давленіе вѣтра $W = 15{,}0$ тоннъ.

b) Узловыя нагрузки отъ собственнаго вѣса.

Вѣсъ каждой изъ двухъ фермъ съ приходящейся на нее нагрузкой $0{,}5 . 24 = 12{,}0$ тоннъ, что на метръ высоты фермы даетъ $g = \frac{12}{30} = 0{,}4$ тонны. Нагрузки распредѣлены на узлы четырехъ горизонтальныхъ стержней фермы, считая снизу;

$$\begin{aligned}
g_1 &= 0{,}2\ (30 - 7) = 0{,}46 \text{ тоннъ}\\
g_2 &= 0{,}2\ (30 \quad 14) = 0{,}32 \quad » \\
g_3 &= 0{,}2\ (30 - 19) = 0{,}22 \quad » \\
g_4 &= 0{,}2\ (30 - 24) = 0{,}12 \quad »
\end{aligned}$$

эти узловыя нагрузки на чертежѣ фермы не показаны.

c) Опредѣленіе усилій.

Для опредѣленія усилій построены діаграммы по Кремону съ обозначеніями Bow'a.

Хотя обѣ опоры задѣланы въ кладку, ферма статически опредѣлима: роль подвижной опоры выполняетъ стержень $i-h$; направленіе сопротивленія опоры B опредѣляется этимъ стержнемъ; остается найти силу вѣтра W,—что исполнено построеніемъ веревочнаго многоугольника — и третью внѣшнюю

силу—сопротивленіе опоры A. Послѣдняя сила найдена изъ условія, что три силы W, B и A должны пересѣкаться въ одной точкѣ. По этимъ даннымъ построена діаграмма усилій въ масштабѣ 1 см. = 3 тонны. Усилія отъ собственнаго вѣса находятся графически весьма просто проведеніемъ изъ одной точки пучка лучей параллельныхъ стойкамъ фермъ; на этихъ лучахъ отложены отрѣзы, вертикальныя проекціи которыхъ равны соотвѣтствующей данному стержню нагрузкамъ; горизонтальныя отрѣзки, ограничивающіе лучи — даютъ усилія въ горизонтальныхъ стержняхъ. Построеніе сдѣлано въ масштабѣ въ полтора раза большемъ предыдущаго. Діагонали отъ собственнаго вѣса фермъ не напряжены, ибо моментъ вертикальныхъ силъ, дѣйствующихъ на любую часть фермы, отсѣченную горизонтальнымъ сѣченіемъ, относительно вертикальной оси фермы, на которой и пересѣкаются стойки, равенъ нулю.

Результаты графическаго расчета помѣщены въ прилагаемой таблицѣ.

Усилія въ стержняхъ въ тоннахъ.

1 Стержни.	2 Отъ вѣтра.	3 Отъ собств. вѣса.	4 Наибольш. сумма.	5 Стержни.	6 Отъ вѣтра.	7 Отъ собств. вѣса.	8 Наибольш. Сумма.
$a-j$	± 21,475	— 4,800	— 26,3	$i-j$	± 3,225	—	— 3,2
$i-h$	∓ 23,850		— 28,7	$j-k$	— 2,700 — 3,000	= 1,350	— 4,6
$b-k$	± 21,075	— 3,300	— 24,4	$k-l$	∓ 7,350	—	— 7,4
$l-h$	∓ 14,925		— 18,2	$l-m$	— 0,900 — 2,400	= 0,500	— 1,9
$c-n$	± 8,850	— 2,225	— 11,1	$m-n$	± 7,275	—	— 7,3
$m-h$	∓ 13,500		— 15,7	$n-o$	— 1,688 + 0,412	= 0,200	— 0,6
$d-o$	± 8,800	— 1,200	— 10,0	$o-p$	∓ 7,000	—	— 7,0
$p-h$	± 2.888		+ 4,1	$p-q$	± 1,200	—	+ 1,2
$e-r$	± 0,788	—	— 0,8	$q-r$	± 2,660	—	+ 2,7
$s-h$	∓ 0,788	—	— 0,8	$q-s$	∓ 2,660	—	— 2,7
$f-u$	∓ 0,600	—	— 0,6	$r-t$	∓ 2,325	—	— 2,3
$g-u$	∓ 1,100	—	— 1,1	$t-s$	± 0,788	—	+ 0,8
$t-h$	∓ 0,825	—	— 0,8	$t-u$	± 1,500	—	+ 1,5

Если вѣтеръ дѣйствуетъ справа, то въ этомъ случаѣ стержень $j-k$ сжатъ, когда стойки $a-j$ и $b-k$ сжаты. Величины сжатія находятся изъ условія $X - 5{,}70 = -2{,}70$; гдѣ 5,7 узловая нагрузка; отсюда $X = +3{,}0$ при вѣтрѣ слѣва и $X = -3{,}0$ при вѣтрѣ справа. Точно также стержень $l-m$ при вѣтрѣ справа растягивается силою 0,9, т. е. сжимается узловой нагрузкой въ 3,3 *т.*, слѣдовательно $X = -3{,}3 + 0{,}9 = -2{,}4$. Наконецъ стержень $n-o$: $X - 2{,}1 = -1{,}7$; $X = 0{,}412$ при вѣтрѣ слѣва и $X = -0{,}412$ при вѣтрѣ справа.

Всѣ остальныя цифры столбцовъ 2 и 6 при дѣйствіи вѣтра справа мѣняютъ свой знакъ, почему передъ цифрами и поставлено два знака: верхній при вѣтрѣ слѣва, нижній при вѣтрѣ слѣва. На основаніи этого и получены наибольшія по абсолютной величинѣ значенія, указанныя въ столбцахъ 3 и 8.

d) Сопротивленія опоръ.

Обѣ опоры слѣдуетъ закрѣпить въ кладкѣ и расчитать объемъ кладки, необходимый какъ противовѣсъ.

Сопротивленіе опоры B равно усилію стержня ih, но знакопротивоположно съ нимъ, т. е. $B_1 = -(+21{,}475 - 4{,}800) = -16{,}675$ тоннъ, вытягиваніе.

$$B_2 = -(-21{,}475 - 4{,}800) = +26{,}275 \text{ тоннъ, сжатіе.}$$

Сопротивленіе опоры A получимъ изъ діаграммы, но прибавляя или вычитая составляющую отъ вѣса.

Ее получимъ изъ діаграммы для вѣса, т. е. возьмемъ какъ и для правой опоры 4,800 тонны.

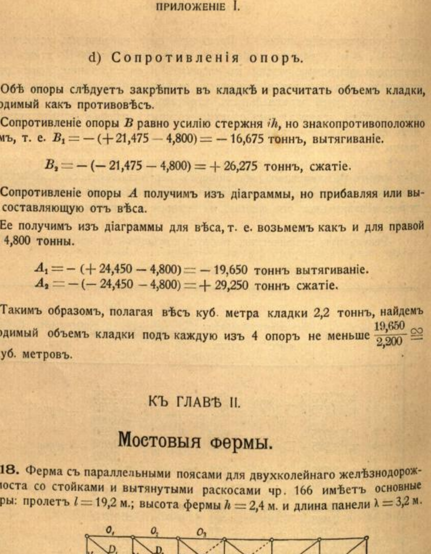
$$A_1 = -(+24{,}450 - 4{,}800) = -19{,}650 \text{ тоннъ вытягиваніе.}$$
$$A_2 = -(-24{,}450 - 4{,}800) = +29{,}250 \text{ тоннъ сжатіе.}$$

Такимъ образомъ, полагая вѣсъ куб. метра кладки 2,2 тоннъ, найдемъ необходимый объемъ кладки подъ каждую изъ 4 опоръ не меньше $\frac{19{,}650}{2{,}200} \cong$ $\cong 9$ куб. метровъ.

КЪ ГЛАВѢ II.

Мостовыя фермы.

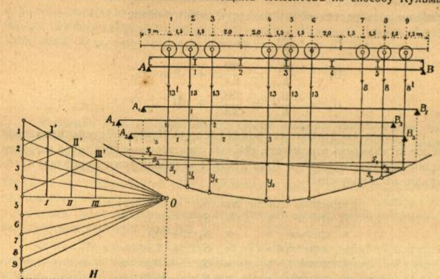
18. Ферма съ параллельными поясами для двухколейнаго желѣзнодорожнаго моста со стойками и вытянутыми раскосами чр. 166 имѣетъ основные размѣры: пролетъ $l = 19{,}2$ м.; высота фермы $h = 2{,}4$ м. и длина панели $\lambda = 3{,}2$ м.



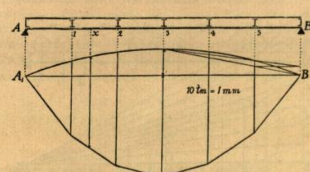
Черт. 166.

Мостъ состоитъ изъ двухъ главныхъ фермъ, а потому каждая изъ нихъ принимаетъ нагрузку отъ одной колеи.

Разстояніе между осями и нагрузка на ось видна изъ чрт. 167 a, гдѣ найдены наибольшія значенія изгибающихъ моментовъ по способу Кульмана.



Черт. 167 a.



Черт. 167 b.

Пользуясь данными этого черт. построена эпюра наибольшихъ моментовъ. Полные величины моментовъ въ узловыхъ точкахъ выразятся такъ:

a) Усилія въ стержняхъ поясовъ. Значенія моментовъ для узловыхъ точекъ найдены на чрт. 167 a, въ круглыхъ числахъ они будутъ:

$$M_1 = 189 \text{ т.-м.}; \quad M_2 = 288 \text{ т.-м.}; \quad M_3 = 322 \text{ т.-м.}$$

Отсюда получимъ величины силъ сжатія для верхняго пояса:

$$O_1 = -\frac{M_1}{h} = -\frac{189}{2{,}4} = -\ 79 \text{ тоннъ.}$$
$$O_2 = -\frac{M_2}{h} = -\frac{288}{2{,}4} = -120 \quad "$$

$$O_3 = -\frac{M_3}{h} = -\frac{322}{2{,}4} = -134 \text{ тоннъ}.$$

и величины силъ растяженія въ панеляхъ нижняго пояса:

$$U_1 = \frac{M_0}{h} = 0$$

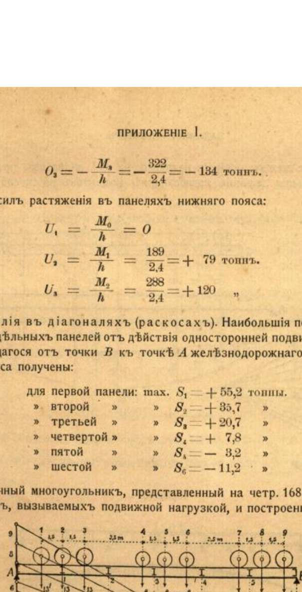
$$U_2 = \frac{M_1}{h} = \frac{189}{2{,}4} = +\ 79 \text{ тоннъ}.$$

$$U_3 = \frac{M_2}{h} = \frac{288}{2{,}4} = +120 \quad „$$

b) Усилія въ діагоналяхъ (раскосахъ). Наибольшія перерѣзывающія силы для отдѣльныхъ панелей отъ дѣйствія односторонней подвижной нагрузки (передвигающагося отъ точки B къ точкѣ A желѣзнодорожнаго поѣзда) и собственнаго вѣса получены:

для первой панели: max. $S_1 = +55{,}2$ тонны.
» второй » » $S_2 = +35{,}7$ »
» третьей » » $S_3 = +20{,}7$ »
» четвертой » » $S_4 = +\ 7{,}8$ »
» пятой » » $S_5 = -\ 3{,}2$ »
» шестой » » $S_6 = -11{,}2$ »

Веревочный многоугольникъ, представленный на четр. 168 для перерѣзывающихъ силъ, вызываемыхъ подвижной нагрузкой, и построенная подъ нимъ



Черт. 168.

ступенчатая линія перерѣзывающихъ силъ отъ собственнаго вѣса такъ соединены, что съ получающейся діаграммы можно прямо брать отрѣзки, соотвѣтствующіе полной нагрузкѣ.

Для нахожденія max. S_1, надо помѣстить паровозъ такъ, чтобы его вторая ось приходилась надъ узловой точкой 1, и изъ общей ординаты, соотвѣтствующей положенію первой оси паровоза, вычесть составляющую силы P_1, приложенную въ точкѣ опоры A и имѣющую значеніе:

$$P_1' = P_1 \cdot \frac{c}{\lambda}$$

Усилія въ діагоналяхъ получаются безъ труда изъ произведеннаго на черт. 168 построенія поперечныхъ силъ, если черезъ верхнія конечныя точки ординатъ, представляющихъ собой поперечныя силы, провести горизонтали, а черезъ нижнія—линіи, параллельныя діагоналямъ. Находимъ такимъ образомъ слѣдующія числа, округленныя до цѣлыхъ тоннъ:

$D_1 = +92$ тоннъ $\quad D_4 = +13$ тоннъ
$D_2 = +60$ „ $\quad D_5 = -\ 5$ „
$D_3 = +35$ „ $\quad D_6 = -19$ „

Діагонали D_5 и D_6 испытываютъ сжатіе. Если бы мы пожелали, чтобы всѣ діагонали испытывали только растяженіе, то должны были бы діагоналямъ въ пятой и шестой панеляхъ дать уклонъ справа налѣво.

При движеніи желѣзнодорожнаго поѣзда по мосту отъ точки A къ точкѣ B, для сохраненія во всѣхъ діагоналяхъ одного только растягивающаго напряженія, слѣдуетъ, наоборотъ, придать діагоналямъ двухъ среднихъ панелей уклонъ слѣва направо. Отсюда ясно, что двѣ среднія панели должны имѣть перекрестныя діагонали (кресты).

c) Усилія въ вертикаляхъ (стойкахъ). При опредѣленіи напряженій въ поясахъ и діагоналяхъ безразлично, находится нагрузка въ узловыхъ точкахъ верхняго и нижняго пояса; при опредѣленіи же напряженій въ вертикаляхъ необходимо раздѣлить оба эти случая нагрузки.

Напряженіе въ вертикали всегда противоположно по знаку съ вертикальной составляющей напряженія той діагонали, которая сходится съ вертикалью въ ненагруженной узловой точкѣ. При растянутыхъ діагоналяхъ вертикали всегда сжаты. Замѣчая, что въ данномъ случаѣ вертикальная составляющая напряженія діагонали равна дѣйствующей въ этой панели наибольшей перерѣзывающей силѣ S, получимъ въ круглыхъ числахъ:

при нагруженномъ нижнемъ поясѣ (при ѣздѣ понизу):

$V_0 = -$ max. $S_1 = -55$ тоннъ
$V_1 = -$ max. $S_2 = -36$ „
$V_2 = -$ max. $S_3 = -21$ „
$V_3 = -$ max. $S_4 = -\ 8$ „

при нагруженномъ верхнемъ поясѣ (при ѣздѣ поверху):

$V_1 = -$ max. $S_1 = -55$ тоннъ
$V_2 = -$ max. $S_2 = -36$ „
$V_3 = -$ max. $S_3 = -21$ „

Крайняя вертикаль, при нагруженномъ верхнемъ поясѣ, воспринимаетъ все давленіе опоры, которое представляется на черт.. 163 отрѣзкомъ A_2C

Находимъ поэтому:

$$V_0 = -\text{max. } S_0 = -73 \text{ тонны}.$$

Такъ какъ обыкновенно рѣчь идетъ о нахожденіи лишь наибольшихъ напряженій въ отдѣльныхъ стержняхъ, то наименьшія напряженія, обнаруживающіяся въ діагоналяхъ и вертикаляхъ, могутъ быть оставляемы безъ вниманія.

Строго говоря, не только нагруженные узлы, какъ было раньше предположено, являются точками приложенія собственнаго вѣса, но часть его приходится также и на ненагруженные узлы и вліяетъ извѣстнымъ образомъ на величины напряженій въ вертикаляхъ. Однако, вліяніемъ этого факта, выражающимся въ немного-большей нагрузкѣ вертикалей при ѣздѣ понизу и настолько же меньшей нагрузкѣ ихъ при ѣздѣ поверху, слѣдуетъ пренебрегать (какъ не имѣющимъ особаго значенія) при разрѣшеніи практическихъ вопросовъ.

19. Ферма съ параллельными поясами, съ грузами дѣйствующими на верхніе узлы пролетомъ $l = 12$ м., высотою $h = 2$ м., съ панелями $\lambda = 2{,}0$ м. имѣетъ наклонные къ серединѣ раскосы и подвержена дѣйствію постоянной нагрузки $g = 600$ кгр. на погонный метръ ея длины и временной по $p = 800$ кгр. на погонный метръ. Опредѣлить наибольшія усилія во всѣхъ частяхъ фермы.

На каждый средній узелъ дѣйствуетъ:

Отъ постоянной нагрузки	2.600 = 1200 кгр.	
» временной »	2.800 = 1600 »	

Всего же на средній узелъ нагрузка составляетъ

$$Q = Q_g + Q_p = 1200 + 1600 = 2800 \text{ кгр.}$$

Сопротивленіе опоры будетъ: отъ постоянной нагрузки

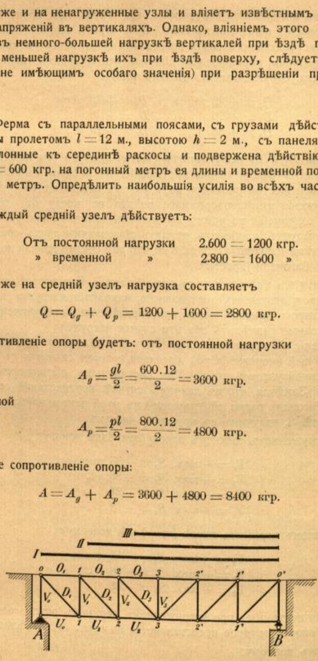
$$A_g = \frac{gl}{2} = \frac{600.12}{2} = 3600 \text{ кгр.}$$

отъ временной

$$A_p = \frac{pl}{2} = \frac{800.12}{2} = 4800 \text{ кгр.}$$

Полное сопротивленіе опоры:

$$A = A_g + A_p = 3600 + 4800 = 8400 \text{ кгр.}$$



Черт. 169.

Обозначимъ стержни какъ то указано въ курсѣ на стр. 84.

Найдемъ сначала усилія въ поясахъ.

Такъ какъ усилія эти пропорціональны изгибающимъ моментомъ, то наибольшія усилія получатся при полной загрузкѣ фермы, т. е. когда временная нагрузка будетъ дѣйствовать на всѣ узлы фермы по схемѣ I. Воспользуемся способомъ Риттера.

$$O_1 = -\frac{M_1}{h};$$

$$O_2 = -\frac{M_2}{h};$$

$$O_3 = -\frac{M_3}{h},$$

Для нижняго пояса U:

$$U_0 = \frac{M_0}{h};$$

$$U_1 = \frac{M_1}{h};$$

$$U_2 = \frac{M_2}{h};$$

Остается теперь найти значенія количествъ M.

Находимъ:

$$M_0 = O;$$

$$M_1 = A.\lambda - \frac{1}{2} Q.\lambda = 8400.2 - 1400\,.\,2 = 14000 \text{ кгр. м.}$$

$$M_2 = A\,.\,2\lambda - \frac{1}{2} Q.2\lambda - Q\lambda = 2\lambda \left\{ A - Q \right\} = 2.2 \left\{ 8400 - 2800 \right\} = 22400 \text{ кгр. м.}$$

$$M_3 = A\,.\,3\lambda - \frac{1}{2} Q.3\lambda - Q.2\lambda - Q\,\lambda = 3\lambda \left\{ A - \frac{3}{2} Q \right\} =$$

$$= 3.2 \left\{ 8400 - 4200 \right\} = 25200 \text{ кгр. м.}$$

Итакъ искомыя усилія будутъ: для верхняго пояса—

$$\left.\begin{aligned} O_1 &= -\frac{14000}{2} = -\ 7000 \text{ кгр.} \\ O_2 &= -\frac{22400}{2} = -11400 \text{ кгр.} \\ O_3 &= -\frac{25200}{2} = -12600 \text{ кгр.} \end{aligned}\right\} \text{ пояса сжаты.}$$

Для нижняго пояса

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= \frac{0}{2} = 0; \\ U_1 &= \frac{14000}{2} = 7000 \text{ кгр.} = -O_1; \\ U_2 &= \frac{22400}{2} = 11400 \text{ кгр.} = -O_2. \end{aligned}\right\} \text{ пояса вытянуты.}$$

Усилія въ раскосахъ зависятъ отъ поперечныхъ силъ.

Назовемъ черезъ α уголъ составляемый раскосомъ съ вертикалью, тогда найдемъ:

$$\max D_1 = \frac{S_1}{\cos\alpha};$$
$$\max D_2 = \frac{S_2}{\cos\alpha};$$
$$\max D_3 = \frac{S_3}{\cos\alpha};$$
$$\max D_4 = \frac{S_4}{\cos\alpha}.$$

Остается найти [выраженія для S_i max.

$$\max S = S_g + \max S_p$$

Руководствуясь выведенными въ (**№№ 10** и **13**) значеніями найдемъ

$$S = \frac{\lambda}{2}\left\{ g\,(n+1-2\,m) + p\,\frac{(n-m)^2}{n-1} \right\}$$

Въ данномъ случаѣ $n = 6$; $g = 600$ и $p = 800$.

$$S_1 = 600\,(7-2) + 800\,\frac{25}{5} = 3000 + 4000 = 7000 \text{ кгр.}$$
$$S_2 = 600\,(7-4) + 800\,\frac{16}{5} = 1800 + 2560 = 4360 \text{ кгр.}$$
$$S_3 = 600\,(7-6) + 800\,\frac{9}{5} = 600 + 1420 = 2040 \text{ кгр.}$$
$$S_4 = 600\,(7-8) + 800\,\frac{4}{5} = (-600 + 640) = -40 \text{ кгр.}$$

Подставляя эти величины въ только что найденныя выраженія для усилій въ раскосахъ, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} \max D_1 &= \frac{7000}{0{,}707} = 9901 \text{ кгр.} \\ \max D_2 &= \frac{4360}{0{,}707} = 6167 \text{ кгр.} \end{aligned}\right\} \text{ раскосы растянуты.}$$

$$\left.\begin{aligned} \max D_3 &= \frac{2040}{0{,}707} = 2885 \text{ кгр.} \\ \min D_3 &= \frac{-40}{0{,}707} = -56 \end{aligned}\right\} \text{ раскосъ сжато вытянутъ.}$$

Для опредѣленія усилій въ стойкахъ проводимъ наклонное сѣченіе черезъ стержни, снабженные одинаковыми указателями и взявъ сумму проекцій на вертикальную ось силъ, дѣйствующихъ на лѣвую часть фермы, получимъ

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= -A = -8400 \\ V_1 &= -S_1 = -7000 \\ V_2 &= -S_2 = -4360 \end{aligned}\right\} \text{ стойки сжаты.}$$

Для опредѣленія усилія въ средней стойкѣ V_3, вырѣзаемъ средній верхній узелъ и изъ проекціи силъ на вертикальную ось, находимъ

$$V_3 = -Q_3 = -2800.$$

20. Опредѣлить усилія въ частяхъ фермы, перекрывающей тотъ же пролетъ, но въ которой узлы нижняго пояса лежатъ на дугѣ параболы со стрѣлкою равною высотѣ предыдущей фермы и при тѣхъ же нагрузкахъ.

Для нахожденія усилій во всѣхъ стержняхъ можно было бы воспользоваться, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, способомъ Риттера. Опредѣляя усиліе въ раскосахъ пришлось бы искать пересѣченія стержней верхняго и нижняго поясовъ, что графически сдѣлать трудно, вслѣдствіе остроты угла; при аналитическомъ же рѣшеніи въ случаѣ равномѣрно распредѣленной нагрузки интереснѣе прибѣгнуть къ нѣсколько инымъ разсужденіямъ.

Найдемъ усилія въ стержняхъ верхняго пояса по Риттеру. Они будутъ выражаться уравненіями.

$$O_i = -\frac{M_i}{h_i} \tag{1}$$

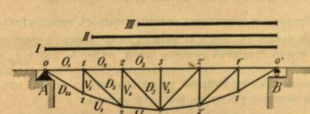
Для нахожденія M_i, т. е. изгибающаго момента относительно вертикальнаго сѣченія проходящаго черезъ узелъ i, замѣтимъ, что въ случаѣ равномѣрно распредѣленной нагрузки онъ выражается ординатою параболы со стрѣлкою по серединѣ пролета.

$$f = \frac{ql^2}{8}, \tag{2}$$

гдѣ $q = p + g$,

что было выведено выше. Въ данномъ случаѣ, когда нагрузка передается только въ узловыхъ точкахъ, парабола обратится въ многоугольникъ, вписанный въ параболу. Вершины этого многоугольника, лежащія на вертикаляхъ узловъ, будутъ имѣть общія ординаты съ ординатами параболы и будутъ имѣть значенія:

$$M_i = q\,\frac{x_i\,(l - x_i)}{2}. \tag{3}$$



Черт. 170.

Найдемъ теперь выраженіе для знаменателя h_i, выраженія (1) т. е. ординаты параболы, на которой лежатъ узлы фермы. Назовемъ стрѣлку параболы по серединѣ пролета, т. е. длину вертикаль V_3 черезъ f_0, тогда изъ выраженія параболы имѣемъ.

$$f_0 = \frac{l^2}{2a}, \tag{4}$$

гдѣ $2a$ есть параметръ параболы. Подберемъ нѣкоторую величину P такую, чтобы она удовлетворяла равенству

$$\frac{8}{P} = 2a,$$

тогда выраженіе для стрѣлки будетъ:

$$f_0 = \frac{Pl^2}{8}, \tag{6}$$

а слѣдовательно выраженіе для любой ординаты:

$$h_i = P\frac{x_i(l-x)}{2} \tag{7}$$

Выразивъ эту ординату въ зависимости отъ стрѣлки f_0, т. е. раздѣливъ послѣднее выраженіе на предпослѣднее, находимъ:

$$\frac{h_i}{f_0} = \frac{4x_i(l-x_i)}{l^2} \text{ и } h_i = \frac{4f_0}{l^2}x_i(l-x_i). \tag{9}$$

Теперь можемъ въ уравненіе для O_i подставить найденныя выраженія для числителя и знаменателя и тогда находимъ

$$O_i = -\frac{q\dfrac{x_i(l-x_i)}{2}}{\dfrac{4f_0}{l^2}x_i(l-x_i)} = -\frac{ql^2}{8f},$$

т. е.

$$O_i = \mathrm{const.}$$

и значитъ усилія во всѣхъ стержняхъ верхняго пояса между собою одинаковы.

Проведя теперь наклонныя сѣченія черезъ стержни съ одинаковыми указателями и взявъ сумму проекцій внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на лѣвую часть, находимъ:

$$O_1 = O_2 = O = U_1 \cos\varphi_1 = -U_2 \cos\varphi_2, \tag{10}$$

гдѣ φ углы, образуемые стержнями нижняго пояса съ горизонтомъ.

Такъ какъ усилія въ поясѣ O имѣютъ сами знакъ отрицательный, то слѣдовательно усилія стержней нижняго пояса имѣютъ знакъ $+$, и дѣйствительно извѣстно что нижніе стержни растянуты. Если обозначить длину стержней нижняго пояса тѣми-же буквами но маленькими въ отличіе отъ большихъ, черезъ которыя названы усилія въ нихъ, то имѣемъ:

$$\cos\varphi_i = \frac{\lambda}{u_i}, \tag{11}$$

гдѣ λ есть длина панели. Въ такомъ случаѣ найдемъ:

$$U_i = -\frac{O_i}{\cos\varphi_i} = \frac{1}{\lambda}\frac{ql^2}{8f} \cdot u_i, \tag{12}$$

а такъ какъ длина нижнихъ стержней увеличивается отъ середины къ концамъ, то въ фермѣ съ параболическимъ поясомъ, въ отличіе отъ фермы съ прямолинейными поясами, усилія въ поясахъ возрастаютъ отъ середины къ концамъ.

Пусть нагрузка остается пока равномѣрно распредѣленной и найдемъ усилія въ раскосахъ. Для этого вырѣжемъ произвольный узелъ, въ которомъ

пересѣкается какой-либо раскосъ (т. е. значитъ кромѣ узловъ опорныхъ и верхняго средняго) и разсматривая условія его равновѣсія, возьмемъ проекцію силъ на горизонтальную ось.

$$-O_{i-1} + O_i + D_i \sin\alpha_i = 0, \tag{14}$$

откуда

$$D_i \sin\alpha = 0,$$

для чего необходимо

$$D_i = 0. \tag{15}$$

Итакъ въ фермѣ съ параболическимъ поясомъ усилія въ раскосахъ отъ равномѣрно распредѣленной нагрузки равны нулю. Такимъ образомъ остается найти усилія въ раскосахъ отъ временной нагрузки, занимающей часть пролета.

Для опредѣленія усилій въ раскосахъ придется загрузить часть пролета и найти усилія въ раскосахъ изъ выраженій вида

$$D_2 = \frac{1}{\sin\alpha_2}\left\{O''_2 - O''_1\right\};$$
$$D_3 = \frac{1}{\sin\alpha_3}\left\{O_3''' - O_2'''\right\}; \tag{16}$$

гдѣ верхніе значки при O показываютъ, что усилія въ верхнемъ поясѣ взяты при частичной загрузкѣ фермы по схемѣ II и III. Усилія въ стойкахъ найдемъ изъ условій равновѣсія верхнихъ узловъ.

$$-V_1 - D_2\cos\alpha_2 - Q_1 = 0;\ V_1 = -\left\{D_2\cos\alpha_2 + Q'_1\right\};$$
$$-V_2 - D_3\cos\alpha_3 - Q_2 = 0;\ V_2 = -\left\{D_3\cos\alpha_3 + Q_2''\right\};$$
$$-V_3 - Q_3 = 0;\ V_3 = -Q. \tag{17}$$

Подставляя въ первыя изъ этихъ выраженій значенія D изъ (16), окончательно найдемъ

$$V_1 = -\left\{\frac{(O_2'' - O_1'')}{\mathrm{tg}\,\alpha_2} + Q_1\right\};$$
$$V_2 = -\left\{\frac{O_3''' - O'''_2}{\mathrm{tg}\,\alpha_3} + Q_2\right\}. \tag{17 bis}$$

Опредѣлимъ теперь численныя величины всѣхъ найденныхъ величинъ.

Ординаты узловъ $h_1 = \frac{4\,.\,2}{144}\,2\,.\,10 = 0{,}0555\,.\,20 = 1{,}111;$

нижняго пояса: $h_2 = \frac{4\,.\,2}{144}\cdot 4\,.\,8 = 0{,}0555\,.\,32 = 1{,}776$.

Длины стержней нижняго пояса

$$u_1 = \sqrt{\lambda^2 + h_1^2} = \sqrt{4 + 1{,}234} = 2{,}287 \text{ м.};$$
$$u_2 = \sqrt{\lambda^2 + (h_2 - h_1)^2} = \sqrt{4 + 0{,}442} = 2{,}107 \text{ м.};$$
$$u_3 = \sqrt{\lambda^2 + (h_3 - h_2)^2} = \sqrt{4 + 0{,}0501} = 2{,}012 \text{ м.}$$

Синусы угловъ наклоненія раскосовъ

$$\sin\alpha_2 = \cos\beta_2 = \frac{\lambda}{d_2} = \frac{2}{\sqrt{4+3{,}167}} = \frac{2}{2{,}678} = 0{,}747;$$

$$\sin\alpha_3 = \cos\beta_3 = \frac{\lambda}{d_3} = \sin 45^0 = 0{,}707.$$

Тангенсы угловъ наклоненія раскосовъ

$$tg\,\alpha_2 = \frac{0{,}747}{\sqrt{0{,}253}} = 1{,}124;$$

$$tg\,\alpha_3 = 1{,}000.$$

Усилія въ поясахъ.

Верхній поясъ

$$O_i = \frac{ql^2}{8f} = \frac{1400.144}{8.2} = 12600 \text{ кгр.}$$

Нижній поясъ.

$$D_u = \frac{Od_u}{\lambda} = \frac{12600}{2} \cdot 2{,}287 = 14408 \text{ кгр.}$$

$$U_1 = \frac{O.u_2}{\lambda} = \frac{12600}{2} \cdot 2{,}107 = 13274 \text{ кгр.}$$

$$U_2 = \frac{Ou_2}{\lambda} = \frac{12600}{2} \quad 2{,}012 = 12676 \text{ кгр.}$$

Точки раздѣла нагрузокъ расположены отъ лѣвой опоры въ разстояніи.

$$\text{2-я панель: } \frac{n\lambda}{n-1} = \frac{6}{5} \cdot 2 = 2{,}4 \text{ м.}$$

$$\text{3-я панель: } \frac{n\lambda}{n-1} \cdot 2 = 2{,}4 \cdot 2 = 4{,}8 \text{ м.}$$

Величины M', т. е. моменты при частичной загрузкѣ

$$M_1'' = \frac{g}{2} \times (l-x) + p + A'_p \cdot x = 300.2.10 + 800\frac{4{,}8}{12} \cdot 2 \cdot 9{,}6 = 6000 + \\ + 6144 = 12144. \text{ кгр. м.}$$

$$M'_2 = \frac{g}{2} \cdot x\,(l-x) + A'_p\,x = 300 \cdot 4.8 + 800 \cdot \frac{4{,}8}{12} \cdot 4 \cdot 9{,}6 = 9600 + 12288 = \\ = 21888 \text{ кгр. м.}$$

Величины M'''.

$$M'''_2 = \frac{g}{2} \cdot x\,(l-x) + A''_p\,x = 300 \cdot 4 \cdot 8 + 800 \cdot 7{,}2\frac{3{,}6}{12} \cdot 4 = 9600 + 6912 = 16512.$$

$$M''_3 \frac{g}{2}\,x\,(l-x)\,A''_p\,x = 300 \cdot 6 \cdot 6 + 800 \cdot 7{,}2\,\frac{3{,}6}{12} \cdot 6 = 10800 + 10368 = \\ = 21168 \text{ кгр. м.}$$

Усилія O''.

$$O''_1 = \frac{M'_1}{h_1} = \frac{12144}{1{,}111} = 10930 \text{ кгр.}$$

$$O''_2 = \frac{M'_2}{h_2} = \frac{21888}{1{,}776} = 12324 \text{ кгр.}$$

Усилія O'''.

$$O''_2 = \frac{M''_2}{h_2} = \frac{16512}{1{,}776} = 9297;$$

$$O'''_3 = \frac{M'''_3}{h_3} = \frac{21168}{2} = 10584.$$

Величина $Q''_1 = g\lambda + p\,\dfrac{(\lambda - z)^2}{2\lambda} = 1200 + 800\,\dfrac{0{,}8}{2} \cdot 1{,}6 = 1200 + 800 \cdot 0{,}96 =$
$= 1200 + 512 = \mathit{1712}.$

Величина $Q'''_2 = g\lambda + p\,\dfrac{(\lambda - z)^2}{2\lambda} = 1200 + 800 \cdot \dfrac{0{,}6}{2} \cdot 1{,}2 = 1200 + 320 = \mathit{1520}.$

Усилія въ раскосахъ.

$$D_2 = \frac{1}{\sin\alpha_2}\left\{O''_2 - O''_1\right\} = \frac{1}{0{,}747}\left\{12324 - 10930\right\} = \frac{1394}{0{,}747} = +1866.$$

$$D_3 = \frac{1}{\sin\alpha_3}\left\{O'''_3 - O'''_2\right\} = \frac{1}{0{,}707}\left\{10584 - 9297\right\} = \frac{1287}{0{,}707} = +1820.$$

Усилія въ стойкахъ.

$$V_1 = -\left\{\frac{O''_2 - O''_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2} + Q''_1\right\} = -\left(\frac{1394}{1{,}124} + 1712\right) = 1240 + 1712 = -2952.$$

$$V_2 = -\left\{\frac{O'''_3 - O'''_2}{\mathrm{tg}\,\alpha_3} + Q'''_2\right\} = -\left(\frac{1287}{1{,}000} + 1520\right) = -2807 \text{ кгр.}$$

$$V_3 = -2800 \text{ кгр., какъ и раньше.}$$

Сравнивая цифры усилій въ послѣдней фермѣ съ фермой съ прямолинейными поясами найдемъ, что въ параболической фермѣ въ общемъ (кромѣ поясовъ) усилія менѣе значительны, а такъ какъ отъ величны усилій непосредственно зависитъ вѣсъ фермы, то параболическія фермы выходятъ вообще говоря легче фермъ съ параллельными поясами.

КЪ ГЛАВѢ III.

Подпорныя стѣнки.

21. Стѣна, ограждающая прудъ, имѣетъ слѣдующіе размѣры:

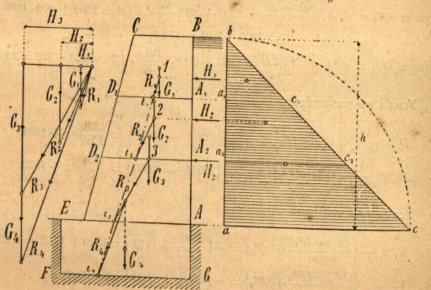
$$AB = 3{,}0 \text{ метра}$$
$$BC = 1{,}2 \quad »$$
$$AD = 1{,}95 \quad »$$
$$AE = FG = 2{,}4 \quad »$$
$$GA = AA_3 = A_2A_1 = A_1B = 1 \text{ метръ.}$$

Вѣсъ 1 куб. метра кладки $\gamma_1 = 2000$ килогр.

Требуется построить линію давленій въ стѣнѣ (линейный масштабъ 1 : 20, масштабъ силъ: 1000 килогр. $= 1{,}5$ см.).

Вѣсъ отдѣльныхъ объемныхъ частей стѣнъ:

$$G_1 = A_1BCD_1 \cdot \gamma_1 = 1{,}325 \,.\, 2000 = 2650 \text{ кгр.}$$
$$G_2 = A_2BCD_2 \cdot \gamma_1 = 2{,}900 \,.\, 2000 = 5800 \text{ "}$$
$$G_3 = ABCD \cdot \gamma_1 = 4{,}725 \,.\, 2000 = 9450 \text{ "}$$
$$G_4 = AEFg \cdot \gamma_1 = 2{,}400 \,.\, 2000 = 4800 \text{ "}$$



Черт. 171.

Давленія воды:

$$H_1 = a_1bc_1 \cdot \gamma = 0{,}5 \,.\, 1000 = 500 \text{ кгр.}$$
$$H_2 = a_2bc_2 \cdot \gamma = 2{,}0 \,.\, 1000 = 2000 \text{ "}$$
$$H_3 = abc \cdot \gamma = 4{,}5 \,.\, 1000 = 4500 \text{ "}$$

Силы, дѣйствующія на швы AE, A_2D_2, A_1D_1 и FG, измѣряются по многоугольнику силъ разстояніе ихъ отъ противоположной точки ядра пусть r_i. Такимъ образомъ получаемъ:

$$R_1 = 2700 \text{ килогр.}; \quad r_1 = 24 \text{ см,}$$
$$R_2 = 6150 \text{ »} \quad r_2 = 38 \text{ »}$$
$$R_3 = 10450 \text{ »} \quad r_3 = 57 \text{ »}$$
$$R_4 = 14950 \text{ »} \quad r_4 = 74 \text{ »}$$

Послѣ того, по данной на стр. 171 формулѣ — (95) разсчитываемъ давленія въ крайнихъ ребрахъ сѣченій:

въ ребрѣ $D_1 \ldots \sigma_1 = \dfrac{6 \,.\, 2700 \,.\, 24}{100 \,.\, 145^2} = 0{,}18$ килогр,

» » $D_2 \ldots \sigma_2 = \dfrac{6 \,.\, 6150 \,.\, 38}{100 \,.\, 170^2} = 0{,}5$ »

» » $D \ldots \sigma_3 = \dfrac{6 \,.\, 10450 \,.\, 57}{100 \,.\, 195^2} = 0{,}94$ »

» » $F \ldots \sigma_4 = \dfrac{6 \,.\, 14950 \,.\, 74}{100 \,.\, 240^2} = 1{,}15$ »

Направленіе силы R_1 встрѣчаетъ швъ A_1D_1 какъ разъ въ его серединѣ, и слѣдовательно, здѣсь имѣетъ мѣсто равномѣрное распредѣленіе давленія; и поэтому величина этого давленія σ_0 на единицу площади можетъ быть получена и проще:

$$\sigma_0 = \frac{G_1}{100 \,.\, A_1D_1} = \frac{2650}{100 \,.\, 145} = 0{,}18 \text{ килогр.}$$

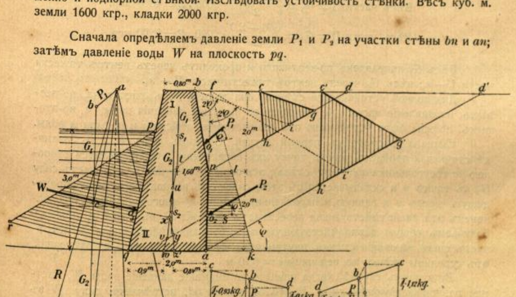
Линія давленій нигдѣ не выходитъ за предѣлы средней трети стѣны.

Углы, образуемые направленіями силъ R_1, $R_2 \ldots R_4$ съ нормалями къ соотвѣтсвеннымъ швамъ:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_1 = 10^1/_2{}^\circ; & \alpha_3 = 25^1/_2{}^\circ \\ \alpha_2 = 19^\circ; & \alpha_4 = 17^1/_2{}^\circ \end{array}\right\} \text{что} < \text{угловъ тренія.}$$

23. Набережная стѣнка, изображенная на черт. 172 служитъ одновременно и подпорной стѣнкой. Изслѣдовать устойчивость стѣнки. Вѣсъ куб. м. земли 1600 кгр., кладки 2000 кгр.

Сначала опредѣляемъ давленіе земли P_1 и P_2 на участки стѣны bn и an; затѣмъ давленіе воды W на плоскость pq.



Черт. 172.

Если наивысшій уровень горизонта воды опредѣляется точкою p, то величина давленія воды на стѣнку pq равна вѣсу призмы, которой основаніе есть треугольникъ pqr, причемъ линія qr равна глубинѣ погруженія = 3 м. Давленіе W приложено въ точкѣ o_3, опредѣляемой условіемъ, что $qo_3 = \dfrac{1}{3}\, pq$. Величина давленія воды будетъ:

$$W_1 = \frac{3{,}05\,.\,3{,}0}{2} \cdot 1000 = 4600 \text{ кгр.}$$

гдѣ 3,05 есть длина pq.

Давленіе земли на участокъ стѣнки nb равно вѣсу призмы съ основаніемъ равнымъ пл. $\triangle\, cgh = \frac{1}{2}\ 1{,}25.1{,}35 = 0{,}844$ м.²

$$P_1 = 0{,}844.1600 = 1350 \text{ кгр.}$$

Давленіе земли на участокъ стѣнки an опредѣляется площадью трапеціи $akln = \frac{1}{2}\,(1{,}2 + 0{,}6).2 = 1{,}8$ м.²

$$P_2 = 1{,}8.1600 = 2880 \text{ кгр.}$$

Вѣсъ стѣнки опредѣляется слѣдующимъ расчетомъ.

$$\text{Вѣсъ части I} = G_1 = \frac{0{,}8 + 1{,}60}{2} \cdot 2000\,.\,2 = 4800 \text{ кгр.}$$

$$\text{Вѣсъ части II} = G_2 = \frac{1{,}60 + 2{,}0}{2} \cdot 2000\,.\,2 = 7200 \text{ кгр.}$$

Вѣсъ G_1 направленъ по вертикали и проходитъ черезъ центръ тяжести части I — s_1; вѣсъ G_2 черезъ центръ тяжести части II — s_2.

Для полной устойчивости стѣнки, она должна быть расчитана, во-первыхъ, на давленіе насыпи, не принимая во вниманіе давленія воды, и во-вторыхъ, должна быть устойчивою при совмѣстномъ дѣйствіи и насыпи и воды.

Сначала разсмотримъ первый случай. Сложимъ силы P_1 и G_1; равнодѣйствующая пройдетъ черезъ точку ихъ пересѣченія t и опредѣлится стороною ac треугольника abc (черт. слѣва); эта равнодѣйствующая встрѣчаетъ силу G_2 въ точкѣ u и складывается съ этою силою въ равнодѣйствующую проходящую черезъ u и равную и параллельную линію ad многоугольника силъ, наконецъ эта равнодѣйствующая пересѣкаетъ давленіе P_2 въ точкѣ v, причемъ получаемъ общую равнодѣйствующую $ae = R$. Равнодѣйствующая R встрѣчаетъ швъ основанія стѣнки внутри ядра сѣченія въ точкѣ w, отстоящій, отъ середины стѣнки на величину $e = 0{,}10$ м.

Во второмъ случаѣ, когда принято во вниманіе давленіе воды W, частная равнодѣйствующая силъ P_1, G_1 G_2 равная ad, встрѣчаетъ силу W въ точкѣ x и даетъ вторую частную равнодѣйствующую, опредѣляемую бокомъ af многоугольника силъ, наконецъ эта частная равнодѣйствующая встрѣчаетъ давленіе P_2 въ точку y, причемъ получаемъ общую равнодѣйствующую $ag = R_1$. Давленіе R_1 встрѣчаетъ швъ aq также внутри ядра сѣченія въ разстояніи 0,16 м. отъ центра сѣченія шва.

Давленіе на швъ.

Въ первомъ случаѣ имѣемъ: вертикальная составляющая давленія на швъ будетъ $ad = 71{,}5$ мм. при масштабѣ 1 мм. = 200 кгр. найдемъ:

$$N = 71{,}5\,.\,200 = 14300 \text{ кгр.}$$

Ширина шва $d = 200$ см.; $e = 10$ см.

$$\sigma_1 = \frac{N}{d\,.\,100}\left\{\frac{d + 6e}{d}\right\} = \frac{14300}{20000}\,\frac{260}{200} = 0{,}715\,.\,1{,}3 = 0{,}93 \text{ кгр./см}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{d\,.\,100}\left\{\frac{d - 6e}{d}\right\} = \frac{14300}{20000}\,\frac{1400}{200} = 0{,}715\,.\,0{,}7 = 0{,}50 \text{ кгр./см}^2$$

Во второмъ случаѣ вертикальная составляющая $al = 76$ мм.

$$N_1 = 76\,.\,200 = 15200.$$

Разстояніе $e = 16$ см.

$$\sigma_1 = \frac{15200}{20000} \cdot \frac{200 + 96}{200} = \frac{15200}{20000} \cdot \frac{296}{200} = 0{,}76\,.\,1{,}48 = 1{,}12 \text{ кгр./см.}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{15200}{20000} \cdot \frac{200 - 96}{200} = \frac{15200}{20000} \cdot \frac{104}{200} = 0{,}76\,.\,0{,}52 = 0{,}40 \text{ кгр./см}^2$$

Величина напряженіи построена графически на черт. 172, справа.

24. Требуется отыскать давленіе въ точкѣ D скошенной подпорной стѣны, при слѣдующихъ данныхъ:

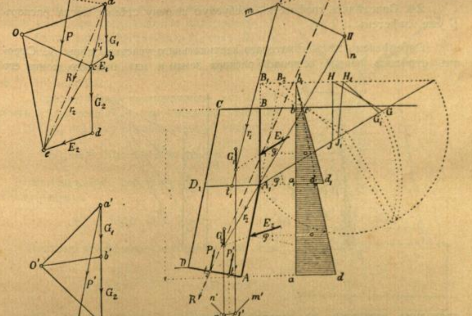
Уклонъ лицевой стороны CD стѣны 1 : 6; BA_1—вертикальна: $A_1A \parallel CD$, $AD = CD$.

Высота стѣны $h = 4$ метр.
$BC = 0{,}6$ „
$AD = 0{,}9$ „

Поверхность насыпи — горизонтальна; равномѣрно распредѣленная нагрузка на грунтъ 600 килогр. на 1 кв. метръ.

Вѣсъ 1 куб. метра земли . . . . $\gamma = 1600$ килогр.
» 1 » » кладки . . . . $\gamma_1 = 2000$ »
Уголъ естественнаго откоса . . . . $\varphi = 30^0$

Линейный масштабъ 1 : 20; масштабъ силъ: 1000 килогр. = 1,5 см.



Черт. 173.

Нагрузка, равномѣрно-распредѣленная по поверхности насыпи, замѣнена слоемъ земли, толщиной въ $\frac{600}{1600} = 0{,}375$ м. Находимъ:

$$G_1 = 2740 \text{ килогр.} \quad E_1 = 1140 \text{ килогр.}$$
$$G_2 = 3860 \quad „ \quad E_2 = 2720 \quad „$$

Равнодѣйствующая всѣхъ этихъ силъ пересѣкаетъ подошву AD въ точкѣ, разстояніе которой отъ ребра D:

$$x = 21 \text{ см}$$

Составляющая P силы R, съ направленіемъ, перпендикулярнымъ къ A,D

$$P = 8600 \text{ килогр.},$$

вызываетъ въ D давленіе:

$$\sigma = \frac{2 \,.\, P}{300 \,.\, x} = \frac{2 \,.\, 8600}{300 \,.\, 21} = 2{,}73 \text{ килогр.}$$

Направленіе равнодѣйствующей R образуетъ уголъ въ 14^0 съ нормалью къ AD.

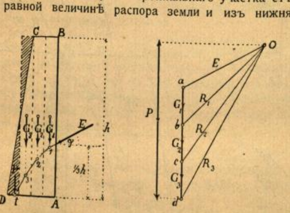
Давленіе, вызываемое въ A только собственнымъ вѣсомъ стѣны, при отсутствіи земли:

$$\sigma = 2{,}73 \text{ килогр.}$$

Для уменьшенія напряженій въ грунтѣ, подпорныя стѣны, въ большинствѣ случаевъ, снабжаются уширяющимся книзу фундаментомъ, который можетъ быть скошенъ на задней поверхности сальнѣе, чѣмъ сама стѣна, такъ какъ онъ лежитъ въ плотномъ ненасыпномъ грунтѣ.

24. Опредѣлить графически требуемую ширину стѣнки, когда распоръ E уже извѣстенъ.

Опредѣляемъ вѣсъ нѣкотораго вертикальнаго участка стѣны G. Строимъ отрѣзокъ равной величинѣ распора земли и изъ нижняго конца его



Черт. 174.

проводимъ вертикаль, по которой откладываемъ силы G_1, G_2, G_3 и т. д. Затѣмъ проводимъ лучи и наконецъ строимъ веревочный многоугольникъ, принимая за первый бокъ силу E. Точка пересѣченія бока этого веревочнаго

многоугольника съ подошвою стѣны опредѣлитъ сколько въ дѣйствительности надо взять вертикальныхъ участковъ стѣны. Если лицевая поверхность стѣны скошена, замѣняютъ крайній (послѣдній) прямоугольный участокъ стѣны равномѣрнымъ ему треугольникомъ.

КЪ ГЛАВѢ IV.

Цилиндрическій сводъ.

25. На быкъ арочнаго моста, имѣющій видъ, какъ указано на черт. 175, дѣйствуютъ давленія $P_2 = 36{,}0$ тоннъ и $P_2 = 50$ тоннъ. Провѣрить устойчивость быка и найти точки кривой давленій въ швахъ основаній тѣла быка и его фундамента.

Примемъ вѣсъ каменной кладки $\gamma = 2{,}0$ тонны въ кубич. м.; найдемъ вѣсъ быка.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Вѣсъ головы быка} & = 3 \,.\, 4 \,.\, 2{,}0 & = 24{,}0 \\ \quad „ \quad \text{тѣла} \quad „ & = \frac{3+6}{2} \,.\, 8 \,.\, 2{,}0 & = 72{,}0 \end{array}\right\} \text{I} + \text{II} = Q_1 = 96{,}0 \text{ тоннъ}$$

$$\begin{array}{lll} \quad „ \quad \text{фундамента быка} & = 8 \quad 2{,}5 \,.\, 2{,}0 & = 40{,}0 \\ \text{Полный вѣсъ быка} & & Q = 136{,}0 \text{ тоннъ.} \end{array}$$

Сначала находимъ равнодѣйствующую R_1 или P_1 и P_2 и складываемъ ее съ вѣсомъ головной части быка I. Находимъ равнодѣйствующую R_2, пересѣкающую шовъ фундамента lm въ точкѣ g. Разстояніе этой точки отъ середины устоя около 0,5 м., а потому здѣсь линія давленій проходитъ въ средней трети шва, что необходимо для прочности устоя (см. сопротивленіе матеріаловъ).

Далѣе равнодѣйствующая R_3 силъ R_2 и Q_2 пересѣкаетъ основаніе устоя въ точкѣ i, отстоящей отъ середины устоя также меньше чѣмъ на $^1/_6$ его ширины.

Горизонтальная составляющая силъ $H = 5$ тоннъ и разстояніе ея отъ подошвы основанія $h = 10{,}2$ м., поэтому опрокидывающій моментъ

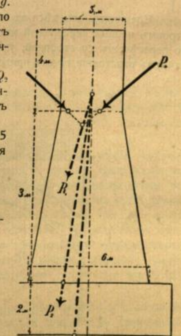
$$M_H = 5 \,.\, 10{,}2 = 51{,}0 \text{ тоннъ-мет.}$$

Моментъ отъ собственнаго вѣса относительно ребра n

$$M_a^r = 136{,}0 \,.\, 4{,}0 = 544{,}0$$

Поэтому коэффиціентъ устойчивости

$$\mu = \frac{544}{51} = 10.7.$$



Черт. 175.

26. Статическое изслѣдованіе симметричнаго цилиндрическаго свода съ односторонней нагрузкой въ $p = 800$ кгр. на кв. метръ (черт. 176).

(Примѣръ заимствованъ изъ сочиненія: «Kircher, Vorlagen für den gewerblichen Fachunterricht an technischen Lehranstalten»).

Вѣсъ 1 куб. метра кладки $\gamma = 1600$ килогр.

Удѣльный вѣсъ надбутки свода равенъ удѣльному вѣсу каменной кладки; а потому, линія нагрузки DE есть горизонтальная прямая. Перемѣнная нагрузка можетъ быть замѣнена каменной кладкой, имѣющей высоту:

$$h = \frac{p}{\gamma} = \frac{800}{1600} = 0{,}5 \text{ метра}.$$

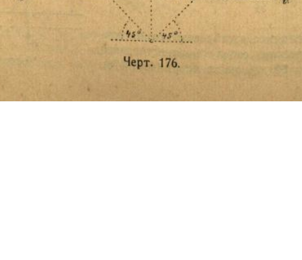
Линейный масштабъ 1:20; масштабъ силъ: 1000 килогр. = 2,5 см.

Весь сводъ раздѣленъ на 10 частей, изъ которыхъ 8 среднихъ имѣютъ каждая ширину по 40 см., а двѣ крайнія — по $^1/_2$ (437—8.40) = 58,5 см. Вѣса ихъ даны въ слѣдующей таблицѣ:

Нагруженная половина свода.		Ненагруженная половина свода.	
Части.	Вѣсъ въ килогр.	Части.	Вѣсъ въ килогр.
1	1610 килогр.	6	358 килогр.
2	928 »	7	397 »
3	800 »	8	480 »
4	717 »	9	608 »
5	675 »	10	1142 »
$G_1 = 4733$ кил.		$G_2 = 2985$ кил.	

Соединивъ эти вѣса въ планъ силъ и выбравъ произвольно полюсъ O, строимъ первый веревочный многоугольникъ. Продолжая крайнія его стороны до пересѣченія со стороной, приходящейся какъ разъ подъ замкомъ свода, найдемъ разстояніе точекъ приложенія грузовъ G_1 и G_2 отъ средней оси свода:

$$y_1 = 119{,}5 \text{ см.}$$
$$y_2 = 128{,}5 \text{ „}$$



Черт. 176.

Затѣмъ, черезъ середину замковаго шва и швовъ въ пятахъ проведемъ двѣ пересѣкающіяся прямыя, точки встрѣчи которыхъ съ направленіями силъ G_1 и G_2 соединимъ, въ свою очередь, со срединами швовъ въ пятахъ.

Построеніемъ въ многоугольникѣ силъ указаннаго выше параллелограмма опредѣлимъ новый полюсъ O_1, пользуясь которымъ и построимъ линію давленій, проходящую черезъ середины замковаго шва и швовъ въ пятахъ. Оказывается, что линія давленій всюду остается внутри ядра сѣченій.

Изъ многоугольника силъ находимъ давленія въ пятахъ:

$$A = 5920 \text{ килогр.}$$
$$B = 5280 \text{ „}$$

и затѣмъ наибольшія напряженія давленій въ пятовыхъ швахъ A и B, при ширинѣ послѣднихъ $b = 45$ см.

$$\text{въ швѣ } A\text{: } \sigma_a = \frac{A}{100 \,.\, b} = \frac{5920}{100 \,.\, 45} = 1{,}32 \text{ килогр.}$$

$$\text{въ швѣ } B\text{: } \sigma_b = \frac{B}{100 \,.\, b} = \frac{5280}{100 \,.\, 45} = 1{,}17 \text{ килогр.}$$

Въ нагруженной сторонѣ свода линія давленій больше всего приближается къ внѣшней поверхности свода около мѣста F (между 3-ю и 4-ю частями). Для этого шва F:

Разстояніе точки давленія отъ средней линіи свода: $l = 5$ см.

Ширина шва въ радіальномъ направленіи: $d = 36{,}6$ см.

Сила, дѣйствующая на шовъ: $P = 4160$ килогр:

Напряженіе давленія, вызываемаго въ швѣ около крайняго внѣшняго его ребра:

$$\sigma = \frac{P}{100 \,.\, d}\left(1 + \frac{6 \,.\, e}{d}\right) = \frac{4160}{100 \,.\, 36{,}6}\left(1 + \frac{6 \,.\, 5}{36{,}6}\right) = 2{,}07 \text{ килогр.}$$

Тѣмъ-же точно путемъ можно найти давленія, появляющіяся въ швѣ между 7 и 8 частями ненагруженной стороны свода, т. е. — въ томъ мѣстѣ, гдѣ линія давленій больше всего приближается къ внутренней поверхности свода.

Предварительно линія давленій выстраивается такъ, чтобы средины швовъ a и b были точками приложенія давленій въ пятакъ. Напряженія въ этихъ швахъ распредѣляются въ такомъ случаѣ равномѣрно по всему поперечному сѣченію и могутъ быть представлены графически въ видѣ прямоугольника; во всѣхъ-же остальныхъ (за исключеніемъ замка) мѣстахъ свода, гдѣ линія давленій отклоняется отъ средней его линіи, графическимъ представленіемъ напряженій служатъ трапеція или треугольникъ. Вообще говоря, въ различныхъ точкахъ свода имѣютъ мѣсто различныя величины напряженій. Такъ напр., напряженія σ_a, σ_b, σ_f, существенно отличаются другъ отъ друга.

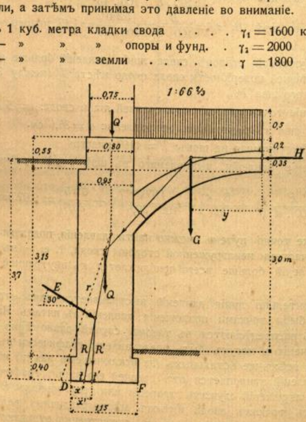
На самомъ дѣлѣ, линія давленій, при односторонней нагрузкѣ свода, не проходитъ черезъ середины швовъ въ пятахъ его, а принимаетъ такое положеніе, при которомъ наибольшія напряженія въ швахъ A, B и F (давленія въ крайнихъ ребрахъ) приблизительно равны между собой, такъ какъ всего вѣроятнѣе предполагать, что наиболѣе выгодная кривая давленій и есть кривая давленій дѣйствительная. При наивыгоднѣйшемъ положеніи кривой давленій напряженіе въ трехъ швахъ A, B и F получается, какъ среднее изъ трехъ:

$$\sigma = \frac{\sigma_a + \sigma_b + \sigma_f}{3} = \frac{1{,}32 + 1{,}17 + 2{,}07}{3} = 1{,}52 \text{ килогр.}$$

Зная это среднее напряженіе, можно опредѣлить положеніе точекъ приложенія давленій въ швахъ A, B и F, а слѣдовательно и новое положеніе линіи давленій, очень близкое къ дѣйствительному. Этотъ способъ, называемый перемѣщеніемъ линіи давленій, примѣняется въ томъ случаѣ, если первая построенная линія давленій, проходящая черезъ средины замковаго шва и швовъ въ пятахъ, выходитъ нѣкоторыми своими точками за предѣлы ядра свода. Если же и перемѣщенная линія давленій продолжаетъ выходить за предѣлы ядра, то сводъ слѣдуетъ усилить.

27. Опора свода, имѣетъ размѣры, показанные на черт. 177. Требуется опредѣлить давленіе въ точкахъ ребра D, сначала не принимая во вниманіе давленія земли, а затѣмъ принимая это давленіе во вниманіе.

Вѣсъ 1 куб. метра кладки свода . . . . $\gamma_1 = 1600$ килогр.
» — » » » опоры и фунд. . $\gamma_2 = 2000$ »
» — » » земли . . . . $\gamma = 1800$ »



Черт. 177.

Нагрузка Q' состоитъ изъ вѣса кладки верхнихъ этажей, непосредственно приходящейся надъ опорой (оконныя отверстія при этомъ вычитаются) далѣе, изъ вѣса половъ, передающагося съ помощью балокъ, и наконецъ, изъ вѣса крыши. Вся эта нагрузка:

$$Q' = 12800 \text{ килогр.}$$

Точка приложенія пруза Q' лежитъ на средней линіи стѣны, шириною въ 0,75 метр.

Собственный вѣсъ Q опорной стѣнки, включая сюда вѣсъ фундамента:

$$Q = (0{,}8 \;.\; 0{,}55 + 0{,}95 \;.\; 3{,}15 + 1{,}15 \;.\; 0{,}4) \;.\; 2000 = 7785 \text{ килогр.}$$

Вѣсъ нагруженной половины свода (см. стр. 238).

$$G = 4733 \text{ килогр.}$$

и горизонтальное разстояніе послѣдняго отъ средней оси свода:

$$y = 119{,}5 \text{ см.}$$

Давленіе земли E получается графически, при $\varphi = 30^0$ и $h = 3{,}7$ метр., равнымъ:

$$E = 3670 \text{ килогр.}$$

Принимая, въ соотвѣтствіе линіи наименьшихъ давленій, точку приложенія горизонтальнаго распора H совпадающей въ замковомъ швѣ съ верхней точкой ядра и точку приложенія давленія k въ пятѣ совпадающей съ нижней точкой ядра пятового шва, получимъ изъ многоугольника силъ измѣреніемъ:

$$H = 4400 \text{ килогр.}$$
$$K = 6530 \quad \text{„}$$

Направленіе равнодѣйствующей r силъ k и Q не пресѣкаетъ вовсе подошвы DF, а проходитъ внѣ ея, за точкою D, что указываетъ на неустойчивость опоры при отсутствіи нагрузки Q'. Направленіе равнодѣйствующей R силъ r и Q' (или силъ k, Q и Q') пересѣкаетъ подошву DF въ точкѣ t, разстояніе которой отъ ребра D:

$$x = 24 \text{ см.}$$

Такъ какъ величина силы, дѣйствующей вертикально на шовъ DF:

$$P = G + Q + Q' = 4733 + 7785 + 12800 = 25318 \text{ килогр.,}$$

то въ точкѣ на ребрѣ D появляется давленіе (при отсутствіи давленія земли):

$$\sigma = \frac{2 \;.\; P}{300 \;\; x} = \frac{2 \;.\; 25318}{390 \;.\; 24} = 7 \text{ килогр.}$$

Складывая силу R съ давленіемъ земли E, находимъ равнодѣйствующую R', направленіе которой пересѣкаетъ подошву DF въ точкѣ t'. Разстояніе $t'D = x'$ получается при этомъ равнымъ:

$$x' = 38 \text{ см.}$$

Нормальная ко шву DF силу P' слагается изъ силы P и вертикальной составляющей давленія земли. Изъ многоугольника силъ:

$$P' = 27360 \text{ килогр.}$$

Давленіе въ точкѣ на ребрѣ D (при существованіи давленія земли):

$$\sigma = \frac{2 \;.\; P'}{300 \;.\; x'} = \frac{2 \;.\; 27360}{300 \;.\; 38} = 4{,}8 \text{ килогр.}$$

Руководствуясь полученными результатами и выше принятыми нагрузками, слѣдовало бы опору нѣсколько утолстить.

28. Расчетъ одноколейнаго желѣзнодорожнаго моста *). Все сооруженіе состоитъ изъ одного главнаго свода и изъ двухъ паръ примыкающихъкъ нему съ каждой стороны боковыхъ сводовъ полуциркульной формы, изъ которыхъ ближайшій къ срединѣ, съ каждой стороны, опирается одною пятою непосредственно на главный сводъ.

Пролетъ главнаго свода (взятый на высотѣ фундамента) = 20,3 м., стрѣла его подъема = 6,6 м. Толщина свода въ замкѣ = 1,2 м.; толщина въ пятахъ = 2,4 м.

Фундаментъ своей подошвой покоится на твердой скалѣ, которая въ данномъ случаѣ играетъ роль естественной опоры. Верхній вывѣтрившійся слой скалы удаленъ.

Толщина боковыхъ сводовъ: въ замкахъ = 0,4 м., въ пятахъ = 0.7 м. Средніе устои ихъ, толщиной вверху въ 0,7 м., стоятъ своими подошвами на особыхъ площадкахъ, выдѣланныхъ вмѣсѣ съ пятами главнаго свода.

Свободные концы крайнихъ сводовъ покоятся на береговыхъ устояхъ, снабженныхъ на нагорномъ берегу ручья вертикальными, а на долинномъ берегу—наклонными крыльями.

Вѣсъ 1 куб. м. земли. . . . . $\gamma = 1600$ килогр.
» 1 » » кладки . . . . $\gamma_1 = 2000$ »
Уголъ естественнаго откоса грунта . . . . . $\varphi = 40^0$ »
Нагрузка желѣзнодорожнаго полотна . . . . $p = 1600$ килогр. на

1 кв. метръ, замѣнена вѣсомъ каменной кладки высотою.

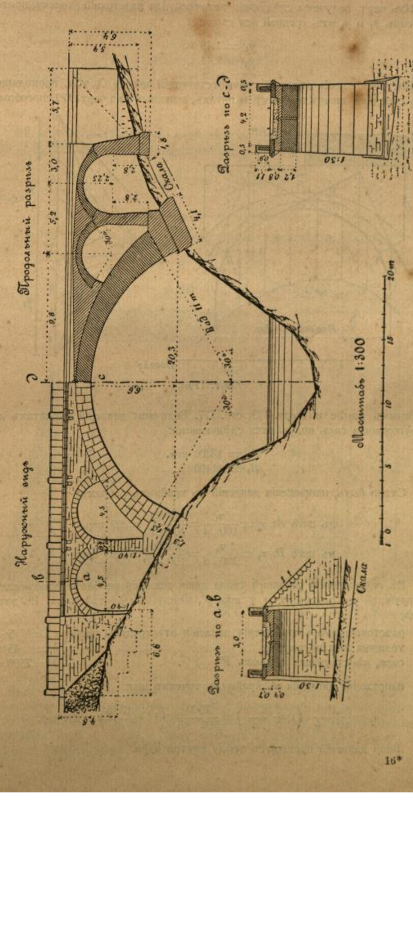
$$h = \frac{p}{\gamma_1} = \frac{1600}{2000} = 0{,}8 \text{ м.}$$

А. Боковой сводъ. Нагруженный съ одной стороны сводъ разбитъ вертикальными сѣченіями на 8 частей; толщина каждой изъ шести среднихъ частей = 0,65 м., каждой изъ крайнихъ = 0,6 м. Разсматривая участокъ свода шириною въ 1 метръ, получимъ для вѣсовъ этихъ частей слѣдующія значенія.

Нагруженная сторона.		Ненагруженная сторона.	
Части.	Вѣсъ въ килогр.	Части.	Вѣсъ въ килогр.
1	3420 кгр.	5	1456 кгр.
2	3354 »	6	1716 »
3	2756 »	7	2314 »
4	2496 »	8	2460 »
$g_1 = 12026$ кгр.		$g_2 = 7946$ кгр.	

Положенія вѣсовъ g_1 и g_2 опредѣлятся изъ перваго веревочнаго многоугольника, соотвѣтствующаго произвольному полюсу O, продолженіемъ крайнихъ сторонъ его до пересѣченія со стороной, лежащей непосредственно подъ замкомъ свода.

*) Проектъ путепровода черезъ ручей, впадающій въ рѣку Адду.

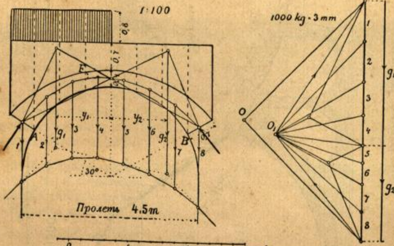


Черт. 178.

Изъ черт. получены слѣдующія величины для разстояній точекъ приложенія силъ g_1 и g_2 отъ средней оси свода:

$y_1 = 1{,}40$ м.
$y_2 = 1{,}44$ „

Построеніе линіи давленій, соотвѣтствующей полюсу O_1, т. е. проходящей черезъ середины швовъ въ замкѣ и пятахъ, выполнено на черт. 179 способомъ,



Черт. 179.

указаннымъ ранѣе на черт. 123, стр. 177. Величины давленій въ пятахъ изъ многоугольника силъ получаются слѣдующими:

$A_1 = 13300$ кгр.
$B_2 = 11400$ „

Стало быть, напряженія давленій въ крайнихъ ребрахъ:

въ швѣ A: $\sigma_a = \frac{\sigma_1}{100 . d} = \frac{13300}{100 . 70} = 1{,}9$ кгр.

въ швѣ B: $\sigma_b = \frac{\sigma_2}{100 . d} = \frac{11400}{100 . 70} = 1{,}63$ кгр.

Въ нагруженной половинѣ свода линія давленій наиболѣе приближается къ наружной его поверхности у шва F, между 3 и 4 отрѣзками. Въ этомъ мѣстѣ:

разстояніе точки приложенія давленія отъ средины шва . $e =$ 5 см.
толщина шва по радіусу . . . . $b =$ 45 »
сила, дѣйствующая на шовъ F . . . . $P = 7500$ кгр.

напряженіе давленія въ крайнихъ точкахъ шва:

$$\sigma_f = \frac{P}{100\ b}\cdot\left(1+\frac{6\ e}{d}\right) = \frac{7500}{100\cdot 45}\cdot\left(1+\frac{6\cdot 5}{45}\right) = 2{,}8 \text{ кгр.}$$

Линія давленій проходитъ всюду внутри ядра.

29. Опора боковаго свода.

Давленіе земли (согласно стр. 126).

$$E = \gamma\cdot\frac{h^2}{2}\cdot tg^2\left(\frac{90-\varphi}{2}\right).$$

При $\varphi = 40^0$:

$$E = \gamma\cdot\frac{h^2}{2}\, tg^2\, 25^\circ.$$

Если его представить въ видѣ вѣса земляной призмы, треугольнаго (высота $= h$, основаніе $= b$) поперечнаго сѣченія, то:

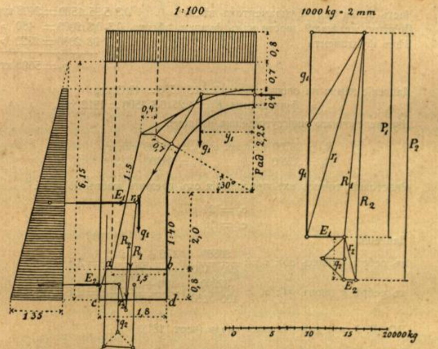
$$\gamma\cdot\frac{h\, .\, b}{2} = \gamma\cdot\frac{h^2}{2}\cdot tg^2\, 25^\circ,$$

откуда;

$$b = h\, .\, tg^2\, 25^\circ = 0{,}22\, h.$$

На черт. 180 $h = 6{,}15$ м. Слѣдовательно, основаніе треугольника:

$$b = 0{,}22\, .\, 6{,}15 = 1{,}35 \text{ м.}$$



Черт. 180.

Предполагая часть свода, примыкающую къ опорѣ, нагруженной, выстраиваемъ въ этомъ предположеніи линію наименьшихъ давленій. Зная уже (см. стр. 242 и 244) вѣсъ $g_1 = 12026$ килогр. и разстояніе точки его приложенія отъ средины свода $y_1 = 1{,}40$ м., получаемъ изъ многоугольника силъ давленіе въ пятѣ $\sigma_1 = 14000$ килогр.

Послѣднее соединяемъ съ равнодѣйствующей q_1 вѣса опоры, вѣса лежащей на ней части земляной насыпи и нагрузки полотна желѣзной дороги въ общую равнодѣйствующую r_1 (положеніе силы q_1 легко находится съ помощью многоугольника силъ и веревочнаго многоугольника). Сложеніемъ силы r_1 съ давленіемъ земли E_1 получаемъ послѣ того силу R_1, дѣйствующую на швъ ab.

Вѣсъ фундамента соединенъ на черт. 180 съ вѣсомъ покоющейся непосредственно на немъ части насыпи и съ нагрузкою желѣзнодорожнаго полотна въ равнодѣйствующую q_2, положеніе которой выясняется съ помощью многоугольника силъ и веревочнаго многоугольника. Слагаясь съ давленіемъ земли E_2, она даетъ равнодѣйствующую r_2; сила же r_2, соединяясь съ R_1, даетъ силу R_2, дѣйствующую на швъ cd.

Для перечисленныхъ силъ въ данномъ случаѣ получаемъ слѣдующія значенія:

Часть земли надъ опорой вѣситъ: $(1,1 . 1,87 + {}^1/_2 . 0,7 . 3,5) . 1500 = 4923$ кгр.
Полотно желѣзной дороги надъ опорой вѣситъ: $1,1 . 0,8 . 2000 = 1760$ »
Вѣсъ опоры . . . . $(1,25\ 2 + 0,87 . 1,5 + {}^1/_2 . 0,75 . 0,3) . 2000 = 7835$ »

$q_1 = 14518$ кгр.

Часть земли надъ фундаментомъ вѣситъ . . $0,3 . 5,35 . 1500 = 2408$ кгр.
Полотно желѣзной дороги надъ фундам. вѣситъ $0,3 . 0,8 . 2000 = 480$ »
Вѣсъ фундамента . . . . $1,7\ 08 . 2000 = 2720$ »

$q_2 = 5608$ кгр.

Давленіе земли на опору: $E_1 = 0,7 . 4,65 . 1500 = 4883$ кгр
» » » фундаментъ $E_2 = 1,26 . 0,8 . 1500 = 1512$ кгр.

Изъ веревочнаго многоугольника найдемъ:

$$R_1 = 26700 \text{ килогр. и } P_1 = 26500 \text{ килогр.}$$
$$R_2 = 32200 \quad „ \quad „ \ P_2 = 32200 \quad „$$

Разстоянія точекъ ихъ приложенія отъ срединъ швовъ ab и cd:

$$e_1 = 24 \text{ см.}$$
$$e_2 = 16 \ „$$

Давленія:

въ ребрѣ a (швовъ ab): $\sigma_1 = \frac{26500}{100 . 150}\left(\frac{150 + 6 \cdot 24}{150}\right) = 3,5$ кгр./см²

въ ребрѣ c (швовъ cd): $\sigma_2 = \frac{32200}{100 . 180}\left(\frac{180 + 6 \cdot 16}{180}\right) = 2,7$ кгр./см²

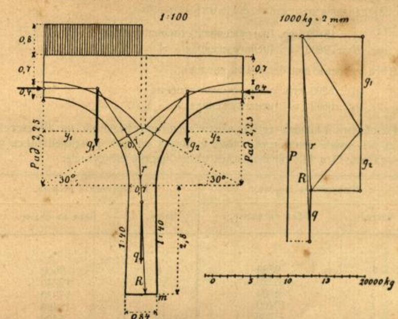
30. В. Устой для боковаго свода (черт. 181).

Нагрузимъ одинъ изъ примыкающихъ другъ къ другу сводовъ полностью, другой оставимъ вовсе безъ нагрузки. Вѣса g_1 и g_2, а равно и разстоянія точекъ ихъ приложенія y_1 и y_2 отъ срединъ сводовъ, были уже указаны въ задачѣ 28. Тамъ было найдено:

$$g_1 = 12026 \text{ килогр.} \qquad y_1 = 1,40 \text{ м.}$$
$$g_2 = 7946 \quad „ \qquad y_2 = 1,44 \ „$$

Линія давленій для нагруженнаго свода имѣетъ относительно крутое положеніе; она пересѣкаетъ замковый и пятовый швы въ точкахъ, лежащихъ

между срединой шва и крайней точкой ядра, то есть, не вполнѣ принимаетъ положеніе линіи наименьшихъ давленій.



Черт. 181.

То же справедливо и для сравнительно пологой линіи давленій въ ненагруженномъ сводѣ; но послѣдняя пересѣкаетъ замковый и пятовый швы въ точкахъ, лежащихъ нѣсколько ближе къ границѣ ядра, чѣмъ это имѣетъ мѣсто въ нагруженномъ сводѣ.

Давленія въ пятахъ получаются изъ многоугольника силъ:

$$B_1 = 14500 \text{ кгр.}$$
$$B_2 = 10300 \ „$$

Равнодѣйствующая ихъ слагается съ вѣсомъ устоя —

$$q = 6640 \text{ кгр.}$$

въ силу R_1 дѣйствующую на подошву устоя.

Изъ многоугольника силъ находимъ:

$$R = 26700 \text{ кгр.,} \qquad P = 26600 \text{ кгр.}$$

Сила R пересѣкаетъ подошву въ разстояніи $e = 8$ см. отъ средины шва; и слѣдовательно при ширинѣ подошвы $d = 84$ см., давленіе въ точкахъ ея ребра:

$$\sigma = \frac{26600}{100\ 84}\left(\frac{84 + 6\ \ 8}{84}\right) = 5,0 \text{ кгр./см}^2$$

31. С. Главный сводъ (черт. 182).

Нагрузимъ одну половину всего моста полностью, другую же его половину оставимъ свободною отъ нагрузки. Кривыя давленій въ боковыхъ сводахъ, вслѣдствіе симметричнаго распредѣленія нагрузокъ, проходятъ черезъ середины швовъ въ замкѣ и пятахъ. При $g_1 = 12026$ кгр. и $g_2 = 7946$ кгр. (см. задачу 28) давленія въ пятахъ боковыхъ сводовъ:

$A = 15100$ кгр. (нагруженная сторона моста).
$B = 9800$ » (ненагруженная » »).

Вѣса устоевъ для боковыхъ сводовъ:

$q_1 = 6800$ кгр. (нагруженная сторона).
$q_2 = 6640$ » (ненагруженная »).

Разобьемъ главный сводъ вертикальными сѣченіями на 10 частей (съ 3 по 12), къ нимъ примкнемъ слѣва и справа по двѣ фундаментныхъ части (1 и 2—слѣва; 13 и 14—справа); вѣса этихъ частей слѣдующіе:

Нагруженная сторона.		Ненагруженная сторона.	
Части.	Вѣсъ въ килогр.	Части.	Вѣсъ въ килогр.
1	9880	8	9600
2	8320	9	12240
3	6400	10	19930
4	10400	11	10400
5	23700	12	6400
6	16080	13	8320
7	13440	14	9880

Соединимъ всѣ силы по порядку черт. 182 въ общую линію силъ отъ a до e.

Построимъ прежде всего для главнаго свода линію давленій, проходящую черезъ середины швовъ въ замкѣ и пятахъ. Вблизи шва F (между 5 и 6 частями) она выйдетъ за предѣлы ядра и потому придется произвести ея передвиженіе (см. задачу 26).

При прохожденіи линіи давленій черезъ середины швовъ въ замкѣ и пятахъ:

Давленіе на лѣвую пяту $A = 99000$ кгр.; ширина шва $d_1 = 240$ см.
» » правую » $B = 97000$ » » » $d_2 = 240$ »
» » шовъ F: $P = 76000$ » » » $d = 138$ »

Разстояніе точки приложенія силы P отъ внѣшняго края свода:

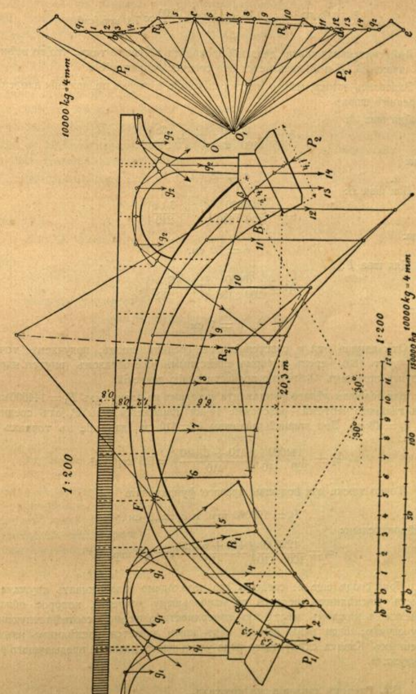
$$x = 39 \text{ см.}$$

При этомъ, давленія въ крайнихъ ребрахъ швовъ получаются слѣдующими:

$$\sigma_a = \frac{A_1}{100 \cdot d_1} = \frac{99000}{100 \cdot 240} = \infty 4{,}13 \text{ кгр.}$$

$$\sigma_b = \frac{B}{100 \cdot d_2} = \frac{97000}{100 \cdot 240} = \infty 4{,}05 \text{ „}$$

$$\sigma_f = \frac{2P}{300 \cdot x} = \frac{2 \cdot 76000}{300 \cdot 39} = \infty 13{,}00 \text{ „}$$



Черт. 182

Среднее напряженіе:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_a + \sigma_b + \sigma_f}{3} = \frac{4{,}13 + 4{,}05 + 13{,}00}{3} \cong 7{,}1 \text{ кгр./см}^2$$

Дѣйствительная кривая давленій проходитъ въ сводѣ такъ, что во всѣхъ трехъ швахъ A, B и F появляется это среднее напряженіе σ.

Задаваясь этимъ, можно найти разстояніе e точекъ приложенія давленій отъ срединѣ швовъ.

Для шва A:

$$7{,}1 = \frac{99000}{100 \cdot 240}\left(1 + \frac{6e}{240}\right),$$

откуда:

$$e = 28 \text{ см.}$$

Для шва B:

$$7{,}1 = \frac{97000}{100 \cdot 240}\left(1 + \frac{6 \cdot e}{240}\right),$$

откуда:

$$e = 30 \text{ см.}$$

Для шва F:

$$7{,}1 = \frac{76000}{100 \cdot 138}\left(1 + \frac{6 \cdot e}{138}\right),$$

откуда:

$$e = 7 \text{ см.}$$

Откладывая эти e разстоянія отъ срединъ швовъ, получаемъ точки α, β, γ (черт. 180), черезъ которыя извѣстнымъ уже образомъ (внутри ядра), пользуясь полюсомъ O_1, можно провести линію давленій.

Для подошвы лѣваго фундамента находимъ по плану силъ $P_1 = 144000$ кгр. и изъ главнаго чертежа — разстояніе точки приложенія силы P_1 отъ средины шва: $e_1 = 40$ см. При ширинѣ подошвы $b = 410$ см., давленіе въ точкахъ ея ребра —

$$\sigma_1 = \frac{144000}{100 \cdot 410}\left(\frac{410 + 6 \cdot 40}{410}\right) = 5{,}5 \text{ кгр./см}^2$$

Точно также для подошвы праваго фундамента:

$$P_2 = 129000 \text{ кгр. и } e_2 = 20 \text{ см.},$$

и слѣдовательно:

$$\sigma_2 = \frac{129000}{100 \cdot 410}\left(\frac{410 + 6 \cdot 20}{410}\right) = 4{,}1 \text{ кгр./см}^2$$

Пока сводъ еще не сведенъ, его необходимо поддерживать кружалами. Расчетъ послѣднихъ ведется по наибольшему давленію, которое обнаруживается въ каждомъ мѣстѣ ихъ поверхности, а именно — соотвѣтствующему тому случаю, когда рядъ камней надъ нимъ является послѣднимъ изъ положенныхъ. Кладка слѣдующаго ряда уменьшаетъ давленіе предыдущаго ряда на кружала.

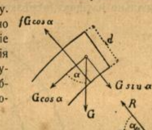
32. Расчетъ давленія на кружала.

Разсматривая послѣдній (самый верхній) изъ положенныхъ рядъ камней въ предположеніи, что направленіе шва образуетъ съ горизонтомъ уголъ α,

разложимъ его вѣсъ G на составляющія силы: $G \cdot \sin\alpha$ — по направленію шва и $G \cdot \cos\alpha$ — по направленію перпендикулярному. Подъ вліяніемъ силы $G \cdot \sin\alpha$, при достаточно большомъ углѣ α, произошло бы соскальзываніе ряда камней внизъ, если бы этому, кромѣ тренія $f \cdot G \cdot \cos\alpha$, не противодѣйствовала какая-либо другая сила. Для существованія равновѣсія ряда необходима, такимъ образомъ, сила, противодѣйствующая силѣ $G \cdot \sin\alpha$, и по величинѣ равная:

$$R = G \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos).$$

Этой силой является давленіе со стороны кружалъ на рядъ давящихъ на него камней.



Черт. 183.

Послѣ замѣны:

$$f = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

получимъ:

$$R = G \cdot \left(\sin\alpha - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \cdot \cos\alpha\right) = G \cdot \left(\frac{\sin\alpha \cdot \cos\varphi - \cos\alpha \sin\varphi}{\cos\varphi}\right),$$

или:

$$R = G \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi}$$

Введемъ обозначенія:

d — средняя толщина ряда въ метрахъ.

γ — вѣсъ 1 куб. м. кладки свода.

Для участка свода въ 1 метръ шириною: $G = \gamma \cdot d$, и слѣдовательно:

$$R = \gamma \cdot d \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi}$$

Величина давленія въ направленіи шва:

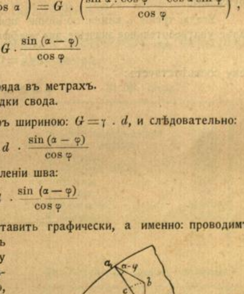
$$p = d \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi}$$

Выраженіе это легко представить графически, а именно: проводимъ (черт. 184) прямую CA_1 подъ угломъ тренія φ къ горизонту и черезъ точку a_1 — прямую $a_1b \parallel A_1C$, до пересѣченія въ точкѣ b съ вертикалью, проходящею черезъ точку a. Треугольникъ aa_1b даетъ соотношеніе:

$$\frac{ab}{aa_1} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi},$$

откуда, замѣняя aa_1 черезъ d, получимъ

$$ab = d \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi}.$$



Черт. 184.

Описывая изъ точки a, какъ центра, дугу радіусомъ $= ab$, до пересѣченія ея въ точкѣ c со швомъ aa_1, получимъ:

$$ac = p.$$

Поступая совершенно такъ же и для другихъ швовъ и соединяя точки радіально идущихъ отрѣзковъ p кривою, получимъ всю грузовую площадь.

Черт. 185.

При $\alpha = \varphi$ величина $p = O$ (а слѣдовательно, и $R = O$), такъ что сводъ въ нижней своей части ниже точекъ A и B, не нуждается въ поддержкѣ кружалами.

Уголъ тренія φ камня по камню принимаютъ равнымъ $20^0 - 30^0$. Наиболѣе употребительное значеніе для коэффиціента тренія f:

$$f = tg\,\varphi = 0{,}5,$$

чему соотвѣтствуетъ:

$$\varphi = 26^0 40'.$$

ПРИЛОЖЕНІЕ II.

Данныя о нагрузкахъ сооруженій.

Таблицы собственныхъ вѣсовъ и нагрузокъ различныхъ сооруженій.

I. Собственный вѣсъ строительныхъ матеріаловъ въ килограммахъ въ 1 куб. метрѣ.

A. Дерево.

	Сухое.	Пропит. водой.
Дубъ . . .	800	1100
Букъ . . .	750	1000
Сосна. .	650	900
Ель . . .	600	800
Пихта. . .	650	850

B. Металлы.

Сварочное желѣзо.	7800
Литое желѣзо . .	7850
Чугунъ	7250
Красная мѣдь . .	8900
Цинкъ	7100
Олово	7300
Свинецъ	11400
Латунь	8500

C. Кладка.

Изъ обыкновеннаго кирпича	1600
Изъ пористаго или пустотѣлаго кирпича.	1200
Изъ клинкера	1800
» валуновъ	1850
Бутовая кладка. . . .	2000
Кладка изъ песчаника.	2400
» » известняка.	2600
Гранитъ	2800
Базальтъ	3200

D. Различные другіе металлы.

Песокъ и гравій . .	1600
Черноземъ и глина.	1600
Известковый растворъ	1700
Цементный растворъ.	1800
Бетонъ	2400
Асфальтъ (чистый).	1100
Литой асфальтъ съ гравіемъ	1600
Прессованный асфальтъ	1800
Гипсъ	1150
Стекло	2650
Кирпичный ломъ (щебень)	1400

II. Собственный вѣсъ и нагрузка крышъ.

A. Собственный вѣсъ желѣзныхъ фермъ на 1 кв. метръ горизонтальной проекціи.

	Килограммъ.
Простые навѣсы и односкатныя крыши — до 10 м. пролетомъ.	10—15
Небольшія двухскатныя и шатровыя крыши	15—20
Большія французскія и англійскія крыши.	20—30

Можно тоже пользоваться формулою

$$g = 2{,}5 + 1{,}5\, l$$

въ кгр. на 1 кв. м. горизонт. проекціи, при длинѣ пролета l.

B. Собственный вѣсъ покрытія со включеніемъ вѣса обрѣшетки и стропилъ въ килограммахъ на кв. метръ горизонтальной проекціи.

Стропила.	ПОДЪЕМЪ КРОВЛИ (отъ всего пролета).	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
На дер. стропилахъ.	Одиночная черепичная кровля.	144	123	114	—	—	—	—	—	—
	Двойная	180	153	142	—	—	—	—	—	—
	Толевая кровля . .	42	36	34	32	32	31	31	31	31
	Кровля изъ цинка или желѣзн. лист. на досчатой обшивкѣ.	58	49	46	44	43	43	42	42	42
На металлическ. стропилахъ.	Кровля изъ гладк. лист. желѣза	37	31	29	28	27	27	27	27	27
	Кровля изъ волн. лист. желѣза	31	26	25	24	23	23	23	23	22
	Кровля изъ волн. лист. цинка	34	29	27	26	25	25	25	25	24
	Стеклянная кровля на желѣз. обрѣшеткѣ.	42	36	34	32	32	—	—	—	—

	Килогр.
Асфальтовый войлокъ на деревянной обшивкѣ $\left(\frac{h}{1} = \text{ок. } \frac{1}{12}\right)$	40
Мѣдные листы на деревянной обшивкѣ $\left(\frac{h}{1} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right)$. . .	55— 85
Свинцовые листы на деревянной обшивкѣ $\left(\frac{h}{1} = \text{ок. } \frac{1}{12}\right)$ . . .	65—100
Древесн. цем. на дер. обш. съ засып. грав. $\left(\frac{h}{1} = \frac{1}{20} - \frac{1}{40}\right)$. . . .	180

C. Нагрузка крышъ на 1 кв. метръ площади ската или горизонтальной проекціи.

1. Грузъ отъ снѣга на кв. м. горизонт. проекціи . . . . 75 кгр.

2. Давленіе вѣтра опредѣляется слѣдующимъ образомъ:

Если обозначимъ черезъ l полной пролетъ стропилъ, h подъемъ, то для различныхъ значеній $\frac{h}{l}$, получимъ слѣдующія значенія для W и W_1.

1. Таблица величинъ нормальной къ плоскости ската составляющей давленія вѣтра, приходящейся на кв. м. площади ската.

W_0	$\frac{h}{l} =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
120		89	72	59	50	44	39	35	32	30
150	$W =$	112	86	74	62	55	50	44	40	37
180		134	107	89	75	66	59	53	48	45

2. Таблица величинъ вертикальной слагающей давленія вѣтра, приходящейся на кв. м. горизонтальной проекціи кровли.

W_0	$\frac{h}{l} =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
120		199	112	78	60	51	44	38	34	32
150	$W_1 =$	251	134	98	75	64	56	48	43	39
180		300	166	118	91	76	66	58	51	48

Относительно пользованія второй таблицей, слѣдуетъ замѣтить, что въ этомъ случаѣ слѣдуетъ уменьшить величину одновременной нагрузки отъ снѣга, принявъ въ $\frac{2}{3}$ указанной въ № 32 величины.

Д. Значеніе коэффиціентовъ μ къ формулѣ Ирмингера.

Какъ указано на стр. 110 полное давленіе на произвольное тѣло по Ирмингеру выражается формулой

$$\sum W = \mu F W_0,$$

гдѣ F площадь поперечнаго сѣченія тѣла, а W_0 давленіе на кв. м. нормальной къ вѣтру плоскости.

1. Таблица значеній коеффиціентовъ μ для различныхъ тѣлъ.

НАИМЕНОВАНІЕ ТѢЛА.	μ	Въ %. Сгущеніе съ навѣтренной стороны.	Разрѣженіе съ подвѣтренной стороны.
Призма обращенная гранью къ вѣтру	0,95	57	43
» » ребромъ » »	0,56	24	76
Цилиндръ длинный	0,57	28	72
» короткій	0,47	50	50
Кубъ, обращеный гранью къ вѣтру	0,80	78	22
» » ребромъ » »	0,47	45	55
Конусъ съ основан. = высотѣ	0,38	50	50
Шаръ	0,31	23	77

2. Таблица значеній давленій вѣтра на кровлю.

Уклонъ кровли въ °.	Полное давленіе.	Въ %. Сгущеніе съ навѣтренной стороны.	Разрѣженіе съ подвѣтренной стороны.
90°	1,00 W_0	55	45
60°	0,90 W_0	44	56
30°	0,65 W_0	17	83
20°	0,52 W_0	6	94
10°	0,26 W_0	0	100

III. Нагрузка междуэтажныхъ перекрытій въ килограммахъ на 1 кв. метръ.

a) Перемѣнная нагрузка перекрытій.

Въ обыкновенныхъ жилыхъ помѣщеніяхъ	250	кгр.
» танцовальныхъ залахъ и залахъ для собраній	400	»
» сѣновалахъ	450	»
» амбарахъ	500	»
» складахъ для торговыхъ товаровъ	760—1200—1500	»
Перекрытій подъ проѣздами или подъ проѣздн. двор.	800	»
Нагрузка отъ толпы людей	400	»

b) Собственный вѣсъ перекрытій *).

a) Деревянныя перекрытія.

Разстояніе между срединами балокъ = 1 метръ, сѣченіе балокъ = = 24 × 26 см.

*) По циркуляру Строительнаго отдѣла Прусскаго Министерства общественныхъ работъ, отъ 16 мая 1890 г.

Рядъ балокъ съ половымъ настиломъ (толщ. 3,5 см.)	70	крг.
Рядъ балокъ ъ накатомъ (толщ. въ 3 см.) и смазкой изъ глины (толщ. въ 10 см.)	210	»
Рядъ балокъ съ настильнымъ чернымъ поломь и глиняной смазкой (толщ. въ 10 см.)	230	»
Рядъ балокъ съ наборнымъ чернымъ поломъ, глиняной смазкой до низа пола (толщ. въ 11 см.) и чистымъ поломъ	220	»
Какъ въ предыдущемъ случаѣ, но съ прибавленіемъ штукатурки по деревянной подшивкѣ (толщ. въ 2 см.)	250	»
Рядъ балокъ съ наборнымъ чернымъ поломъ, глинлной смазкой (толщ. въ 11 см.) и слоемъ гипса или глины (толщ. 5—7 см.)	310	»
Какъ въ предыдущемъ случаѣ, но съ прибавленіемъ деревянной оштукатуренной подшивки (толщ. въ 2 см.)	340	»
Рядъ балокъ съ настильнымъ чернымъ поломъ, полной смазкой до низа балки и чистымъ поломъ (толщ. въ 3,5 см.)	360	»

b) Сводчатыя перекрытія.

Подъемъ свода $= \frac{1}{8}$. Засыпка пескомъ или коксовой золой, причемъ забутовка доведена до высоты ключа. Половые деревянные прогоны 10 × 10 см. удалены центръ отъ центра на 0,8 м.; толщина чистаго пола 3,5 см. Вѣса приведены безъ вѣса желѣзныхъ балокъ.

Сводъ пролетомъ до 2 м., толщиною въ ½ кирпича, изъ сплошнаго кирпича	370	кгр.
Тоже изъ пористаго или пустотѣлаго кирпича	310	»
» » валуновъ	260	»
Сводъ пролетомъ отъ 2—3 м., толщиною въ ½ кирпича, изъ сплошнаго кирпича	440	»
Тоже изъ пористаго или пустотѣлаго кирпича	380	»
» » валуновъ	330	»
Сводъ изъ бетона, пролетомъ до 1,4 м.	370	»

При заполненіи промежутковъ между половыми прогонами, нагрузка сводчатыхъ потолковъ увеличивается на 140 кил. на 1 кв. метръ.

IV. Собственный вѣсъ мостовъ.

Собственный вѣсъ мостовъ опредѣляется или на кв. единицу полотна моста или на погонную единицу длины всего моста. Въ желѣзнодорожныхъ мостахъ вѣсъ опредѣляется на погонную единицу одного пути (опредѣленной ширины) или одной фермы. Ниже вѣсъ дается въ килограммахъ при единицѣ длины метръ и въ пудахъ при единицѣ длины футъ. Для перехода отъ однихъ мѣръ къ другимъ можно пользоваться слѣдующими соотношеніями:

1 кгр. на пог. м. = 0,0186 п./ф.	1 пудъ на пог. ф. = 53,742 кгр./м.
1 кгр. на кв. м. = 0,00567 п./ф²	1 пудъ на кв. ф. = 176,320 кгр./м²

Въ дальнѣйшемъ l обозначаетъ длину пролета (расчетнаго), g собственный вѣсъ.

А. Мосты подъ проѣзжую дорогу.

а) Постоянная нагрузка.

1. Деревянные мосты.

Фермы изъ одиночныхъ балокъ въ кгр./м.² и п./ф.²

$$g = 10\,l \;+ 140 \text{ кгр.}$$
$$g = 0{,}06\,l + 0{,}8 \text{ пуд.}$$

Фермы изъ составныхъ балокъ въ кгр./м.² и п./ф.²

$$g = 9\,l \;+ 200 \text{ кгр.}$$
$$g = 0{,}05\,l + 1{,}2 \text{ пуд.}$$

Вторые члены въ этихъ формулахъ зависятъ отъ толщины настила.

2. Желѣзные мосты.

Общій вѣсъ желѣза главныхъ фермъ и проѣзжей части, но не считая вѣса желѣза, служащаго непосредственнымъ основаніемъ мостовой, т. е. напр. лотоваго желѣза Зоре и т. д.

Вѣсъ въ кгр. на кв. м. моста

$$g = A + Bl + Cl^2$$

Вѣсъ въ кгр. на кв. м. тротуаровъ, когда они устроены на консоляхъ внѣ главныхъ фермъ

$$g_1 = D + El.$$

Значеніе коэффиціентовъ A, B, C, D и E даны въ прилагаемой таблицѣ. Въ послѣднихъ 2-хъ графахъ даны вѣсъ желѣза, служащаго основаніемъ полотна проѣзжей части и вѣсъ самаго полотна. Прибавляя эти два числа къ вѣсу желѣза моста g, получимъ полный вѣсъ моста, необходимый для его расчета.

Наименованіе мостовъ.	A	B	C	D	E	Вѣсъ ж. лотковъ или зоре и т. п.	Вѣсъ полотна.
1. Мосты проѣз. дор. съ досчат. наст.	105	2,3	0,020	60	2,3	—	100
2. Мосты проѣз. дор. съ шоссирован.	125	2,8	0,025	60	2,3	65	400
3. Городск. м. съ досчат. наст	155	2,7	0,021	80	2,7	—	140
4. Городск. м. шоссирован.	170	3,2	0,028	80	2,7	80	480
5. Городск. м. ымощенн.	180	8,7	0,029	80	2,6	80	700

b) Подвижная нагрузка.

1. Подвижная нагрузка отъ толпы людей принимается:

Для мостовъ проѣзжихъ дорогъ

$$p = 2{,}5 \text{ пуд./ф}^2 = 440 \text{ кгр./м}^2.$$

Для мостовъ городскихъ

$$p = 3 \text{ пуд./ф}^2 = 530 \text{ кгр/м}^2.$$

2. Подвижная нагрузка отъ экипажей.

Въ каждомъ частномъ случаѣ могутъ быть даны спеціальныя повозки. Для обыкновенныхъ случаевъ можно принимать нагрузку отъ двухъосныхъ экипажей двухъ родовъ въ зависимости отъ большей или меньшей важности моста.

Элементы повозокъ.	Въ пудахъ и саженяхъ.		Въ килограм. и метрахъ.	
	Легкая.	Тяжелая.	Легкая.	Тяжелая.
Вѣсъ повозки . . .	300	500	4920	5200
Нагрузка на ось . .	75	125	1230	1300
Длина повозки. . .	2,3	3,0	4,9	6,4
» хода	1,3	1,5	2,8	3,2
Ширина повозки . .	1,2	1,3	2,6	2,8
» хода . . .	0,6	0,65	1,3	1,4
Длина запряжки . .	1,3	3,1	2,8	6,6
Число лошадей . .	4	8	4	8

Кромѣ того, часто для провѣрки прочности моста принимаютъ во вниманіе катокъ. Катокъ бываетъ различнаго вѣса и каждый разъ надо опредѣлять ихъ размѣръ особо. Наиболѣе извѣстны катки (изъ тяжелыхъ) въ 11400 и 15000 и кгр.

Въ новѣйшее время приходится имѣть дѣло съ электрическими трамваями. Ихъ размѣры разнообразны. Большія трамваи на двухъ телѣжкахъ по 2 оси въ каждой имѣютъ 15 тоннъ вѣса, т. е. по 3750 кгр. на ось; разстояніе между осями телѣжки 1,8 м.; между серединами телѣжекъ 6,5 м., ширина хода отъ 1,2 м. до нормальной желѣзнодорожной колеи; заграницей 1,435 м., у насъ 1,524 м.

В. Мосты подъ желѣзную дорогу.

а) Постоянная нагрузка.

1. Деревянные мосты.

Полный вѣсъ главныхъ фермъ поперечинъ и связей, а также рельсовъ со скрѣпленіями на погонн. единицу, каждаго пути.

$$g = Al + F$$

Значеніе коэффиціентовъ A и F, для различныхъ системъ и для мѣръ русскихъ и метрическихъ даны въ прилагаемой таблицѣ.

Система фермъ	Пуды и футы.		Килограммы и метры.	
	A	F	A	F
1 Фермы изъ одиночныхъ балокъ	0,48	9,0	84	500
2. Фермы изъ сложныхъ балокъ	0,40	11,0	70	550
3. Фермы Гау	0,16	12,5	28	670

2. Желѣзные мосты.

Полный вѣсъ главныхъ фермъ со связями, съ поперечинами, рельсами и скрѣпленіями на пог. единицу одного пути опредѣляется по такой же формулѣ,

$$g = Al + F,$$

причемъ значеніе коэффиціентовъ A и F нѣсколько измѣняется въ зависимости отъ конструкціи и пролета.

	Пуды и футы.		Килограммы и метры.	
	A	F	A	F
Для малыхъ и среднихъ прол.	0,16	14	28	750
Для большихъ прол. $l \geqq 50$ м.	0,20	15	35	800

b) Подвижная нагрузка.

Для расчета желѣзнодорожныхъ мостовъ принимается нормальный типъ паровоза, тендера и вагона.

1. Паровозъ. Четыре оси; нагрузка на каждую ось 15 тоннъ; разстояніе между осями 1,3 метра; между буферомъ и ближайшею крайнею осью 2,7 метра; полная длина паровоза между буферами 9,3 метра.

2. Тендеръ. Три оси; нагрузка на каждую ось 12,5 тоннъ; разстояніе между осями 1,6 метра; разстояніе между буферомъ и ближайшею осью тендера 1,8 метра; полная длина тендера между буферами 6,8 метра.

3. Вагонъ. Двѣ оси; нагрузка на каждую ось 10 тоннъ; разстояніе между осями 3,8 метра; разстояніе между осью и ближайшимъ буферомъ 1,9 метра; полная длина вагона между буферами 7,6 метра.

4. Способъ примѣненія нормальныхъ типовъ этихъ повозокъ къ расчету.

При расчетѣ мостовыхъ фермъ металлическихъ мостовъ малыхъ пролетовъ, а равно при расчетѣ продольныхъ и поперечныхъ балокъ проѣзжей части металлическихъ мостовъ, надлежитъ принимать нагрузку въ слѣдующихъ двухъ предположеніяхъ:

a) прохода вышеуказаннаго нормальнаго поѣзда, и

b) прохода отдѣльной оси съ давленіемъ на нее въ 20 тоннъ, и затѣмъ принимать для расчета ту изъ нагрузокъ, вычисленныхъ при указанныхъ двухъ предположеніяхъ, которая вызываетъ въ мостовыхъ частяхъ большія напряженія.

При расчетѣ всѣхъ больше-пролетныхъ желѣзнодорожныхъ мостовъ, какъ вновь строющихся, такъ и подлежащихъ усиленію, принимать поѣздъ, состоящій изъ двухъ паровозовъ, съ тендерами и вагонами вышеуказанныхъ нормальныхъ типовъ, расположенныхъ невыгоднѣйшимъ образомъ въ пролетѣ моста, а въ многопролетныхъ мостахъ съ неразрѣзными фермами, расположенныхъ невыгоднѣйшимъ образомъ въ пролетахъ.

Указанные выще два паровоза могутъ быпь поставлены въ поѣздѣ врозь или рядомъ, съ трубами въ одну сторону или обращенными одна къ другой, смотря по тому, какъ это потребуется для самаго невыгоднаго нагруженія моста. Вагоны могутъ стоять впереди и сзади каждаго паровоза. При расчетѣ мостовъ необходимо имѣть въ виду также возможность разрыва нормальнаго поѣзда въ одномъ мѣстѣ и нахожденія въ нормальномъ поѣздѣ порожнихъ вагоновъ.

ЛИТЕРАТУРА.

I. На русскомъ языкѣ.

1. **Богдановскій**. Подпорныя стѣны. 1900.
2. **Гассельблатъ**. Графическая статика. 1896.
3. **Губеръ.** Механика для техническихъ и ремесленныхъ училищъ. Въ переводѣ съ 4-го изданія М. А. Савича, подъ редакціей М. Н. Демьянова. Спб. 1903.
4. **Гуммель.** Руководство по строительной механикѣ. Въ переводѣ инженеръ-технолога Калецкаго. Спб. 1906.
5. **Кирпичевъ, В. Л.** Основанія графической статики. Кіевъ. 1902.
6. **Кирпичевъ, Н. Л.** Графическая статика. Литографированныя записки по лекціямъ. Н. Инжен. Академіи
7. **Куницкій, С.** Начала статики сооруженій. Балочныя фермы. Спб. 1898.
8. **Лауенштейнъ**. Графическая статика. Переводъ съ 6-го нѣмецкаго изданія 1901, Н. Бѣляева, подъ редакціей А. Сапѣевича. Спб. 1902.
9. **Мюллеръ-Бреслау**. Графическая статика сооруженій. Въ переводѣ Г. Г. Кривошеина и П. Н. Казина. Спб. 1898—1901.
10. **Соколовскій**. Курсъ строительной механики. Т. I. Графическая статика.
11. **Тюринъ, В. Г.** Статика сооруженій. Литографированныя записки по лекціямъ Н. Инжен. Академіи. I. Балочныя фермы. II. Давленіе земли. III. Своды. Спб. 1902, 1903 и 1904.
12. **Ясинскій, Ф. С.** Собраніе сочиненій. Статика сооруженій. Сборн. Инст. Инж. Пут. Сооб. Им. Александра I. Выпускъ LVIII. Спб. 1902.

II. На нѣмецкомъ языкѣ.

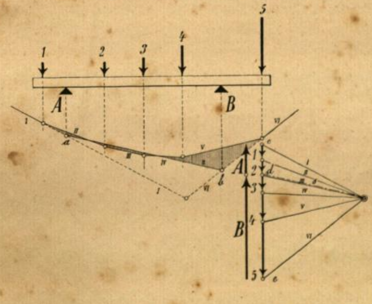
1. **Föppl, Dr. Aug.** Vorlesungen über Technische Mechanik. II. Graphische Statik. II. Auflage. Leipzig. 1900.
2. **Killman, Paul.** Die Graphostatik. (Жур. Die Schule des Bautechnikers. 1902).
3. **Klasen, Ludwig**. Graphische Ermittelung der Spannungen in den Hochbau- und Brückenbau-Constructionen. Leipzig. 1878.
4. **Mehrtens, G. Chr.** Statik und Festigkeitslehre. I u. II. Leipzig. 1903 и 1904.
5. **Ritter, Aug.** Lehrbuch der Technischen Mechanik. Leipzig. 1892.
6. **Ritter**. Die Gitterträger.
7. **Ritter, W.** Statik der Tunnelgewölbe. Berlin. 1879.
8. **Schmid, Carl.** Statik und Festigkeitslehre. Lehrheft nebst vielen Beispielen, elementar bearbeitet für den Gebrauch an der Schule und in der Praxis. Stuttgart. 1897.
9. **Vonderlin**. Statik für Hoch- und Tiefbautechniker. Stuttgart. 1902.
10. **Weyrauch, J.** Theorie des Erddrucks. Wien. 1881.
11. **Zillich, Karl.** Statik für Baugewerksschulen. Die Graphische Statik. Berlin. 1898.

III. На французскомъ языкѣ.

1. **Antomari**. Leçons de Statique. Paris. 1897.
2. **Arnal**. Traité de mecanique. Statique graphique et résistance des materiaux. Paris. 1897.
3. **Levy, Maurice**. La Statique Graphique.

Замѣченныя опечатки.

На стр. 62 чертежъ 44 долженъ быть замѣненъ такимъ.



На стр. 154, послѣ 7-ой строки сверху, слѣдуетъ помѣстить прилагаемый чертежъ.