
EXLIBRIS

Томскій Технологическій Институтъ Императора Николая II.

Проф. И. И. Бобарыковъ.

СОПРОТИВЛЕНІЕ МАТЕРІАЛОВЪ.

Часть I.

1911—1912 г.

ТОМСКЪ.
Типо-лит. Сибирск. Т—ва Печатн. Дѣла, уг. Дворянск. ул. и Ямск. пер., с. д.
1911.

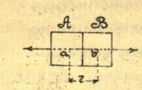
$l_2' - l = \lambda_2'$ есть остающаяся (пластическая) деформація бруска на длинѣ его $ab = l$. Нагрузивъ брусокъ снова силою $P_3 > P_2$, найдемъ, что по прекращеніи приложенія силы P_3 разстояніе ab получаетъ длину $l_3' > l$ и наблюдается новое остающееся удлиненіе $\lambda_3' = l_3' - l$, при чемъ конечно $\lambda_3' > \lambda_2'$ и т. д. Явленіе будетъ продолжаться въ указанномъ направленіи до тѣхъ поръ пока наконецъ достигнетъ внѣшней нагрузки P_m, которая преодолѣетъ внутреннее сцѣпленіе частицъ между собою и получается разрушеніе бруска, выражающееся въ формѣ разрыва его по одному изъ поперечныхъ сѣченій.

Изъ сказаннаго не трудно видѣть, что полное абсолютное удлиненіе бруска при нагрузкахъ выше силы P_1 состоитъ изъ двухъ частей: одной исчезающей λ'' и другой остающейся λ', т. е. при нагрузкѣ, напр., силою P_2 имѣемъ: $\lambda_2 = \lambda_2' + \lambda_2''$. Какъ показываютъ наблюденія, упругія деформаціи и при наличности остающихся, продолжаютъ сохранять по отношенію къ дѣйствующей нагрузкѣ ту же простую зависимость (1). Значеніе силы P_1, до которой остающіяся деформаціи не появляются, обозначаютъ обыкновенно предѣломъ упругости. Весьма часто ее же называютъ предѣломъ пропорціональности; это не совсѣмъ вѣрно, ибо прекращеніе пропорціональности наблюдается нѣсколько раньше при дѣйствіи силы $P_1' < P_1$, но разница между этими величинами весьма не велика и практически можно считать оба предѣла совпадающими.

Изъ выраженія (1) видно, что величина λ абсолютной деформаціи прямо пропорціональна длинѣ l бруска, къ которой эта деформація относится. Если раздѣлить λ на l, то получимъ, такъ называемую, относительную деформацію, а именно $i = \lambda : l$ или относительное удлиненіе. Очевидно i представляетъ собою приращеніе единицы длины бруска и во многихъ случаяхъ при составленіи различныхъ зависимостей гораздо удобнѣе вмѣсто величины λ вводить величину i. Ур-іе (1) можетъ быть тогда написано такъ: $i = \alpha P : \omega$.

Можно получить выраженіе (1) и такимъ путемъ: представимъ себѣ (фиг. 8) два безконечно малыхъ элемента тѣла (въ формѣ кубиковъ) A и B соприкасающихся между собой по одной изъ боковыхъ граней. Пусть далѣе подъ вліяніемъ внѣш-

нихъ силъ получается стремленіе къ перемѣщенію центровъ этихъ элементовъ по линіи $ab = r$. Называя черезъ dr приращеніе разстоянія r, можемъ сказать, что внутренняя сила q, дѣйствующая между A и B будетъ функціей отъ $\frac{dr}{r}$ *) и, очевидно, что q будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше площадка соприкасанія, называя послѣднюю черезъ $d\omega$, получимъ:



Фиг. 8.

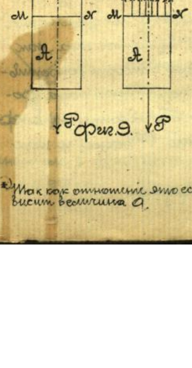
$$q = d\omega \, f\left(\frac{dr}{r}\right) \quad \text{или}$$

$$q = d\omega f\left(\frac{dr}{r}\right) = d\omega\left[f(0) + \frac{dr}{r} f'(0) + \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{r}\right)^2 f''(0) + \frac{1}{2.3}\left(\frac{dr}{r}\right)^3 f'''(0) \ldots\ldots\right]$$

Очевидно, что первый членъ, стоящаго въ скобкахъ выраженія равенъ 0, ибо при $dr = 0$ не возникаетъ и внутреннихъ силъ. Съ нѣкоторой погрѣшностью всѣ члены послѣ второго можно отбросить ибо они содержатъ множителемъ весьма малые. Тогда имѣемъ

$$q = f'(0)\frac{dr}{r} d\omega = A\frac{dr}{r} d\omega.$$

Очевидно, что для всего бруска получимъ $\Sigma dr = \lambda$, $\Sigma r = l$ по длинѣ и $\Sigma d\omega = \omega$ по поперечному сѣченію, а потому $\Sigma q = P = A\frac{\lambda}{l}\omega$, гдѣ A коэффиціентъ пропорціональности есть ничто иное какъ коэффиціентъ $\frac{1}{\alpha}$ въ ур-іи (1). Перейдемъ теперь къ нахожденію величинъ внутреннихъ силъ и напряженій. На основаніи метода сѣченій проведемъ мысленно (фиг. 9) сѣченіе MN и вынесемъ нижнюю часть въ сторону. Чтобы поддержать равновѣсіе этой отрѣзанной части необходимо вообразить себѣ въ сѣченіи приложенными нѣкоторыя силы $p_1, p_2, \ldots p_n$ направленныя очевидно параллельно оси бруска и слѣдовательно силѣ P. Дѣйствительно, необходимое и достаточное условіе равновѣсія части A, которую послѣ появленія деформаціи мы разсматриваемъ какъ твердое тѣло, сводится къ одному: сумма проэкцій всѣхъ дѣйствующихъ силъ на произвольную прямую линію должна равняться нулю. Въ данномъ случаѣ имѣемъ: $P = \Sigma p$. Что касается закона распредѣленія силъ p, то не трудно видѣть, что онѣ распредѣлены равномѣрно по сѣченію MN. Въ самомъ дѣлѣ, на-



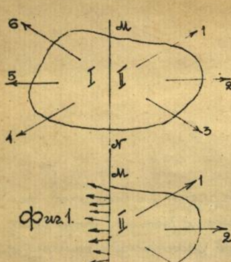
Фиг. 9.

*) Такъ какъ отношеніе это есть, очевидно, относительная деформація, отъ которой зависитъ величина q.

Введеніе.

Всякое твердое тѣло, подверженное дѣйствію внѣшней силы, испытывает нѣкоторое видоизмѣненіе внѣшней формы, как говорят, деформируется. Величина этой деформаціи измѣняется с измѣненіем силы и, при извѣстных условіях, может повести к разрушенію тѣла. Так как каждое сооруженіе, будь то зданіе, мост, машина и т. п., всегда находится под дѣйствіем тѣх или других внѣшних сил, то весьма существенный является вопрос, не могут ли эти силы оказаться опасными для разсматриваемаго сооруженія. Вопрос этот сводится к опредѣленію степени сопротивляемости матеріала, из котораго изготовлен предмет (или его части), силам, вызывающим в нем деформацію.

Условія равновѣсія сил, приложенных к какому либо твердому тѣлу, дает теоретическая механика, но при этом необходимо замѣтить, что послѣдняя наука трактует тѣла, как неизмѣняемую систему матеріальных точек. Под такое опредѣленіе дѣйствительно существующія тѣла не подходят, ибо абсолютно твердых матеріалов в природѣ нѣт. Всякое конкретное тѣло обладает особенным свойством упругости, которое заключается в том, что небольшія формоизмѣненія, деформаціи, вызываемыя внѣшней силой или системой сил, по прекращеніи дѣйствія их, исчезают и тѣло вполнѣ возстановляет свою форму. С другой стороны механика, разсматривает тѣло как абсолютно твердое, допускает, напр., перенесеніе точки приложенія силы по направленію послѣдней. Такое перенесеніе в дѣйствительности невозможно, ибо величина деформаціи находится в зависимости от мѣста приложенія силы. Представим себѣ (фиг. 1) произвольное твердое тѣло, подверженное дѣйствію сил 1, 2, 3 ..... 6, находящихся в рав-



Фиг.1.

новѣсіи. Приложенная система сил вызовет соотвѣтствующую деформацію, получив которую тѣло дальше уже не мѣняет своей формы. При этих условіях его можно уже разсматривать как систему матеріальных точек неизмѣнно связанных друг с другом. Разрѣжем тѣло мысленно плоскостью MN и представим, что часть II вынесена в сторону. Чтобы она находилась в равновѣсіи, необходимо взаимодѣйствіе отброшенной части I с приложенными к ней силами 4-6 замѣнить какими либо другими силами и таковыя должны конечно быть приложены в мѣстѣ разрѣза MN. Пусть это будет нѣкоторая система сил R_1. Относя подобныя разсужденія к части I (отбрасывая II), приходим к заключенію, что в мѣстѣ разрѣза MN на части I должна быть приложена система R_2. Но система внѣшних сил 1-3 уравновѣшивает систему R_1, или систему 4-6, а послѣдняя равновелика системѣ R_2. Отсюда слѣдует, что система R_1 равновелика системѣ R_2, но ей прямо противоположна. Сказанное относится к произвольному мѣсту разрѣза. Другими словами, под дѣйствіем внѣшних сил 1-6, внутри тѣла в каждом элементѣ его, возникают внутренния силы. Между указанными тремя факторами: внѣшними и внутренними силами и соотвѣтствующими деформаціями, очевидно, существует неразрывная связь. Установленіем этой зависимости занимается отдѣл математической физики — теорія упругости. Но эта наука как и теоретическая механика, изучает вопрос совершенно абстрактно, предполагая тѣла вполнѣ однородными и абсолютно упругими. Между тѣм в природѣ как не имѣется тѣл совершенно твердых, так точно нельзя встрѣтить тѣла идеально упругія. Чрезвычайно упругій матеріал - каучук не может вполнѣ возстановить свою форму, если величина внѣшних сил вызывает очень большія внутреннія силы; подобно этому и мало упругое тѣло свинец, глина под дѣйствіем весьма малых внѣшних давленій проявляют нѣкоторое свойство упругости. Таким образом, для изученія зависимости между упомянутыми тремя факторами, примѣни-

тельно к существующим в природѣ матеріалам, необходимо все время считаться с их физическими качествами. Теорія сопротивленія матеріалов и ставит своей задачей рѣшеніе вопроса о сопротивляемости внѣшним силам твердых существующих тѣл (или правильно - твердых строительных матеріалов.) при различных условіях. Для этого, пользуясь результатами изслѣдованія теоріи упругости, наша наука принимает во вниманіе специфическое качество матеріала и вводит соотвѣтственныя поправки. Из этого уже не трудно заключить, что для полученія необходимых результатов требуются свѣдѣнія чисто экспериментальнаго характера. Они получаются при помощи опыта и наблюденія, отчасти из практики над постройками различных сооруженій, а главным образом, необходимыя данныя собираются в механических лабораторіях. Здѣсь при помощи специальных машин производятся изслѣдованія всякаго рода строительных матеріалов. Благодаря этим опытам возможна провѣрка теоретических предположеній и наоборот, результаты опытов позволяют строить новую гипотезу, создавать новыя предположенія. Благодаря наблюденіям Hooke (Гук) пришел к заключенію, что производимыя внѣшней силой деформаціи прямо пропорціональны величинѣ силы. Эту зависимость он выразил в знаменитом положеніи: «ut tensio sic vis». Это положеніе подтверждается опытами над цѣлым рядом матеріалов и до настоящаго времени кладется в основу при изученіи упругих явленій.

Лабораторныя изслѣдованія над нѣкоторыми матеріалами показали отклоненія от указаннаго закона Hooke; как увидим ниже, существовали попытки еще в XVIII столѣтіи придать новое математическое выраженіе для зависимости между внутренними силами и деформаціями, но посейчас эти попытки не привели к какому либо положительному заключенію и есть основаніе полагать, что замѣчаемыя отступленія в нѣкоторых тѣлах от закона Hooke объясняются прежде всего неоднородностью строеній этих тѣл, отчасти погрѣшностями при опытах.

Значеніе теоріи сопротивленія матеріалов для каждаго инженера, не зависимо от его спеціальности, понятно уже потому, что эта наука одна дает возможность рѣшить двѣ существенныя задачи:

1.) По данным внѣшним силам и при соблюденіи извѣстных условій найти прочные размѣры сооруженія или его частей и

2. По существующим размѣрам даннаго сооруженія или его частей опредѣлить величины внѣшних сил, которыя могут быть приложены без опасности для прочности.

Переходя к изложенію предмета теоріи сопротивленія матеріалов, не лишнее сказать нѣсколько общих опредѣленій.

Прежде всего необходимо указать, что понимается здѣсь под внѣшними силами. Очень многіе подраздѣляют внѣшнія силы на механическія и химическія. Под первыми разумѣют силы, которыя вызывают в частицах стремленіе к перемѣщенію, под вторыми понимают силы, измѣняющія химическій состав тѣла.

Собственно говоря, подобное опредѣленіе механических сил нѣсколько не точно. В самом дѣлѣ, при химических реакціях, которыя имѣют в результатѣ, обычно, появленіе тѣла состава отличнаго от взаимодѣйствовавших, наблюдается всегда перемѣщеніе частиц. Особенно рѣзко наблюдается оно при химических процессах, сопровождающихся выдѣленіем газов. Слѣдовательно стремленіе к перемѣщенію в частицах возможно и без, так сказать, механическаго воздѣйствія со стороны. Поэтому различіе между механической силой и химической правильнѣе опредѣлить так: первая вызывает стремленіе к перемѣщенію частиц, но при этом явленіе не сопровождается измѣненіем химическаго состава; подвергаемое воздѣйствію силы тѣло остается по своему строенію во все время продолженія опыта одинаковым. Наоборот, перемѣщеніе частиц, под вліяніем химических сил, обязательно сопровождается измѣненіем химическаго состава, а в большинствѣ случаев и физических и механических свойств. Можно привести ряд примѣров, когда химическая реакція вызывает дѣйствіе механической силы и наоборот. Так, если представить себѣ процесс взаимодѣйствія, положим, соляной кислоты на углекислый кальцій в герметически закрытом сосудѣ, то, как извѣстно, реакція эта сопровождающаяся выдѣленіем углекислоты, будет продолжаться*) до тѣх пор пока установится нѣкоторое опредѣленное давленіе газа. При этом стѣнки сосуда, подверженныя давленію углекислоты, деформирующіяся, но давленіе это по отношенію к сосуду, является внѣшней механической силой.

Мнѣ приходилось наблюдать разрушеніе свободно лежащаго кирпича (хорошо обожженнаго) повидимому без всякаго со стороны механическаго воздѣйствія. Изслѣдованія показали, что благо-

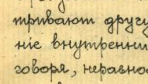
*) При достаточных количествах реагирующих веществ, сообразно с емкостью сосуда.

даря небрежности приготовленія, в кирпичѣ оказались гнѣзда извести, которая при обжигѣ обратилась в окись кальція. Послѣдняя, под дѣйствіем паров воды атмосферы, превратилась в гидрат окиси кальція — тѣло, обладающее большим объемом нежели $CaCO_3$. Расширяясь, новое тѣло $Ca(HO)_2$ произвело настолько большое расширяющее дѣйствіе на массу кирпича, что послѣдній разрушился. Наоборот сообщенная тѣлу механическая энергія может вызвать проявленіе чисто химической силы. Так, напр., подогрѣваніе части смѣси желѣзнаго порошка с сѣрой до извѣстной температуры оказывается импульсом к началу сильной химической реакціи, даже по прекращеніи сообщенія тепла.

Таким образом, оставляя в сторонѣ вопрос о природѣ силы, в предлагаемом курсѣ мы будем под внѣшними силами понимать такія, которыя, не измѣняя химическаго состава тѣла, вызывают в нем перемѣщеніе частиц деформаціи.

Выше было указано, что при появленіи деформацій в данном тѣлѣ, под дѣйствіем внѣшней силы, внутри его развиваются, так называемыя, внутреннія силы. Не трудно видѣть, что тѣло может сопротивляться такому воздѣйствію лишь до тѣх пор, пока эти внутреннія силы не превзойдут молекулярную связь между частицами.

Общій метод для рѣшенія вопроса о величинѣ и направленіи внутренних сил заключается в способѣ сѣченій. Разсѣкая тѣло произвольной плоскостью и отбрасывая одну его часть, разсматривают другую*), как находящуюся в равновѣсіи. Распредѣленіе внутренних сил, приложенных к плоскости сѣченія, вообще говоря, неравномѣрное, но вырѣзая около какой либо точки сѣченія весьма малую площадку $\Delta\omega$ можно допустить, что на этом небольшом протяженіи внутреннія силы параллельны нѣкоторому направленію и распредѣлены по площадкѣ равномѣрно (фиг. 1а). Равнодѣйствующая их будет Δp. Очевидно на квадратную единицу приходится сила $\frac{\Delta p}{\Delta\omega}$ и это значеніе, конечно, тѣм точнѣе, чѣм меньше площадка $\Delta\omega$. Слѣдовательно нагрузка или, как принято выражаться, напряженіе внутренних сил на данном безконечно малом элементѣ равно $k = \lim\left(\frac{\Delta p}{\Delta\omega}\right)$ и



Фиг. 1а.

*) В условіях равновѣсія т. е. послѣ проявленія соотвѣтственных деформацій.

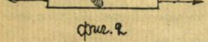
если данное тѣло отнесено к системѣ координат $O\bar{X}$, OY и OZ, то напряженіе есть функція $\bar{X}, Y, Z$ т.е. $K = f(x, y, z)$.

Равнодѣйствующая Δp может быть разложена на нормальную Δn и касательную Δt слагающія, из которых первая перпендикулярна к элементу $\Delta\omega$, вторая лежит в его плоскости. Соотвѣтственно этому получаются два рода напряженій: нормальное... $k_z = \lim\left(\frac{\Delta n}{\Delta\omega}\right)$ и

касательное...... $k_s = \lim\left(\frac{\Delta t}{\Delta\omega}\right)$.

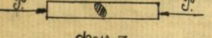
В общем случаѣ, когда разсматриваемое тѣло подвержено дѣйствію нѣкоторой системы внѣшних сил, рѣшить вопрос о величинѣ и распредѣленіи внутренних напряженій гораздо легче, найдя предварительно слагающія касательныя и нормальныя. Другими словами, общій случай сводят к частному, когда задача рѣшается проще. Таких частных случаев имѣется пять:

1. Призматическій брусок (фиг. 2) растягивается двумя равными, но прямо противоположными силами P и $-P$, приложенных в центрах тяжести конечных сѣченій.



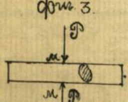
фиг. 2

2. При измѣненіи направленія сил на прямо противоположное (фиг. 3) получается явленіе **сжатія**.



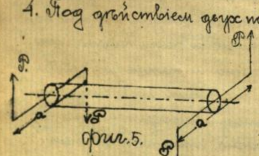
фиг. 3.

3. Расположеніе сил фиг. 4 вызывает проявленіе касательных сил в плоскости MM и имѣет своим послѣдствіем так. наз. **сдвиг** (или скалываніе)



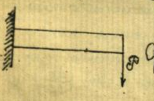
фиг. 4

4. Под дѣйствием двух пар Pa, приложенных в пл-тях крайних сѣченій, брусок претерпѣвает деформацію **скручиваніе** (фиг. 5) и наконец

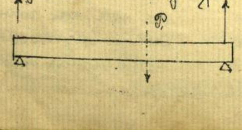


фиг. 5.

5. В случаѣ расположенія сил, указанных на фиг. 6, наблюдается так. наз. **изгиб**.



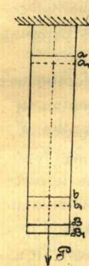
Фиг 6.



Поименованныя простыя формы сопротивленія бруска могут комбинироваться между собой в так наз. сложное сопротивленіе (общій случай).

Растяженіе.

Представим себѣ призматическій брусок (фиг. 7), укрѣпленный верхним концом A и висящій вертикально; вѣсом бруска пока пренебрегаем. В центрѣ нижняго сѣченія приложена сосредоточенная сила P, совпадающая по направленію с осью бруска. Отмѣтим на брускѣ нѣкоторую длину $ab = l$. Под дѣйствіем силы P брусок начнет вытягиваться и сѣченіе a перейдет в a_1 и b — в b_1. Новая длина $a_1b_1 = l_1$ очевидно будет больше ab, т.е. $l_1 > l$. Приращеніе длины l, а именно $\lambda = l_1 - l$ называется абсолютным. Если по прекращеніи дѣйствія силы, брусок сократится так, что сѣченія a и b возвратятся в первоначальныя положенія, то удлиненіе исчезает и слѣдовательно оно (λ) было упругим и явленіе происходило, как говорят, в предѣлах упругости.



фиг. 7.

С постепенным возрастаніем силы P увеличивается соотвѣтственно и величина λ, причем, как указывают наблюденія, получаем зависимость:

$$\lambda = \alpha\frac{Pl}{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

гдѣ ω — площадь поперечнаго сѣченія бруска и α — коэффиціент пропорціональности, зависящій лишь от физических свойств матеріала. Эта прямая пропорціональность носит название закона Гука, по имени англійскаго ученаго, который впервые обратил вниманіе на такую зависимость послѣ своих наблюденій над деформаціями пружин.

Для каждаго бруска в зависимости от его поперечных размѣров и матеріала можно найти опытом то значеніе P_1 силы P, при котором указанное ур-іе (1) нарушается и величина λ возрастает быстрѣе нежели нагрузка. Представим себѣ, что нагрузка достигла значенія $P_2 > P_1$ и соотвѣтственное удлиненіе λ_2. По прекращеніи дѣйствія силы P_2, брусок сокращается, но при этом разстояніе l_2' между мѣтками a и b оказывается уже нѣсколько больше l. Разность блюденія показываютъ, что при растяженіи призматическаго бруска силою, совпадающей с осью его, каждое сѣченіе перемѣщается параллельно самому себѣ. Если, напр., начертить на боковой поверхности бруска линію ab, то послѣ деформаціи она перемѣстится в a_1b_1 такимъ образомъ, что $a_1b_1 \parallel ab$, слѣдовательно деформація в каждой частицѣ от a до b постоянна, а это возможно лишь при условіи, что внутреннія силы точно также постоянны на этомъ протяженіи. Величина напряженія K в данномъ случаѣ опредѣлится как частное от дѣленія P на площадь поперечнаго сѣченія ω т.е.

$$K = \frac{P}{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Так как сѣченіе MN взято произвольно по длинѣ бруска, то очевидно напряженіе K будетъ при данной силѣ P постоянно в любомъ нормальномъ сѣченіи*) тѣла бруска. Обращаясь к выраженію (1) введемъ в него вмѣсто P и ω соотвѣтственное значеніе через K. Тогда получимъ

$$i = \alpha K \text{ или } K = \frac{i}{\alpha} = Ei \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

В послѣднемъ видѣ аналитическая зависимость между напряженіемъ и деформаціей примѣняется всего чаще. Если положить в (3) $i = 1$, найдемъ: $K = E$. Слѣдовательно коэффиціентъ E есть ничто иное как напряженіе при условіи, что $\lambda = l$, т.е. при условіи, что каждая единица длины бруска получила приращеніе равное этой единицѣ или, другими словами, наблюдаемая длина l увеличилась вдвое. Практически получить такое увеличеніе длины да еще в предѣлахъ упругости**) невозможно, так как всѣ матеріалы разрушаются гораздо раньше полученія такихъ деформацій. Исключеніе составляютъ очень немногія тѣла, как, напр. каучук и др. Для литого желѣза величина E равна в среднемъ 20000 klgr. на m/m^2, между тѣмъ как разрушеніе такого желѣза происходитъ уже при напряженіи в 40 klg. на m/m^2, чему соотвѣтствуетъ всего $i = 0{,}001$. Слѣдовательно величина E является величиной фиктивной, тѣмъ не менѣе она, как увидимъ ниже, играетъ весьма важную роль в теоріи сопротивленія матеріаловъ и умѣніе найти ее для различнаго рода строительныхъ матеріаловъ очень существенно. Коэффиціентъ E называется обыкновенно модулемъ упругости 1-го рода и как

*) т.е. перпендикулярномъ к оси бруска

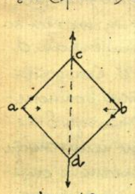
**) потому что выраженіе (1), а слѣд. и (3) справедливы лишь в этихъ предѣлахъ.

мы видѣли выражается в вѣсовыхъ единицахъ на квадр. единицу, чаще всего в килограммахъ на квадр. сантиметр. или кв. миллиметр. В англійскихъ и американскихъ сочиненіяхъ его выражаютъ в фунтахъ на кв. дюймъ; в нѣкоторыхъ русскихъ — в пудахъ на кв. дм. Въ виду значенія величины E необходимо умѣть опредѣлять ее для различныхъ матеріаловъ; это производится обычно лабораторнымъ путемъ и методы нахожденія будутъ описаны ниже.

Поперечное сжатіе.

Если производя растяженіе призматическаго бруска, будемъ одновременно измѣрять поперечные размѣры, то замѣтимъ, что с увеличеніемъ удлиненія брусокъ дѣлается нѣсколько тоньше и это удлиненіе наблюдается по всей испытуемой длинѣ l. Пусть брусокъ имѣетъ квадратное сѣченіе со стороной a, то е. площадь его $\omega = a^2$. Послѣ приложенія силы P, длина бруска увеличивается до l_1 и он получил абсолютное удлиненіе $\lambda = l_1 - l$. В то же время сторона квадрата a сократится до $a_1 < a$ и новая площадь поперечнаго сѣченія будетъ $\omega_1 = a_1^2$ причемъ $\omega_1 < \omega$. Отношеніе разности $a - a_1$ к a, т.е. дробь $\gamma = \frac{a - a_1}{a}$ носитъ названіе относительнаго линейнаго поперечнаго сжатія.

Сущность явленія поперечнаго сжатія при продольномъ удлиненіи заключается в томъ, что частицы имѣютъ стремленіе перемѣщаться от периферіи к центру. Явленіе это можно схематически представить себѣ так: пусть частицы (фиг. 10) c и d под дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ стремятся удалиться друг от друга; под вліяніемъ силъ взаимодѣйствія в частицахъ a и b развиваются равнодѣйствующія, которыя вызываютъ сближеніе ихъ между собой.



фиг. 10.

Разсматривая вопрос с чисто теоретической точки зрѣнія, как это дѣлаетъ теорія упругости матеріаловъ, можно показать, что отношеніе между относительнымъ поперечнымъ линейнымъ сжатіемъ и относительнымъ удлиненіемъ i есть величина постоянная равная 0,25, т.е. $\gamma : i = 0{,}25 = m$. Практически, въ виду различныхъ механических свойств матеріалов величина m — коэффиціент Пуассона — измѣняется, правда в небольших предѣлах, в зависимости от матеріала. Если при растяженіи бруска измѣняется его длина и поперечное сѣченіе, то является вопрос — остается ли объем бруска постоянным? Опытным путем доказано, что объем при растяженіи возрастает.

При этих условіях можно показать, что коэффиціент Пуассона может имѣть наибольшим своим значеніем 0,5. В самом дѣлѣ, приращеніе объема бруска под дѣйствіем груза P будет:

$\Delta V = a_1^2 l_1 - a^2 l$, но $a_1 = a(1-\gamma)$ и $l_1 = l(1+i)$, а потому

$V_1 = a^2(1-\gamma)^2 l(1+i) = a^2 l\{1-2\gamma+\gamma^2+i-2\gamma i+i\gamma^2\}$.

Так как величины i и γ вообще не велики, то можно отбросить вторыя их степени или произведенія их между собою, тогда получим: $\Delta V = a^2 l(i-2\gamma)$,

а так как на основаніи опыта приращеніе объема положительно, то имѣем окончательно:

$$m = \frac{\gamma}{i} \le \frac{1}{2}.$$

Дѣйствительно, многочисленныя наблюденія показывают, что коэффиціент Пуассона измѣняется для различных тѣл в предѣлах от 0,25 до 0,5. Последнее значеніе относится к тѣлам абсолютно несжимаемым, точно так же, как значеніе 0,25 может быть присуще тѣлам абсолютно упругим.

С увеличеніем объема, конечно, уменьшается удѣльный вѣс тѣла, но это уменьшеніе весьма мало. Дѣйствительно для желѣза коэфф. Пуассона имѣет среднее значеніе $m = 0,3$, полагая $E = 20000$ klgr. на m/m^2 найдем, что при нагрузкѣ в 20 klgr. на m/m^2 брусок с длиною l и діаметром d получит увеличеніе объема $V_1 - V = \Delta V = 0,0004V$. Слѣдовательно и плотность δ, матеріала уменьшится в отношеніи прежняго и новаго объемов, т.е. $\delta_1 = 1,0004\delta$, гдѣ δ — вѣс куб. ед. матеріала до растяженія. При наличности поперечнаго сжатія, ввиду сокращеній поперечных сѣченій, истинная величина напряженія k должна быть получаема дѣленіем дѣйствующаго груза не на первоначальное сѣченіе ω, а на $\omega_1 = \omega(1-\gamma)^2 = \omega(1-mi)^2$. Но так как величина mi не велика, то обыкновенно под дѣйстви-

тельным значеніем для напряженія понимают $k = \frac{P}{\omega}$.
Ошибка при этом получаемая тѣм больше, чѣм больше груз P.

Дѣйствительное напряженіе $k_1 = \frac{P}{\omega(1-\gamma)^2} = \frac{P}{\omega(1-mi)^2}$ нѣсколько больше нежели $k = \frac{P}{\omega}$, а именно $k_1 : k = 1 : (1-mi)^2$. Напр., для приведеннаго выше случая желѣзнаго бруска при $k = 20$ klg. на m/m^2 имѣем: $k_1 = 20,012$ klgr., т.е. ошибка равна всего 0,06%.

Отступленіе от закона Гука.

Обращаясь от теоретическаго матеріала, обладающаго абсолютной однородностью к матеріалам дѣйствительно существующим, мы наталкиваемся прежде всего на то обстоятельство, что весьма многіе матеріалы при изслѣдованіи их в лабораторіях на растяженіе не слѣдуют закону Гука и зависимость между упругими деформаціями и напряженіями не может быть выражена простою пропорціональностью. Особенно рѣзко это уклоненіе от закона Гука выражается в камнях, чугунѣ, нѣкоторых сплавах. На указанное явленіе обращено вниманіе очень давно и еще в 1729 г. Bülfinger дал зависимость в формѣ: $i = \alpha k^m$

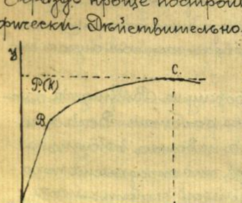
Здѣсь i и k имѣют прежнія значенія; α коэфф. пропорціональности, m — показатель различный для различных матеріалов и даже для различных сортов одного и того же матеріала. Позднѣе были предложены другія болѣе или менѣе сложныя зависимости; нужно сказать, что вообще искомая зависимость может быть представлена в видѣ: $i = \alpha k + \beta k^2 + \gamma k^3 + \delta k^4 + \ldots\ldots$

Путем экспериментов можно опредѣлить коэффиціенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и т.д. и подобрать в каждом частном случаѣ вид функціи $i = f(k)$.

Из различных предложеній формула Bülfingera имѣет нѣкоторое значеніе благодаря работам Bacha и Schülle. Но во всяком случаѣ она не вошла в жизнь и думается прежде всего потому, что опредѣленіе показателя m, требующее кропотливой работы мало имѣет практическаго значенія. Отличаясь от единицы, для чугуна, напр., на небольшую величину показатель этот, опредѣленный для одного сорта чугуна совершенно не подходит для другого. Опыты показали даже, что для брусков отлитых из одного ковша, показатель m сплошь и рядом неодинаков. Что касается вопросов чисто теоретических, то здѣсь, конечно, опредѣленіе болѣе точной зависимости между i и k может быть интересным. В настоящее время всѣ выводы теоріи упругости опираются исключительно на законѣ Гука и выводы полученные таким образом примѣняются к разсчету издѣлій из матеріалов, которые в дѣйствительности этому закону не слѣдуют. Из матеріалов, в которых простая пропорціональность наблюдается почти точно, отмѣтим желѣзо, сталь, красную мѣдь, латунь; как видим матеріалы с наиболѣе однородной структурой

Явленіе за предѣлом упругости.

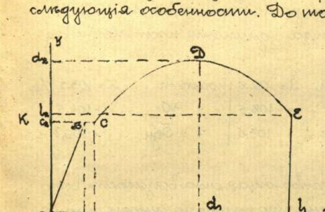
По достиженіи предѣла упругости, деформація λ начинает расти быстрѣе нежели напряженіе; при этом полное удлиненіе состоит из упругого или исчезающего λ_1 и остающегося или пластического λ_2. Между относительным удлиненіем $\frac{\lambda}{l} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{l} = i$ и напряженіем k исчезает прежняя зависимость, так как она сохраняется лишь между $\frac{\lambda_1}{l}$ и k. Опредѣленной функціи между i и k не существует, она измѣняется даже при переходѣ от одного бруска к другому. В каждом частном случаѣ, конечно путем ряда наблюденій, возможно составить ур-іе, напр., в видѣ:
$$k = ai + bi + ci + \ldots\ldots$$
Гораздо проще построить искомую зависимость графически. Дѣйствительно, будем откладывать на оси абсцисс (фиг. 11) дѣйствующія силы $P, P_1, P_2, \ldots\ldots$, а по оси ординат соотвѣтствующія им полныя абсолютныя удлиненія: кривая OBC очевидно дает нам изображеніе ур-ія $P = \varphi(\lambda)$; если вмѣсто λ и P будем откладывать $k = \frac{P}{\omega}$ и $i = \frac{\lambda}{l}$, то получим графически кривую $k = f(i)$.



Фиг. 11.

Обращаясь к наиболѣе важ-

ным металлам, можно отмѣтить, что характер (общій) кривой зависит от степени однородности и пластичности матеріала. Так, напр., желѣзо сварочное и литое, мягкая сталь, красная мѣдь, латунь, нѣкоторыя бронзы и т. п. имѣют слѣдующія особенности. До точки B (фиг. 12.) получается прямая OB, которая выражает очевидно зависимость $k = Ei$. Точка B соотвѣтствует таким образом предѣлу пропорціональности, который, как указывалось, лежит весьма близко, но нѣсколько ниже предѣла упругости. При дальнѣйшем растяженіи наблюдается, что удлиненія начинают расти замѣтно быстрѣе, между тѣм как нагрузка, а слѣдовательно и напряженіе (ордината OC_2) не измѣняется, иногда даже нѣсколько убывает. Явленіе производит такое впечатлѣніе, как будто матеріал сопротивляется весьма слабо, как говорят, течет. В чем заключается сущность теченія сказать вполнѣ опредѣленно трудно. Несомнѣнно лишь, что здѣсь имѣет мѣсто сильное перемѣщеніе частиц. Этот період, часто называемый первым критическим періодом, продолжается нѣкоторое время иногда 30-60 минут, послѣ чего устанавливается вновь равновѣсіе и матеріал получает способность сопротивляться возрастающим внѣшним усиліям. Правда здѣсь все же деформаціи растут быстрѣе напряженій, но тѣм не менѣе послѣднія растут. Надо замѣтить, что образованіе пластических деформацій вообще гораздо продолжительнѣе нежели упругих. Отдѣльныя наблюденія над проволоками из различных металлов показывают, что увеличеніе длины под дѣйствіем какой либо нагрузки превосходящей значительно предѣл упругости продолжается иногда дни, недѣли и даже мѣсяцы.



фиг. 12

Напр., из опытов Баха можно привести такія данныя: для 2х кругл. желѣзн. брусков $d = 16\ m/m$, $l = 100\ m/m$.

	Время опыта	напряжение	удлинение
1-ый брусок	— 2½ мин.	39,35 клгр. на $^{m}/_{m^2}$	32%
2-ой "	1ч. 15 мин.	37,20 " " "	34%

Lecointe при испытании ремней получил, напр., при напряжении $K = 1,50$ клгр. на $^{m}/_{m^2}$ полную деформацию $\lambda = 96\,^{m}/_{m}$. Под действием того же груза удлинение постепенно возрастало с течением времени

после 10м.	$\lambda = 99,5\,^{m}/_{m}$	после 50м.	$\lambda = 102,5$	после 4ч.	$\lambda = 103,5\,^{m}/_{m}$
" 20 "	" " 100,5 "	" 1ч.	" " 102,5	" 10 "	" " 104,5 "
" 30 "	" " 101, "	" 2ч.	" " 103,0	" 5дн.	" " 109,0 "
" 40 "	" " 101,5 "				

После нагрузки, когда растягивающая сила вызывает всего 0,0042 клгр. на $^{m}/_{m^2}$ было найдено, что полное удлинение упало до $69\,^{m}/_{m}$ и далее.

после 20 мин.	66 $^{m}/_{m}$	после 10 часов	63,0 $^{m}/_{m}$
" 2 часов	64 "	" 7 дней	59,0 "

Из последней таблицы видно, что упругія деформаціи исчезают не сразу, а постепенно. Это явленіе носит названіе упругого последействія и указывает на зависимость между упругими деформаціями и временем.

Можно сказать на основаніи наблюденій, что приращеніе упругих удлиненій с теченіем времени весьма ничтожно и практического значенія не имеет. Этого нельзя заметить по отношенію к остающимся деформаціям. Поэтому при лабораторных изследованіях при постепенном увеличеніи нагрузки в пределах упругости нет надобности выдерживать одну и ту же нагрузку для полученія отсчета деформаціи. Наоборот за этим пределом равновесіе между внешним растягивающім грузом и внутренними силами наступает гораздо медленнее. Возрастаніе нагрузки, следовательно и напряженія, идет до некоторого maximum'a (точка D) после чего наблюдается новый критическій період (второй): нагрузка начинает убывать в то время как деформаціи растут чрезвычайно быстро. Наблюдая поверхность бруска, замечаем, что около одного из поперечных сеченій образуется кольцевая впадина или перехват, носящій названіе шейки или горловины. Впадина все увеличивается и соответственно убывает размер поперечного

сеченія пока, наконец, не происходит разрыв. Сильное паденіе напряженія объясняется, конечно, указанным уменьшеніем поперечного сеченія; разрывающій груз и соответственное напряженіе K_2 при разрыве (ордината $E\bar{e}_1$), конечно, меньше нежели наибольшее (ордината $D\bar{d}_1$). В практике тем не менее за предельное напряженіе K_2 считают, именно, наибольшее, т. е. Dd_1. Оно дает указаніе на наибольшую сопротивляемость матеріалов перед разрушеніем и носит названіе временного сопротивленія. Установить величину напряженія непосредственно при разрыве, т. е. ординату Ee_1 очень трудно, благодаря недостаточной чувствительности машин или — вернее — аппарата регулирующего нагрузку.

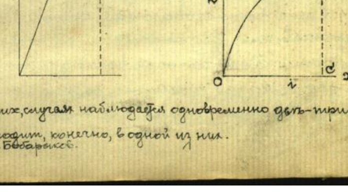
Поперечное сжатіе которое характеризуется перехватом или шейкой нельзя смешивать с поперечным сжатіем, которое определяется коэфф. Пуассона. В последнем случае сокращеніе поперечных размеров наблюдается по всей длине равномерно, тогда как в первом оно наблюдается в одном месте*). Величина этого сжатія, в зависимости от пластичности матеріала, достигает больших значеній, как видно из следующих примеров, взятых из опытов Bach'а:

	сопротивл. при разрыве	поперечное сжатіе	удлиненіе при разрыве
Литое железо (в среднем)	41,3	69,2%	33,2%
Литая сталь "	63,6	36,1%	18,6%

Здесь приведены данныя относительно поперечных сжатій т. е. отношеніе $\frac{\omega_2}{\omega}$ в %%. Иногда вместо этой цифры дается отношеніе $\frac{\omega - \omega_2}{\omega}$ также в %%.

Обращаясь к матеріалам менее однородным, замечаем, как напр., в чугуне, что здесь трудно уловить точку B, соответствующую пределу пропорціональности, так как только вблизи начала координат кривая OBC (фиг. 13) имеет вид прямой. В некоторых случаях, как показал Bach и др. она выражается ур-ем: $i = \alpha K^{m}$

Фиг. 13



*) В некоторых, довольно редких, случаях наблюдается одновременно две-три шейки. Разрушеніе происходит, конечно, в одной из них.

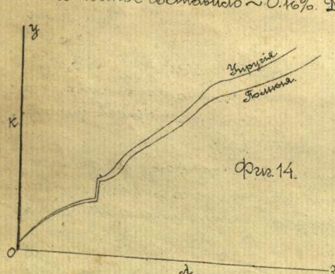
Явленіе теченія не наблюдается вовсе, разрушеніе происходит по одному из сѣченій без образованія шейки. Деформаціи как упругія так и пластическія очень малы.

В таком же родѣ как для чугуна получаются кривыя для различных сортов камней.

В одном из опытов Hodgkinson'а для чугунных брусков с размѣрами $l = 15{,}25$ m., $\omega = 645 \frac{m^2}{m}$ было найдено:

Напряж. в kg на m/m^2	Удлиненіе на 1 пог. метр в m/m			Напряж. в kg на m/m^2	Удлиненіе на 1 пог. метр в m/m		
	упругое	остающееся	полное		упругое	остающееся	полное
0.74	0.075		0,075	5.92	0.659	0.056	0.715
1.11	0.11217	0.00183	0.114	6.66	0.758	0.070	0.828
1.48	0.11046	0.00454	0.115	7.40	0.858	0.088	0.946
2.21	0.23009	0.00891	0.239	8.14	0.959	0.109	1.068
2.96	0.41140	0.01460	0.426	8.86	1.072	0.134	1.206
3.70	0.416	0.022	0.438	9.63	1.217	0.175	1.392
4.44	0.590	0.031	0.551	10.40	1.347	0.201	1.548
5.17	0.568	0.043	0.611				

Таким образом при нагрузкѣ близкой к разрушенію удлиненія полное составило ~ 0.16%. Далѣе видно, что не только полная, но и упругая деформація отклоняется от закона пропорціональности (діаграмма).



Фиг. 14.

Работа внутренних сил (работа деформаціи.)

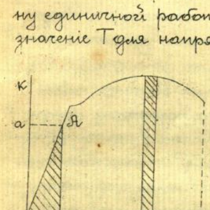
Сила растягивающая брусок, преодолѣвает его сопротивленіе деформаціи и, слѣдовательно, производит работу. Хотя часть ея расходуется на нагрѣваніе бруска и деформацію машины, обычно этим обстоятельством пренебрегают, считая, что работа внѣшних сил цѣликом расходуется на преодолѣваніе внутренних сопротивленій в матеріалѣ испытуемого бруска. Указанное допущеніе основывается в $1^{х}$ на том, что части испытательной машины должны быть разсчитаны с таким запасом, при котором формоизмѣненіе их совершенно ничтожно; в $2^{х}$, температура при растяженіи бруска поднимается главным образом с момента теченія матеріала, но принимая во вниманіе очень незначительную теплоемкость металлов, возможно пренебречь и этой потерей.

Если полное удлиненіе бруска равно λ, то очевидно работа внѣшних сил равна $\mathcal{T} = \int_0^{\lambda} P d\lambda$. Интеграл этот может быть вычислен, если извѣстна зависимость $P = f(\lambda)$ или функція P и λ от времени. Обращаясь к діаграммам удлиненій, легко убѣждаемся, что площадь (фиг. 15) ея равна $\int_0^{\lambda} P d\lambda$, т.е. выражает собою как раз работу внѣшних сил, а стало быть равно работѣ сил внутренних. Относя кривую к координатам k и i найдем, что площадь этой діаграммы будет: $\mathcal{T}_1 = \int_0 k\, di$, замѣнивм здѣсь k через $P : \omega$ и i — через $\lambda : l$, найдем $\mathcal{T} = \frac{1}{\omega l} \int_0^{\lambda} P d\lambda$, т.е. площадь таких діаграмм выражает собою работу внутренних сил, отнесенную к 1 куб. единицѣ объема. Такое выраженіе называют единичной работой деформаціи и, очевидно, что полная работа внутренних сил, что то же, внѣшних сил равна объему бруска, умноженному на величину единичной работы — деформаціи.

Фиг. 15.

Не трудно найти значеніе T для напряженія в предѣлах пропорціональности. Дѣйствительно, для какого либо напряженія $k = Ab$ (фиг. 16) искомая работа выразится площадью $OAb = \frac{Ob + Ab}{2}$, т.е.

$$T = \frac{ki}{2} = \frac{k^2}{2E} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

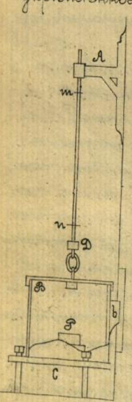


Фиг. 16

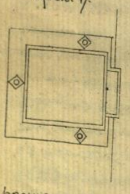
Методы опредѣленія модуля упругости и др. данных.

Первым наиболѣе удачным способом провѣрки закона Hooke и опредѣленія величины E надо считать метод Wertheim. Этот ученый производил опыты над желѣзными проволоками, т. е. брусками с очень небольшими поперечными сѣченіями.

Испытуемый брусок зажимался в кронштейнѣ (фиг. 17) укрѣпленном в стѣнѣ; к нижнему концу D проволоки подвѣшивался посредством цѣпи ящик B, который стоял на подставкѣ C. Для того, чтобы растягивающій груз дѣйствовал постепенно, а не ударами, скамья C снабжалась винтами a, вывинчивая и ввинчивая которые можно перемѣстить груз вверх и вниз весьма плавно. Чтобы при опусканіи ящика B не происходило закручиванія проволоки, ящик B имѣл ребро b, которое перемѣщалось в пазу, сдѣланном в стѣнкѣ. Перед началом опыта Wertheim дѣлал двѣ отмѣтки m и n, причем длина (разсчетная) mn не превышала 1 metr. Затѣм ящик B постепенно нагружался; сначала силой Q, которая вмѣстѣ с вѣсом ящика равнялась P klgr. и отвинчивая винты a, подвѣшивали ящик к испытуемому бруску. Удлиненіе проволоки, вызванное силой P, наблюдалось помощью двух катетометров, позволявших дѣлать отсчеты с точностью до 0,01 m/m. Разность перемѣщеній точек m и n представляла полное абсолютное удлиненіе λ_1. Выждав нѣкоторое время, доску C поднимали, цѣпь ослаблялась и в ящик вводился новый груз P. Опуская скамью, подвергали брусок растяженію силой 2P, дѣлали новый отсчет λ_2 и т. д. В результатѣ оказалось, что нагрузки P, 2P, 3P.... вызывали соотвѣтственные удлиненія $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.... причем $\lambda_2 = 2\lambda_1$, $\lambda_3 = 3\lambda_1$ и т. д.. Так продолжалось до нѣкотораго груза P_1, при котором указанная пропорціональность прекращалась.

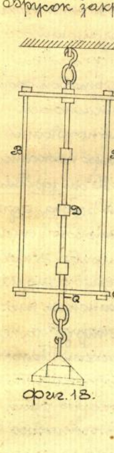


Фиг. 17.

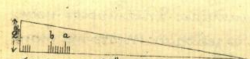


Англійскій экспериментатор Hodgkinson про-

изводил опыты, подобные описанным, но над брусками достигавшими длины до 10 metr.Ввиду трудности получить цѣлый брусок подобной длины, опытные бруски составляют из частей, соединенных между собой муфтами. Брусок закрѣплялся в поперечинѣ A (фиг. 18) подвѣшенной к потолку. Она соединялась двумя штангами BB, тоже составными, с другой поперечной C, через которую свободно проходил испытуемый брусок D. К бруску подвѣшивалась чашка E, на которую и клали груз. Для отсчета удлиненій на брускѣ D устанавливали стержень a. Разсчетная длина считалась от нижней плоскости верхней поперечины до выступа a. Подвергая брус растяженію грузом P, вызывали деформацію удлиненія λ. Самый отсчет производился помощью стального клина, на длинном катетѣ котораго (фиг. 19) были нанесены дѣленія. Предположим, что при нагрузкѣ P клин, вставленный в промежуток между выступом на брусѣ и поперечиной C, дошел до дѣленія a, а при силѣ 2P — до дѣленія b, измѣряя соотвѣтственные этим дѣленіям вертикальные катеты и вычитая их один из другого, мы получим величину удлиненія λ. Дѣля полученную величину на длину бруска, находят относительное удлиненіе i.



Фиг. 18.

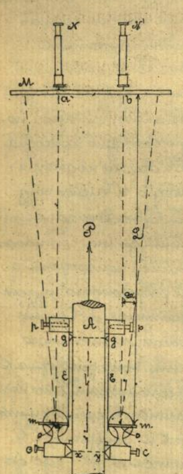


Фиг. 19.

Способы наблюденій, произведенных Hodgkinson'ом и Wertheim'ом вполнѣ подтвердили справедливость закона Hooke для матеріалов, над которыми эти опыты производились.

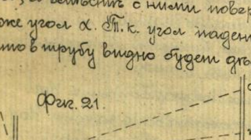
В послѣднее время по примѣру проф. Bauschinger'a, сильным распространеніем пользуется примѣненіе метода зеркальнаго отсчета. Этот пріем позволяет при опытах с брусками малой длины получать весьма значительную точность результатов.

Прибор Bauschinger'a для зеркальнаго отсчета состоит в слѣдующем. На испытуемом брускѣ A (фиг. 20) лежащем горизонтально, посредством винтов C и призм D, укрѣпляется хомут или обойма B. Она несет на себѣ два вертикальных валика O,O с роликами, на осях которых и насажены зеркала m, m перпендикулярно к оси бруска. На нѣкотором разстояніи $l = xz = yt$[1], по длинѣ бруска, посредством винтов p,p и призм g, g (на второй обоймѣ F), закрѣпляется параллельно оси бруска двѣ горизонтальныя пружины E,E, свободные концы которых нажаты на ролики. На разстояніи L от зеркала находится горизонтальная рейка с дѣленіями (шкала MM), за которой установлены двѣ зрительныя трубы N и N'.



Фиг. 20.

В трубы N и N₁ будут видны дѣленія шкалы a и b, если вертикальныя плоскости, проходящія через оси труб перпендикулярны к плоскости зеркал. Положим теперь, что брусок, под дѣйствіем силы P получил нѣкоторое удлинение λ и сѣченіе zt перемѣстилось в $z't'$. При этом пружины, как неизмѣнно связанные с бруском, повернут ролики на нѣкоторый угол α, а вмѣстѣ с ними повернутся и зеркала m, m на тот же угол α. Т.к. угол паденія луча равен углу отраженія, то в трубу видно будет дѣленіе C (фиг. 21), причем $\angle mkc = \angle mka$. Из прямоугольного треугольника akc мы можем опредѣлить перемѣщеніе ac луча по шкалѣ:



Фиг. 21

$$\overline{ac} = \overline{ak} . \operatorname{tg} 2\alpha \ldots\ldots (a)$$

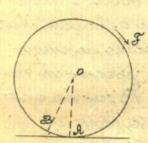
Угол α получается всегда очень малым, (ибо явленіе разсматривается в предѣлах пропорціональ-ного отношенія между напряженіем и деформаціей); слѣдовательно с небольшой погрѣшностью можно замѣнить $\operatorname{tg} 2\alpha$ дугой 2α и тогда условіе (a) примет вид: $\overline{ac} = \overline{ak} . 2\alpha = L . 2\alpha$,

[1] Длина, очевидно, будет равна l.

откуда угол поворота зеркала:

$$\alpha = \frac{\overline{ac}}{2L} \ldots\ldots\ldots (b)$$

Выше было сказано, что под вліяніем пружины ролики поворачиваются на угол α. Пусть точка касанія пружины с роликами до опыта была A (фиг. 22) а по окончаніи опыта будет B. Очевидно что длина дуги AB будет равняться перемѣщенію закрѣпленного конца пружины E, а слѣдовательно удлиненію λ, которое получает испытуемый брусок между сѣченіями xy и zt.



фиг. 22.

Если діаметр ролика назовем δ, то:

$$AB = \frac{\delta \alpha}{2} = \lambda \ldots\ldots\ldots (c)$$

Подставляя α из ур-ія (b) в (c) получим:

$$\lambda = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{ac}{2L},$$

откуда относительное удлиненіе:

$$i = \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\delta . ac}{L . l} \ldots\ldots\ldots (d)$$

При каждом отсчетѣ берут среднее из показаній обоих зеркал. Какая точность измѣренія достигается по способу Bauschinger'a можно видѣть из слѣдующаго опыта. Для желѣзнаго бруска при діаметрѣ его равном 30 m/m, $l = 150$ m/m, $L = 1600$ m/m, $\delta = 6{,}4$ m/m, $\overline{ac} = 20$ m/m

$$\lambda = \frac{6{,}4 . 20}{4 . 1600} = 0{,}02 \text{ m/m},$$

для груза $P = 1000$ klgr.

Опредѣлим теперь коэффиціент упругости. Основное ур-іе, опредѣляющее внутреннее напряженіе:

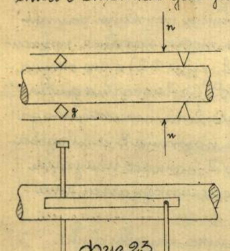
$$P = \omega . k = E . \omega . i .$$

Послѣднее ур-іе и ур-іе (d) дают величину коэффиціента упругости:

$$E = \frac{P}{\omega i} = \frac{4 . P . l . L}{\omega . \delta . ac}$$

В послѣднее время прибор Bauschinger'a измѣнен конструктивно профессором Martens.

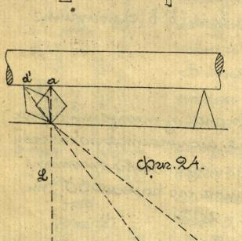
Вмѣсто роликов на оси зеркальных обойм имѣются призмочки g, g ромбическаго сѣченія (фиг. 23). Оси зеркал проходят через точки g, g. Пружины нажимают в точках n, n винтами, другими концами обхватывают призмочки и нажимают их к бруску, оси труб расположены перпендикулярно оси бруска. При такой установкѣ приборъ оказывается значительно легче и не нуждается въ стойкахъ для укрѣпленія зеркалъ. Благодаря легкости приборъ Martens'а употребляется одинаково для брусковъ горизонтальныхъ и вертикальныхъ, тогда какъ для послѣднихъ приборъ Bauschinger'а не пригоденъ вовсе. С теоретической стороны аппаратъ Martens'а долженъ давать меньшую точность, нежели зеркальный приборъ Bauschinger'а. В самомъ дѣлѣ какъ видно изъ схемы (фиг. 24) при удлиненіи $\lambda = aa'$ большая діагональ ромба отклоняется на $\angle\alpha$. На тотъ же $\angle$ повернется и зеркало, отсчетъ по шкалѣ будетъ:



фиг. 23.

$$\delta = mn = 2L\,tg\,2\alpha,$$

но съ другой стороны $\lambda = D\sin\alpha$, если D — длина большой діагонали. Изъ отношенія



фиг. 24.

$$\frac{\lambda}{\delta} = \frac{D\sin\alpha}{L\,tg\,2\alpha}$$

пренебрегая тригонометрическими значеніями угла, получаемъ приблизительно:

$$\frac{\lambda}{\delta} = \frac{D.\alpha}{L.tg\,2\alpha}$$

Ошибка въ процентахъ, благодаря оказанному допущенію, будетъ

$$z = \frac{D}{L}\left\{\frac{\sin\alpha}{tg\,2\alpha} - \frac{1}{2}\right\}100 : \frac{D\sin\alpha}{L\,tg\,2\alpha}$$

Составляя таблицу для 1-15 имѣемъ:

α	1	2	3	4	5	10	15
$\frac{\sin\alpha}{tg\,2\alpha}$	0.49977	0.49909	0.49793	0.49637	0.49431	0.47710	0.44829
Ошибка	0.046	0.16	0.405	0.73	1.15	4,8	11,54

Для прибора Bauschinger'а имѣемъ $\frac{\lambda}{\delta} = \frac{d.\alpha}{2L\,tg\,2\alpha}$, гдѣ d — діаметръ ролика, или приблизительно:

$$\frac{\lambda}{\delta} = \frac{d}{4L}$$

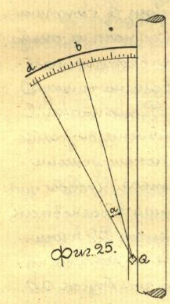
Ошибка въ процентахъ выразится какъ:

$$\frac{\frac{d}{2L}\left\{\frac{\alpha}{tg\,2\alpha} - \frac{1}{2}\right\}}{\frac{d}{2L}\cdot\frac{\alpha}{tg\,2\alpha}}100$$

и будетъ:

Значеніе α	1	2	3	4	5	10	15
$\frac{\alpha}{tg\,2\alpha}$	0.49979	0.4991	0.4980	0.4967	0.4940	0.4795	0.4530
Ошибка	0.044	0.14	0.40	0.66	1.03	4.27	10,3%

Какъ видно изъ этихъ таблицъ точность прибора Bauschinger'а превышаетъ таковую же аппарата Martens'а, но разница столь мала, что есть основаніе предпочитать послѣдній. На фиг. 25 указано расположеніе прибора Kennedy, дающаго достаточно правильный отсчетъ, если не требуется очень большая точность. При вращеніи ромбической призмочки около ребра, стрѣлка ab перемѣщается по дугѣ, укрѣпленной на пружинѣ. Если ось вращенія стрѣлки пройдетъ черезъ точку a, то при поворотѣ призмы на уголъ α, стрѣлка повернется на тотъ же уголъ и опишетъ дугу $bd = l.\alpha$, если l длина стрѣлки.



фиг. 25.

Называя діагональ ромба черезъ D, получимъ перемѣщеніе δ точки a,

$$\delta = D.\sin\alpha = D\sin\frac{bd}{l}.$$

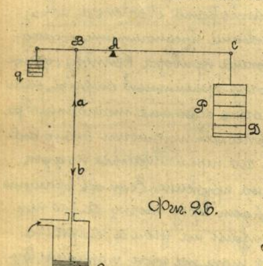
Нѣкоторые приборы для производства опытовъ на растяженіе.

Изслѣдованіе надъ брусками малыхъ поперечныхъ сѣченій могутъ быть производимы помощью груза, непосредственно къ нимъ подвѣшеннаго, какъ это имѣло мѣсто въ опытахъ Wertheim'а и др. При необходимости же этимъ способомъ разорвать бруски значительныхъ поперечныхъ сѣченій, потребовались бы очень большіе грузы, обращаться съ которыми представляется весьма неудобнымъ. Напр., для разрыва бруска литой стали, имѣющаго въ сѣченіи 1 кв. дм., нужно подвѣсить къ нему до 1875 пуд. груза*) Чтобы избѣжать это, приходится отказаться отъ простыхъ пріемовъ, указанныхъ выше. В настоящее время для развитія большихъ усилій помощью малыхъ грузовъ пользуются рычагами, которые передаютъ дѣйствіе гру-

*) Считая разрывнымъ напряженіемъ $K_z = 5000$ клгр. на $^{m}/_{m^2}$

за на брусок, увеличивая послѣднее в нѣсколько раз, в зависимости от отношенія плеч рычагов.

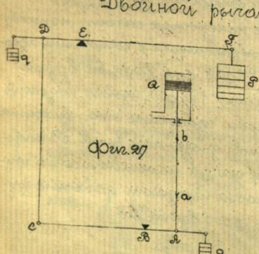
На фиг. 26 изображен такой прибор с одним рычагом: А — точка вращенія его, в В прикрѣпляется растягиваемый брусок ab; на другой конец котораго дѣйствует растягивающая сила. В частном случаѣ, изображенном на фиг. 26, растягивающее усиліе развивается давленіем жидкости на поршень Q, могущій двигаться в цилиндрѣ S. Груз q служит для приведенія до начала опыта главнаго рычага в горизонтальное положеніе. Если на чашку D положить груз P, то точка C получает стремленіе опуститься, а поршень с испытуемым бруском — подняться. Чтобы удержать всю систему в равновѣсіи, слѣдовательно рычаг BC в горизонтальном положеніи, производят давленіе на поршень, накачивая в цилиндр S воду или глицерин, причем брусок ab растягивается. Измѣняя P и удерживая постоянно прибор в равновѣсіи, можно прослѣдить все явленіе растяженія.



Фиг. 26.

Груз P, подвѣшенный на концѣ рычага C, растягивает брусок ab с силой $Q = P\frac{AC}{AB}$, причем отношеніе плеч AC:AB доходит до 500 (машина Werder)

Двойной рычажный прибор.



Фиг. 27

В этом приборѣ (фиг. 27) имѣется два рычага ABC и DEF, точка вращенія их суть B и E, рычаги соединены между собой тягой CD. Растягиваемый брусок ab одним концом прикрѣплен к нижнему рычагу в A, другой же конец бруска соединен с поршнем насоса Q. Уравновѣшивающіе грузы суть q и q.

Работа производится так же, как и в предыдущем приборѣ. Груз P, подвѣшенный на концѣ F верхняго рычага, передается на испытуемый брусок и растягивает его с силой

$$Q = P\frac{BC}{AB}\cdot\frac{EF}{DE}$$

Взявши, напр., отношеніе плеч верхняго рычага = 20, а нижняго = 5, получим $Q = 100P$

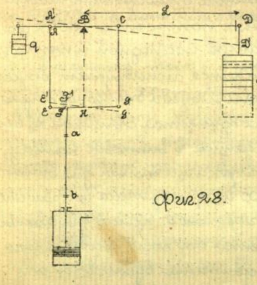
Между прочим, по подобной схемѣ устроен прибор Михаэлиса для разрыва цементных образцов.

Иногда устраивают такие приборы с 3–4 рычагами. Примѣром может служить разрывная машина, устроенная D. Adamson; наибольшая разрывная сила прибора 100 тонн. В ней имѣются 4 рычага с отношеніем плеч: 10, 10, 12, 12,5. Т. обр. груз, приложенный на концѣ послѣдняго рычага передается на растягиваемый брусок, увеличиваясь в

10.10.12.12,5 = 1500 раз.

Дифференціальный рычаг.

При обыкновенном устройствѣ рычагов приходится для полученія значительнаго увеличенія силы или ставить нѣсколько рычагов или примѣнять очень длинные рычаги. Но есть конструкція особого рода, при которой сравнительно короткіе рычаги дают весьма значительное увеличеніе силы. Схема расположенія указана на фиг. 28. ABCD — главный рычаг прибора, качающійся около точки B; на концѣ D вѣшается чашка с грузами. В точках A и C, находящихся на равных разстояніях от опоры B, к главному рычагу подвѣшен нижній короткій неравноплечій EG, равный части ABC рычага ABCD. Растягиваемый брусок ab одним концом соединен с точкой F, а другой конец его закрѣплен на штокѣ поршня или вообще связан с механизмом, помощью котораго производится растяженіе. Груз P, повѣшенный на концѣ главнаго рычага, наклоняет оба рычага как показано на фиг. 28. Т. к. плечо EF < FH,



Фиг. 28.

то верхній конецъ растягиваемаго бруска получаетъ при этомъ перемѣщеніе FF', т. е. брусокъ растягивается. Отношеніе между силой Q, растягивающей брусокъ и грузомъ P, получается изъ разсмотрѣнія условія равновѣсія нашего механизма. Примѣняя начало возможныхъ перемѣщеній, найдемъ, что сумма работъ силъ P и Q для перемѣщеній FF' и DD' получающихся при весьма маломъ наклоненіи рычаговъ, должна быть равна 0 т. е.

$$P \cdot DD' - Q \cdot FF' = 0 \quad \text{или} \quad \frac{Q}{P} = \frac{DD'}{FF'}$$

Но изъ прямоугольныхъ Δ-овъ BDD' и FHF' (эти Δ-ки какъ съ паралл. сторонами, подобны) имѣемъ:

$$\frac{DD'}{FF'} = \frac{BD}{HF}$$

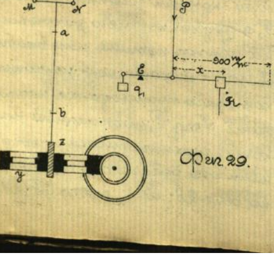
Называя длину плечъ EF и EH нижняго рычага черезъ n и m, получимъ:

$$HF = HE - FE = \frac{m+n}{2} - n = \frac{m-n}{2}$$

Такимъ образомъ, если длинное плечо главнаго рычага BD назовемъ черезъ L, то найдемъ:

$$\frac{Q}{P} = \frac{BD}{HF} = \frac{2L}{m-n}$$

Слѣдовательно, увеличеніе силы, доставляемое описаннымъ приборомъ, равно $\frac{2L}{m-n}$ и дѣлая разность $(m-n)$ весьма малой, можно получить очень значительное отношеніе между Q и P при небольшой длинѣ рычага ABC. Какъ примѣръ прибора, основаннаго на принципѣ дифференціальнаго рычага, можно привести машину Moor и Federhaff. Этотъ приборъ схематически изображенъ на фиг. 29 и состоитъ изъ рычага AC, качающагося около точки O. Въ точкахъ A и B несимметрично расположенныхъ относительно точки касанія, подвѣшена на стержняхъ поперечина MN, къ серединѣ послѣдней и прикрѣпляется испытуемый брусокъ ab. Другой же конецъ бруска соединяется съ винтомъ x, входящимъ въ винтовое колесо y, служащее гайкой для винта x и приводящееся во вращеніе червякомъ z. Колесо y удерживается отъ поступательнаго движенія вдоль своей оси



Фиг. 29.

а потому при вращеніи заставляетъ перемѣщаться винтъ x. Въ точкѣ C посредствомъ тяги CD къ рычагу ABC подвѣшенъ другой рычагъ EDF, качающійся около точки E. Грузъ R можетъ передвигаться по этому рычагу причемъ увеличивается или уменьшается плечо x.

Пусть брусокъ растягивается силой въ Q klgr. и т. к. онъ подвѣшенъ къ серединѣ рычага MN, то въ точкахъ A и B будутъ приложены силы $= \frac{Q}{2}$ и моментъ, вращающій рычагъ ABC въ сторону обратную движенію часовой стрѣлки, будетъ равенъ:

$$\frac{Q}{2} \cdot 75 - \frac{Q}{2} \cdot 70 = \frac{Q}{2}(75-70) = \frac{5}{2} Q .$$

Приложимъ въ точкѣ C силу P, которая уравновѣшивала бы силу Q, тогда

$$\frac{5}{2} Q = 100 P, \text{ откуда } Q = \frac{2 \cdot 100}{5} P = 400 P \quad \ldots\ldots (a)$$

Въ дѣйствительности брусокъ растягивается не силой P, а грузомъ R, находящимся на рычагѣ EDF на разстояніи x отъ точки D. Сила P и грузъ R связаны между собою условіемъ равновѣсія. $100 P = R(x+100)$ 1);

откуда $$P = R\frac{x+100}{100};$$

сравнивая съ (a), имѣемъ:

$$P = R\frac{x+100}{100} = \frac{1}{400} Q ,$$

или сила растягивающая брусокъ

$$Q = 4R(x+100) \quad \ldots\ldots (b)$$

Предположимъ, что $R = 5$ klgr., тогда (b) даетъ:

$$Q = 20(x+100).$$

Грузъ R можетъ передвигаться по рычагу EF и т. к. длина рычага $= 1000$ m/m, то наибольшее значеніе для x будетъ равно 900 m/m, а вмѣстѣ съ тѣмъ и

$$Q_{max} = 20 \cdot 1000 = 20000 \text{ klgr.},$$

т. е. въ машинѣ Moor и Federhaff грузъ въ 5 klgr. можетъ уравновѣсить грузъ въ 20000 klgr. 2)

Удобство этой машины состоитъ между прочимъ въ томъ, что здѣсь грузъ R передвигается по рычагу ED, а потому нагрузка можетъ происходить плавно, почему при этой машинѣ возможно употреблять автоматическіе приборы для записыванія діаграммъ удлиненій.

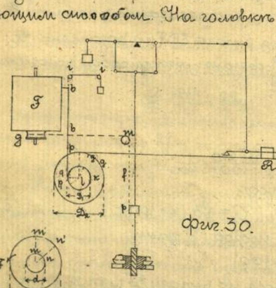
Прежде чѣмъ перейти къ описанію автографическаго при-

1) Ибо длина $EF = 1000$ m/m или $ED = 100$ m/m.

2) Указанные размѣры относятся къ двадцати-тонной машинѣ.

бора замѣтимъ, что при небольшой длинѣ испытуемыхъ брусковъ, упругія удлиненія бываютъ очень незначительны, поэтому приходится брать, при составленіи діаграммы масштабъ для удлиненій по возможности крупный. С другой стороны перемѣщеніе груза, которое откладывается по оси ординатъ (ибо величина нагрузки пропорціональна этому перемѣщенію), само по себѣ очень значительно, поэтому, чтобы діаграмма не получалась слишкомъ большихъ размѣровъ, для ординатъ приходится брать масштабъ меньше.

Так. обр., от автографическаго прибора требуется, чтобы он в одно и то же время вычерчивал в увеличенномъ видѣ удлиненія и в уменьшенном — перемѣщенія груза. В самопишущем приборѣ машины Мооr это достигается слѣдующим способом. На головкѣ F винта x (фиг. 30) укрѣпляется конец шнура f, перекинутаго через блок m и идущаго к барабану F, гдѣ этот шнур наматывается на колесо g меньшаго діаметра, нежели барабан F. При удлиненіи бруска головка винта опускается и барабан повернется на угол α, причем длина дуги mn будет равна удлиненію испытуемаго бруска. В то же время барабан F повернется на тот же угол α, но дуга соотвѣтственная его поверхности m_1n_1 будет больше дуги mn и во столько раз во сколько $d_1 > d$; $m_1n_1 : mn = d_1 : d$.



Фиг. 30.

Так. обр. может быть получен любой масштаб для откладыванія удлиненій. Чтобы вычертить измѣненіе нагрузки, к карандашу b прикрѣпляется посредством шнура, перекинутаго через блок i, груз g, стремящійся всегда поднять карандаш кверху. Ко второму концу карандаша прикрѣпляется нить, наматывающаяся на валик b, на оси котораго насажен шкив k. На послѣдній наматывается нить, идущая от груза R. Предположим теперь, что груз R передвинулся по направленію стрѣлки на величину b,

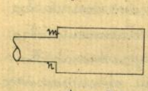
тогда шкив k повернется на нѣкоторый угол β, причем описанная дуга будет равна pq. В то же время валик b повернется на тот же угол, но пройденная дуга p_1q_1 по его окружности будет меньше pq в отношеніи $pq : p_1q_1 = D_2 : D_1$. Результатом вращенія шкива при перемѣщеніи груза R является подъем карандаша на высоту $h = p_1q_1$. Совмѣстным движеніем барабана F и карандаша b вычерчивается діаграмма удлиненій. Подобным образом может быть приспособлен автографическій аппарат ко всѣм машинам, имѣющим совершенно плавное увеличеніе нагрузки. Нѣкоторыя машины нагружаются постепенным прибавленіем грузов. К таким относятся машины Мартенса, Вердера и др.

Форма испытуемаго бруска.

Раньше было указано, что в мѣстѣ приложенія силы к бруску на его поверхности вызывается смятіе матеріала — деформація, не имѣющая ничего общаго с разсматриваемым нами явленіем растяженія. Чтобы указанное мѣстное явленіе не оказало вліяніе на ход испытанія, обыкновенно мѣсто закрѣпленія бруска дѣлают значительно массивнѣе. Желая гарантировать себѣ мѣсто разрушенія не около мѣста зажима, необходимо, чтобы переход от послѣдняго к нормальным размѣрам совершался плавно. Для этого концы призматических брусков обдѣлывают в головки (фиг. 31), к которым собственно и прикладываются тѣм или иным способом растягивающія усилія. Переход от утолщенной

Фиг. 31.

части головки к стержню должен быть плавным, что достигается в плоских брусках (фиг. 31) закругленіями, а в круглых — образованіем конических частей между стержнем и головками. Разсчетная длина $AB = l$ намѣчается только на призматической части с таким разсчетом, чтобы стченіе A и B отстояли от начала перехода в головку на нѣкоторое разстояніе. Необходимость плавных переходов объясняется желаніем имѣть разрывное сѣченіе гдѣ либо между сѣченіями A и B. Если переход сдѣлать под углом (фиг. 32), то можно почти с увѣренностью сказать, что разрушение произойдет по mn, т. е. под головкой бруска.



Фиг. 32.

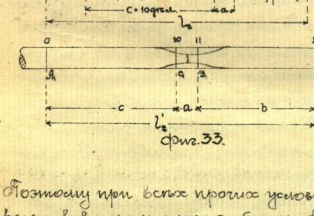
Ввиду весьма важного значения лабораторного изслѣдованія металлов желательно, чтобы образцам придавалась опредѣленная форма. При соблюдении этого условія значительно облегчается возможность сравненія результатов получаемых в разных лабораторіях. Дѣйствительно, хотя теоретически длина бруска и форма поперечного сѣченія не вліяют на сопротивляемость его растягивающим усиліям, равно как и на относительное удлинение, но в дѣйствительности это не так. Всѣ обстоятельства, препятствующія образованію горловины или шейки должны имѣть слѣдствіем увеличеніе сопротивляемости и уменьшеніе пластичности. Т. напр., два круглых бруска формы изображенной на (фиг. 31) с діаметром в 30 m/m и длиною в 300 m/m, другой в 30 m/m дадут результаты различные. А именно в коротком брускѣ вліяніе головок (захватов) скажется в том, что образованіе шейки будет затруднено, а потому сопротивленіе при разрывѣ окажется нѣсколько больше. Как увидим ниже, при изложеніи закона подобія, два бруска подвергаются одинаковым напряженіям, если растягивающія их силы пропорціональны квадратам сходственных сторон. На этом основаніи международное общество испытанія матеріалов принимает за норму цилиндрическій брусок с діаметром в 20 m/m и длиною в 200 m/m. Установлено, что для бруска с діаметром в d m/m длина найдется из соотношенія:

$$l^2 : 200^2 = \tfrac{1}{4}\pi d^2 : \tfrac{1}{4}\pi 20^2 = P : P_0 \,,$$

откуда $$l = 11{,}3\sqrt{\tfrac{1}{4}\pi d^2} = 11{,}3\sqrt{\omega}$$

Что касается брусков плоских, т. е. с прямоугольным сѣченіем, то здѣсь задать заранѣе отношение между длиною и поперечными размѣрами нельзя, ибо весьма часто

толщина бруска опредѣляется толщиною листа, из котораго образец вырѣзан. Если принять за нормальный брусок с размѣрами 10×30×300, тогда имѣем: $l^2 : l_0^2 = \delta^2 b^2 : \delta_0^2 b_0^2$ и $l = 17{,}3\sqrt{\omega}$, гдѣ $\delta : b = 1:3$. Здѣсь δ и b толщина и ширина бруска. Обычно указанных соотношений для плоских брусков не придерживаются, ибо требовать, чтобы ширина превосходила толщину в 3 раза, сплошь и рядом, невозможно по мѣстным условіям. Кромѣ того при большой толщинѣ (напр. 15 - 20 m/m) поперечное сѣчение получается весьма значительным и для разрыва требуется (особенно для стали) очень сильная машина. Разрыв бруска может происходить иногда и за предѣлами, отмѣченными для испытанія длины. В этом случаѣ результаты для матеріалов пластичных, дающих большія остающіяся деформаціи не пригодны. В таких случаях, когда разрыв (а слѣдовательно и шейка) приходится близко к одной из крайних мѣток, непосредственное измѣреніе длины между крайними мѣтками, также дает неправильный результат. В самом дѣлѣ, пусть разрыв (фиг. 33) произошел в сѣченіи C, ближе к правой мѣткѣ B; не трудно видѣть, что элементы лежащіе у мѣтки A, вытянулись значительно меньше нежели у мѣтки B. Если бы разрыв имѣл мѣсто посрединѣ бруска, то конечно, при большей или меньшей однородности, вытяжка элементов равноудаленных от середины (т. е. от мѣста разрушенія) была бы одинакова.

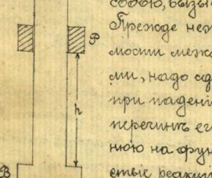


Фиг. 33.

Поэтому при всѣх прочих условіях полная длина при разрывѣ во втором случаѣ будет больше нежели в первом. Ввиду того, что вполнѣ гарантировать мѣсто разрушенія на серединѣ бруска нельзя, примѣняют слѣдующій пріем, позволяющій и при разрушеніи бруска не посрединѣ длины, получать истинное увеличение длины, которое имѣл бы мѣсто при правильномъ положенiи разрывного сѣченiя. Для этого длину испытуемую AB дѣлят на 20 равныхъ частей.[1] Пусть разрушенiе произошло между мѣтками 14-15; измѣряют длины: a дѣленiя 14-15, b дѣленiя 5-14 и c дѣленiя 4-14. Затѣм накладывают эти длины в таком порядкѣ: $A_1C_1 = c$ (или b), $C_1D_1 = a$ и $D_1A_1 = b$ (или c). Таким обр. получается длина $A_1B_1 = a + b + c = l_2'$, которую имѣл бы брусок, если бы разрушенiе имѣло мѣсто между 10-11 или 9-10 дѣленiями. Нетрудно видѣть, что полученная т. обр. длина $A_1B_1 > \overline{AB}$.

Динамическое дѣйствiе растягивающей силы.

Наглядно это можно представить себѣ так: груз в формѣ кольца, обхватывающаго собою брусок, подымают от конца его B (фиг. 34) на нѣкоторую высоту h. Падая с этой высоты, груз встрѣчает укрѣпленную на брускѣ поперечину B и, ударяясь, так сказать, увлекает ее с собою, вызывает растяженiе бруска.



Фиг. 34.

Прежде нежели перейти к опредѣленiю зависимости между внѣшними и внутренними силами, надо сдѣлать слѣдующую оговорку. Удар при паденiи груза передается через брусок к поперечинѣ его поддерживающей, а через послѣднюю на фундамент. Кромѣ того сам груз, вслѣдствiе реакцiи со стороны бруска, получает извѣстную деформацiю. Т. обр. живая сила, которою обладает груз, в момент соприкосновенiя с поперечиной B, расходуется не только на преодолѣнiе внутренних напряженiй матерiала бруска, но также матерiала груза, рамы, фундамента и т. д. Явленiе получается весьма сложное и для анализа его необходимо упростить слѣдующими путями. Во 1), при грузѣ сравнительно небольшом и сдѣланном из весьма упругаго матерiала, потеря на деформацiю груза будет ничтожна, во 2), если рама к которой прикрѣплен груз и фундамент будут весьма велики сравнительно с размѣрами бруска, то напряженiе, а слѣдовательно, деформацiи в них можно довести до ничтожно малых значенiй и ими можно пренебречь. Предполагая, что указанныя об-

[1] При нормальной длинѣ в 200 м/м цѣна каждаго дѣленiя 1 м/м.

стоятельства соблюдены и, что кромѣ того, это явленiе происходит в предѣлах упругости, будем искать зависимость между дѣйствующими силами и деформацiями. С момента соприкосновенiя груза с опорой B начинается удлиненiе бруска, которое возрастает вмѣстѣ с перемѣщенiем конца B, а вмѣстѣ с ним возрастает напряженiе. Если груз P вытянет брусок на величину λ, то работа силы вѣса будет:

$$T = P(h + \lambda_1).$$

Если пренебречь указанными выше потерями, а также сопротивленiем воздуха при паденiи груза, то эта работа может быть компенсирована только работой внутренних сил T_k, т. е. должно существовать равенство:

$$P(h + \lambda_1) = T \quad \ldots\ldots\ldots (a)$$

Пусть наибольшее напряженiе внутренних сил при удлиненiи бруска на величину λ_1 будет k_1, тогда на основанiи (4) получим:

$$T_k = W\frac{k_1^2}{2E}, \text{ гдѣ } W = \omega l \text{ – есть объем бруска.}$$

Слѣдовательно имѣем: $P(h + \lambda_1) = \omega l \frac{k_1^2}{2E}$,

но из $k_1 = E\frac{\lambda}{l}$ имѣем: $\frac{\omega l k_1^2}{2E} = \frac{\omega E \lambda_1^2}{2l} \quad \ldots\ldots (b)$

Пользуясь выраженiями (a) и (b) получим:

$$Ph + P\lambda_1 - \omega\frac{E\lambda_1^2}{2l} = 0, \text{ откуда } \lambda_1^2 - 2\lambda_1\frac{Pl}{E\omega} - 2h\frac{Pl}{E\omega} = 0$$

Как не трудно видѣть множитель $Pl : E\omega$ представляет собою ничто иное как удлиненiе λ_0,[1] которое тот же груз P вызывает в данном брускѣ, дѣйствуя статически. Поэтому окончательно получается:

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \sqrt{\lambda_0^2 + 2\lambda_0 h} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

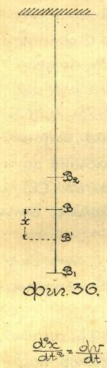
знак (–) отбрасывается как неимѣющiй смысла.

Послѣдняя формула указывает, что деформацiя вызываемая ударным дѣйствiем силы, значительно больше нежели деформацiя, получаемая при статическом положенiи ея. В частном (имѣющем наибольшее значенiе в практикѣ) случаѣ, когда $h = 0$, т. е. когда сила прилагается внезапно без паденiя груза $\lambda_1 = 2\lambda_0$.

Т. к. напряженiе внутренних сил до предѣла упругости пропорцiонально деформацiям, то и k_1 при ударном дѣйствiи силы будет значительно больше, нежели k_0 при плавном приложенiи силы.

[1] ибо при статическом дѣйствiи силы $P = E\omega\frac{\lambda_0}{l}$

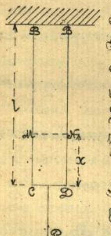
Скорость движенія груза с момента растяженія бруска падает и при достиженіи удлиненія λ_1, обращается в нуль. Но равновѣсія системы в этом конечном положеніи быть не может, т.к. внутренния силы достигают величины $\omega k_1 = \omega \frac{\lambda_1}{l} E$, значительно большей, нежели груз P, величина котораго:
$$P = \omega k = \omega \frac{\lambda_0}{l} E.$$
Внутренния силы направлены противоположно направленію P, почему по достиженіи грузом наинисшаго положенія, начинается перемѣщеніе конца B обратно, т.е. брусок сокращается. Явленіе послѣ момента сокращенія бруска до своей первоначальной длины зависит от того, лежит ли груз P на платформѣ (поперечинѣ) свободно или с послѣдней связан. Хотя представить себѣ, что груз в моменты соприкосновенія с поперечиной при паденіи вниз может придти в постоянную связь с ней, весьма трудно, тѣм не менѣе допустим для общности вопроса такой случай. Тогда очевидно, что по достиженіи бруском бруска B положенія B (т.е. $\lambda_1 = 0$) не может существовать равновѣсія между внутренними и внѣшними силами. В самом дѣлѣ, напряженіе матеріала будет $k = 0$, ибо удлиненіе исчезло. Внѣшней силой является сила инерціи груза, т.к. он в положеніи B обладает скоростью v. Опредѣлим её из ур-ія живых сил, найдем:
$$\frac{mv^2}{2} = W\frac{k_1^2}{2E} - P\lambda_1$$
Внося сюда значеніе λ_1 из (5), получим $v = \sqrt{2gh}$.
Слѣдовательно груз обладает скоростью равной скорости в момент удара, но направленной вверх. Если бы груз лежал на поперечинѣ свободно, то он должен, отдѣлившись от нея, подняться на высоту h, конец бруска остается неподвижным в B и явленіе повторяется цѣликом снова. Т. обр. конец B совершает движеніе BB_1 и обратно.
Иначе будет происходить явленіе в случаѣ когда груз неизмѣнно связан с поперечиной. Под вліяніем инерціи груз начнет сжимать брусок и сѣченіе B будет перемѣщаться вверх. Не трудно найти величину сжатія. Напишем ур-іе движенія груза P. Назовем вообще перемѣщеніе конца B через x, имѣем: (фиг. 36)
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma P,$$


Фиг. 36.

гдѣ m — масса груза, ΣP сумма всѣх внѣшних и внутренних сил. Для положенія B', ΣP будет очевидно равна разности между вѣсом груза P и сопротивленіем стержня. Не трудно видѣть, что напряженіе k' матеріала при удлиненіи $BB' = x$ будет: $k' = E\frac{x_1}{l}$
и слѣдовательно $\omega k' = \frac{\omega E x_1}{l}$.
Если при статическом дѣйствіи груза, им вызывается удлиненіе λ_0, то имѣем:
$\omega k = P = \frac{\omega \lambda_0 E}{l}$, очевидно $\frac{k'}{k} = \frac{x}{\lambda_0}$, а потому $k' = \frac{kx}{\lambda_0}$ и
$$\Sigma P = P - \omega k' = P - P\frac{x}{\lambda_0}$$
Так как $P = mg$, то ур-іе движенія напишется так:
$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\left(1 - \frac{x}{\lambda_0}\right) = \frac{g}{\lambda_0}(\lambda_0 - x).$$
Но так как $\frac{dx}{dt} = v$, то можно написать:
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = \frac{g}{\lambda_0}(\lambda_0 - x) \quad \text{или}$$
$$v\,dv = g/\lambda_0\,(\lambda_0 - x)\,dx.$$
Интегрируя это выраженіе получим:
$$\frac{v^2}{2} = \frac{g}{\lambda_0}\left(\lambda_0 x - \frac{x^2}{2}\right) + C$$
откуда $C = \frac{v_0^2}{2}$, а потому окончательно получим:
$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = g/\lambda_0\left(\lambda_0 x - \frac{x^2}{2}\right)$$
Так как $v_0 = \sqrt{2gh}$, то для положенія B_1 и B_2, когда конечная скорость равна нулю, найдем: $x = \lambda_0 \pm \sqrt{\lambda_0^2 + 2\lambda_0 h}$.
Мы приходим таким образом к выраженію (5), что и надо было доказать. Полученная зависимость ясно указывает, что движеніе конца стержня B будет колебательное и центр колебанія опредѣлится как среднее между $x_1 = \lambda + \sqrt{\lambda_0^2 + 2\lambda_0 h}$ и $x_2 = \lambda_0 - \sqrt{\lambda_0^2 + 2\lambda_0 h}$, а именно он будет на разстояніи от точки B равном $x = 1/2\,(x_1 + x_2) = \lambda_0$. Конечно, как в случаѣ свободно лежащаго груза, так и разсмотрѣннаго нами связаннаго колебательнаго движенія, которое теоретически должно продолжаться неограниченно долго, в дѣйствительности мало-по-малу уменьшает свою амплитуду, что объясняется внутренним треніем между частицами, сопротивленіем воздуха и т.д.

Вліяніе собственнаго вѣса бруска на величину внутренних сил.

Собственный вѣс бруска в случаѣ его вертикальнаго положения, очевидно, должен вызвать в матеріалѣ тоже нѣкоторое напряженіе[1] растяженія. Но величина его и соотвѣтственная деформація становятся замѣтными лишь при значительной длинѣ. Возьмем нѣкоторое сѣченіе MN на разстояніи x (фиг. 37) от нижняго сѣченія CD. Очевидно в пл-сти MN появляются напряженія, вызываемыя двумя силами: 1) растягивающей силой P и 2) силой вѣса G_x, части бруска MNCD, и если вѣс единицы объема $= \delta$, то сумма внѣшних сил:



фиг. 37.

$$P + G_x = P + \omega x \delta.$$

Эта сумма должна быть равна суммѣ внутренних сил сѣченія MN: $\omega k = P + \omega \delta$ откуда

$$k = \frac{P}{\omega} + x\delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Пока вѣс бруска не принимался во вниманіе, внутреннее напряженіе было величиной постоянной для всѣх сѣченій, ибо при $\delta = 0$ имѣем:

$$k = \frac{P}{\omega} = \text{Const}.$$

Из (6) видно, что в разсматриваемом случаѣ k является нѣкоторой функціей перемѣннаго x (разстояніе даннаго сѣченія от нижняго сѣченія CD), и очевидно k_{min} будет при $x = 0$, т.е. для сѣченія CD, а именно: $k_{min} = \frac{P}{\omega}$, $k_{max.} = \frac{P}{\omega} + l\delta$. Так. обр. максимальное внутреннее напряженіе будет для сѣченія AB, почему это сѣченіе называется опасным.

Запас прочности, разсчет брусков.

На основаніи вышеизложеннаго можно рѣшить вопрос, какіе разм-ры необходимо придать бруску, чтобы он прочно сопротивлялся бы внѣшней растягивающей силѣ P. Механическое изслѣдованіе свойств матеріала обыкновенно имѣет в результатѣ слѣдующія данныя, k_1, i_1 — напряженіе и относительная деформація при достиженіи предѣла упругости, k_2 — напряженіе при наибольшей растягивающей силѣ, i_2 — деформація при разрывѣ и E — модуль упругости. Так как длина бруска, при не особенно большой ея величинѣ не играет замѣтной роли, то необходимо опредѣлить лишь

[1] Если растягиваемый брусок лежит горизонтально, то собственный вѣс, ... ниже, происходит изгиб.

поперечный размѣр его, т.е. площадь поперечнаго сѣченія. Она находится из:

$$\omega = \frac{P}{k_z} \text{ или } \omega = \frac{P}{k_z - l\delta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Вторая зависимость относится к случаю, когда необходимо принимать во вниманіе собственный вѣс. Здѣсь k_z, т.н. допустимое (безопасное) напряженіе. Говоря теоретически, величина k_z при статическом дѣйствіи силы может доходить до k_1, т.к. лишь пластическія (остающіяся) деформаціи считаются невозможными. Это понятно, т.к. появленіе пластических деформацій влечет за собою остающееся увеличеніе первоначальной длины бруска, чего в брускѣ, как части механизма или сооруженія, допустить нельзя. Но принимая во вниманіе, что в практикѣ постоянно наблюдается динамическій способ приложенія внѣшних сил и что в послѣднем случаѣ напряженія могут возрастать (равно как и деформаціи) до двойной и болѣе величины, необходимо допускать напряженіе значительно меньшее, нежели предѣл упругости.

Как наибольшее значеніе безопаснаго напряженія слѣдует считать, поэтому, половину предѣла упругости т.е.

$$k_z = \frac{k_1}{2}.$$

Т.к., напр., для сварочнаго желѣза $k_1 = 20$ клг. на $^{m}/_{m^2}$, а потому $k_z = 10$ клгр. на $^{m}/_{m^2}$. Если возможны случаи когда брусок будет подвергаться ударам, то напряженія могут достигать большаго значенія, нежели $k_z = \frac{k_1}{2}$, почему слѣдует для k_z принимать значенія меньшія половины k_1, т.е.

$$k_z < \frac{k_1}{2}$$

Для нѣкоторых матеріалов, напр. желѣза, стали, красной мѣди предѣл упругости приблизительно равен половинѣ напряженія при разрывѣ т.е.

$$k_1 \cong \frac{k_2}{2}.$$

Поэтому многіе конструкторы величину безопаснаго напряженія опредѣляют как нѣкоторую долю напряженія при разрывѣ т.е. полагают, что $k_z = \frac{k_2}{a}$, гдѣ $a > 1$. Согласно сказанному выше $a \geqq 4$. Дробь $1/a$ называют коэффиціентом безопасности, а величину a — запасом прочности. Такой практическій пріем, конечно, менѣе правилен, нежели опредѣленіе безопаснаго напряженія в зависимости от величины k_1, напряженія при предѣлѣ упругости. Но получить значеніе k_2 гораздо легче, чѣм k_1, ибо опредѣленіе послѣдней требует примѣненія деликатных приборов, которые не всегда могут оказаться под рукой. А потому во многих случаях удобнѣе пользоваться запасом прочности в зависимости от значенія k_2.

Пусть требуется опредѣлить діам. d стержня длиною в 4 m., к которому приложен груз $P = 2000$ klgr. Матеріал желѣзо. $k_1 = 19$ klgr. на m/m^2, $E = 20000$ klgr. на m/m^2. Если ударное дѣйствіе силы невозможно, то допуская четверной запас прочности, получим:

$$\omega = \frac{2000}{10} = 200 \text{ кв. } m/m$$

Принимая во вниманіе собственный вѣс[1], имѣем:

$$\omega = \frac{2000}{10 - 4000 \cdot 0.0000077} = 200{,}6\, m/m^2$$

при пятерном запасѣ:

$$\omega = \frac{2000}{8 - 4000 \cdot 0{,}0000077} = 250{,}07\, m/m^2.$$

Как видно из послѣдних цифр собственный вѣс оказывает ничтожное вліяніе при столь малой длинѣ как 4 m. Другое дѣло, если величина l будет значительна, напр. 400 m. В таком случаѣ напряженіе только от собственнаго вѣса будет $k = \frac{\omega l \delta}{\omega} = l\delta = 400000 \cdot 0{,}0000077 = 3{,}08$ klgr. m/m^2.

Для предыдущаго случая получим:

$$\omega = \frac{2000}{8 - 400000 \cdot 0{,}0000077} = \frac{2000}{4{,}92} = 406\, m/m^2.$$

Что касается деформаціи, то при напряженіи вдвое большем допускаемаго (8 klgr.) т. е. при $k = 16$ klgr. получим:

$$i = \frac{k}{E} = \frac{16}{20000} = 0.0008 \text{ или } 0.08\%$$

что при длинѣ в 4 m. даст абсолютное удлиненіе $\lambda = 3{,}20\, m/m$. Если такая вытяжка (хотя и временная) не допускается, то необходимо запас прочности увеличить. Так, полагая, что наибольшее удлиненіе не должно превосходить $1\, m/m$, то относительная деформація:

$$i = \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{4000} = 0{,}00025.$$

и наибольшее напряженіе $k = Ei = 20000 \cdot 0{,}00025 = 5{,}0$ klgr. на m/m^2 и соотвѣтственно

$$\omega = \frac{2000}{5{,}0 - 0{,}03} = 402\, m/m^2$$

Величина запаса прочности измѣняется в зависимости от степени отвѣтственности сооруженія, от степени

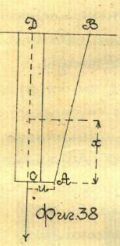
[1] Полагаем вѣс 1 куб. милл. = 0,0000077 klg.

устойчивости и т. д. Напр. допуская напряженіе 8–10 klgr. на m/m^2 при опредѣленіи потолочной желѣзной балки, полагают 4–4,5 klgr. на m/m^2 для вагонной оси, хотя послѣдняя изготовляется из мягкой стали.

Точно также малыя напряженія принимают при разсчетѣ коромысла вѣсов, чтоб избѣжать замѣтных деформацій.

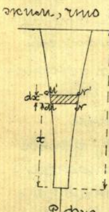
Бруски равнаго сопротивленія.

Ур-іе $k = \frac{P}{\omega} + x\delta$ показывает, что внутреннее напряженіе k измѣняется в призматическом брускѣ от нѣкотораго min., $k = \frac{P}{\omega}$ до наибольшей величины по закону прямой линіи. А именно: полагая, что величина k при $x = 0$ изображена отрѣзком AC, мы найдем, что возрастаніе напряженія выразится прямой AB (фиг. 38) Если сѣченіе в мѣстѣ закрѣпленія бруска разсчитать прочно, то очевидно, всѣ остальныя сѣченія являются слишком большими, ибо в них напряженія получаются меньше принятаго нами безопаснаго. Естественно является вопрос, нельзя ли создать такую форму, при которой матеріал эксплоатируется болѣе равномѣрно, а именно с постоянным напряженіем равным безопасному. Брусок такой формы называется бруском равнаго сопротивленія.



Фиг. 38

Постараемся опредѣлить, насколько возможно, форму этого бруска. Для этого предположим, что нам уже дан такой брусок (фиг. 39). Согласно высказанному, площади поперечнаго сѣченія в нем измѣняются по длинѣ, т. е. $\omega = f(x)$. Для сѣченія MN, отстоящаго от свободнаго конца на разстояніи x, имѣем условіе:



Фиг. 39

$$P + G_x = \omega_x k \qquad \text{(a)}$$

гдѣ G_x — вѣс бруска длиною x. Опредѣлить G_x невозможно, т. к. неизвѣстна форма бруска. Для разрѣшенія нашей задачи продиференцируем наше ур-іе по x

$$k\, d\omega_x = dG_x \qquad \text{(b)}$$

Возьмем другое сѣченіе $M'N'$ на безконечно маломъ разстояніи dx от перваго. Элементарный объем, ограниченный этими сѣченіями, можно свободно принять за призму с высотою dx и основаніем ω_x; тогда ур-іе (b) примет вид:

$$k\, d\omega_x = dG_x = \omega_x\, dx\, \delta ,$$

гдѣ δ - вѣс куб. ед. матеріала. Раздѣлить обѣ части на $k\omega_x$, имѣем:

$$\frac{d\omega_x}{\omega_x} = \frac{\delta}{k} dx$$

Общій интеграл этого ур-ія будет:

$$\int \frac{d\omega_x}{\omega_x} = \int \frac{\delta}{k} dx + C \quad \text{или} \quad \lg \omega_x = \frac{\delta}{k} x + C \quad \text{откуда}$$

$$\omega_x = e^{\frac{\delta x}{k} + C} = e^{\frac{\delta x}{k}} e^{C} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (c)$$

но e и C величины постоянныя, слѣдов. и $e^C = const = C_1$, поэтому ур-іе (c) примет вид:

$$\omega_x = C_1 e^{\frac{\delta x}{k}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d)$$

Полагая $x=0$, найдем: $C_1 = \omega_0$, т.е. произвольная постоянная C_1 представляет собою наименьшее сѣченіе даннаго бруска, испытывающее дѣйствіе только силы P, слѣдов.:

$$\omega_0 = \frac{P}{k} \quad \text{и} \; (x=0) \qquad \omega_x = \omega_0 e^{\frac{\delta x}{k}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Если $x=l$, то $\quad \omega_{max} = \omega_0 e^{\frac{\delta l}{k}} = \frac{P}{k} e^{\frac{\delta l}{k}}$

Так. обр., найдем два сѣченія нашего бруска минимальное и максимальное. Придавая x разныя значенія в предѣлах от нуля до l, можно получить ряд сѣченій, по которым и опредѣлится форма сѣченій бруска. Сравнивая брусок равнаго сопротивленія с брусками призматическими, разсчитанными для той же силы, замѣчаем, что объем бруска равнаго сопротивленія будет меньше, а слѣд. для полученія его требуется меньше матеріала. При малой длинѣ экономія в матеріалѣ, при построеніи брусков равнаго сопротивленія — ничтожна; поэтому их обыкновенно не дѣлают таковыми. За то при болѣе значительной длинѣ эта экономія весьма замѣтна.

Для иллюстраціи сказаннаго возьмем примѣр: длина шахтнаго каната $L = 200$ mt. $= 200000$ m/m, безопасная нагрузка $k = 6$ klgr., вѣс куб. ед. матеріала δ = (один куб. m/m стали) = 0,0009 gr. = 0,000009 klgr., груз растягивающій канат $P = 1500$ klgr.

1) Канат цилиндрическій простой:

$$\omega = \frac{P}{k - L\delta} = \frac{1500}{6 - 200000 \cdot 0{,}000009} = \frac{1500}{6 - 1{,}8} = 358 \; m/m^2$$

Вѣс каната $= \omega L \delta = 358 \cdot 200000 \cdot 0{,}000009 = 645$ klgr.

2) Канат формы равнаго сопротивленія:

$$\omega_0 = \frac{P}{k} = \frac{1500}{6} = 250 \; m/m^2$$

$$\omega_{max} = \omega e^{\frac{\delta L}{k}} = 250 \cdot 2{,}71828^{\frac{1{,}8}{6}} = 250 \cdot 1{,}32 = 337{,}5 \text{ кв. mm.}$$

Вѣс элементарнаго цилиндра $= \omega_x dx \delta$.

Полный вѣс каната будет

$$G = \int_0^L \omega_x dx\, \delta = \int_0^L \omega_0 e^{\frac{\delta x}{k}} \delta\, dx = k\omega_0 \left(e^{\frac{\delta L}{k}} - 1\right) = 525 \text{ klg}$$

Можно вѣс каната опредѣлить еще другим путем. Ур-іе (a) дает:

$$\omega k = P + G,$$

или $337{,}5 \cdot 6 = 1500 + G$, откуда $G = 337{,}5 \cdot 6 - 1500 = 525$ klgr.

Экономія в вѣсѣ выразится как:

$$\varphi = \frac{645 - 525}{525} 100 = 23\%$$

Если $L = 1200$ mt. то $\varphi = 100\%$, т.е. матеріала требуется вдвое меньше, чѣм при обыкновенной призматической формѣ.

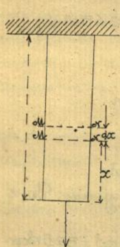
Вслѣдствіе трудности изготовленія каната в видѣ тѣла равнаго сопротивленія, обыкновенно канату придают форму среднюю между цилиндрическими простыми и теоретически правильными. А именно их дѣлают ступенчатыми (фиг. 40), причем переходы от одной ступени к другой сглаживают. Само собою понятно, что экономія в вѣсѣ такого каната будет нѣсколько меньше. Что касается вопроса о деформаціи в брусках формы равнаго сопротивленія, то не трудно видѣть, что величина полнаго удлиненія должна быть больше, нежели в призматических.

фиг. 40.

В самом дѣлѣ, пусть призматическій брусок с поперечным сѣченіем ω подвержен дѣйствію растягивающей силы P, удѣльный вѣс бруска δ. Чтобы найти полное удлиненіе, возьмем на разстояніи x (фиг. 41) от свободнаго конца два сѣченія на разстояніи dx друг от друга. Деформацію на участкѣ dx назовем $d\lambda$. Не трудно видѣть, что

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{k}{E} = \frac{P}{\omega E} + \frac{x\delta}{E}$$

Интегрируя это выраженіе в предѣлах от 0 до l, найдем:



фиг. 41.

$$\lambda_1 = \frac{P l}{\omega E} + \frac{l^2 \delta}{2E} \quad \ldots\ldots (9)$$

Пусть имѣется брусок формы тѣла равнаго сопротивленія при условіи, что постоянное напряженіе k равно напряженію в опасном сѣченіи призматическаго бруска. Т. к. напряженіе $k = const.$ по всей длинѣ бруска, то относительная деформація i - также величина постоянная, т. е.

$$i = \frac{k}{E} = const.$$

Поэтому полное удлиненіе бруска будет =

$$\lambda = \frac{l k}{E} \quad \ldots\ldots (10)$$

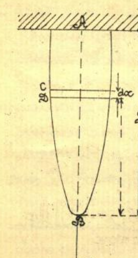
Сравнивая выраженія (9) и (10), замѣчаем, что $\lambda_1 > \lambda$. В самом дѣлѣ, из (9) при помощи (6), (полагая в (6) $x = l$) получим: $\lambda_1 = \frac{l}{E}(k - l\delta) + \frac{l^2\delta}{2E} = \frac{l}{E}\left\{k - \frac{l\delta}{2}\right\}$, а потому $\lambda_1 - \lambda = \frac{l}{E}\left\{k - k + \frac{l\delta}{2}\right\} = \frac{l^2\delta}{2E}$.

Величина l конечно не может быть безпредѣльна, т. к. с увеличеніем длины возрастает напряженіе от собственнаго вѣса. Не трудно найти для бруска призматическаго длину, при которой брусок разрушается от собственнаго вѣса, т. н. длину критическую. Из (6) имѣем при $x = l$ и $P = 0$, $k = l\delta$, откуда критическая длина найдется как:

$$l = \frac{k}{\delta}$$

Напр., для желѣза при среднем значеніи $k = 40$ klgr. на mm² и $\delta = 7700$ klgr. в 1 куб. met., получим $l = 5200$ m.

В случаѣ, если брусок имѣет по длинѣ не одно-образное сѣченіе, то деформація опредѣляется слѣдующим образом. Пусть (фиг. 42) прямолинейный стержень с произвольной формой поперечнаго сѣченія подвержен дѣйствію растягивающей силы P. Возьмем два сѣченія: D на разстояніи x от конца B и C на dx от сѣченія D. На длинѣ dx брусок можно разсматривать как призматическій. Удлиненіе обозначим через $d\lambda$, тогда относительная деформація очевидно будет величиной перемѣнной и выразится



фиг. 42

как $i_x = d\lambda : dx$. Называя сѣченіе D через ω_x, найдем что соотвѣтственное напряженіе будет $k_x = P : \omega_x$, а потому на основаніи закона Гука, получим $i_x = k_x : E = d\lambda : dx = P : E\omega_x$, откуда

$$\lambda = \int_0^L \frac{P\,dx}{E.\omega_x}$$

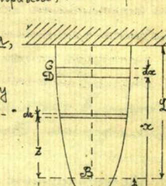
Интегрированіе можно произвести, когда будет извѣстна зависимость $\omega_x = f(x)$, т. е.

$$\lambda = \int_0^L \frac{P\,dx}{E\,f(x)}$$

Напр., пусть сѣченіе будет круг с перемѣнным радіусом y, тогда получим тѣло вращенія; если меридіальная кривая выражается параболой, т. е. если будем имѣть зависимость $y^2 = 2px$, гдѣ p — параметр, то $\omega_x = \pi y^2 = 2\pi p x$ и полное удлиненіе найдется как:

$$\lambda = \int_0^L \frac{P\,dx}{E\pi y^2} = \int_0^L \frac{P\,dx}{2p\pi x E} = \frac{P}{2p\pi E} \lg \frac{L}{0} = \infty$$

Такой результат указывает на нѣкоторую неправильность допущенную при рѣшеніи задачи. Дѣйствительно, при сдѣланных предположеніях, концевое сѣченіе B имѣет площадь $\omega_0 = 0$, ибо при $x = 0$ и $y = 0$, чему соотвѣтствует и напряженіе $k_{при\,x=0} = \infty$, что невозможно. Очевидно вопрос может быть рѣшен лишь при условіи, что сѣченіе $\omega_{при\,x=0}$ имѣет конечное значеніе, слѣдовательно, должно быть задано $k_{max} = \frac{P}{\omega_{min}}$. Пусть k_{max} задано, тогда $k_{max} = \frac{P}{\pi y^2_{при\,x=a}}$, т. е. вершина параболы (фиг. 43) будет лежать ниже концевого сѣченія на величину a, опредѣляемую условіем $k_{max} = \frac{P}{2p\pi a}$. Полученныя выше зависимости между λ и x найдутся на основаніи прежних разсужденій:



фиг. 43.

$$d\lambda = i_x dx = \frac{k_x dx}{E} = \frac{P\,dx}{E\omega_x} \text{ и}$$

$$\lambda = \int_a^{L+a} \frac{P\,dx}{\omega_x E} = \int_a^{L+a} \frac{P\,dx}{2\pi p x E} = \frac{P}{2E\pi p} \lg \frac{L+a}{a}$$

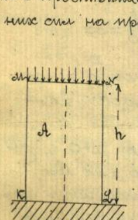
Пусть $P = 2000$ klgr., $L = 4$ m., $p = 10$, $k_{max.} = 5$ klgr. на m/m^2, тогда $\omega_{min} = 400\, m/m^2$, $y_{min} = 11{,}3\, m/m$, $a \cong 6{,}4\, m/m$ и $\lambda = 0{,}02025\, m/m$. Не трудно опредѣлить величину полнаго удлиненія и в том случаѣ, когда необходимо принять во вниманіе собственный вѣс бруска. В самом дѣлѣ, пусть вѣс куб. ед. бруска будет δ klgr. Напряженіе в сѣченіи D складывается из двух $k_x = \frac{P}{\omega_x}$ и $k'_x = \frac{g_x}{\omega_x}$, гдѣ g_x вѣс части бруска, лежащаго ниже сѣченія D. Величина $g_x = \int_a^x \omega_z d_z \delta$; причем $y^2 = 2pz$. Поэтому $g_x = \int_a^x 2\pi pz\,dz\,\delta = \pi p\delta(x^2 + a^2)$ и слѣдовательно:

$$\lambda = \int_a^{L+a} \frac{\left(\frac{P}{\omega_x} + \frac{P_x}{\omega_x}\right)dx}{E} = \int_a^{L+a} \frac{\left[P + \pi p\delta(x^2 - a^2)\right]dx}{2E\pi px} =$$

$$= \frac{1}{2E\pi p}\left\{P - \pi p\delta a^2\right\}\lg\frac{L+a}{a} + \pi p\delta L(L+2a)\}$$

Сжатіе.

Сжатіе — явленіе прямо противоположное растяженію и в простѣйшем видѣ представляется дѣйствіем внѣшних сил на призматическій брусок A (фиг. 44), причем равнодѣйствующая этих сил совпадает по направленію с осью бруска и приложена в центрѣ тяжести сѣченія MN. Под вліяніем внѣшней нагрузки получается деформація, которая выражается уменьшеніем длины (высоты) l. При этом очевидно, сѣченія MN и KL сближаются, оставаясь параллельными своему первоначальному положенію, между частицами матеріала возбуждаются внутренія силы направленныя параллельно оси бруска и напряженіе которых опредѣлится частным $P : \omega = k$, гдѣ P сжимающая сила, ω — площадь попер. сѣченія. Что касается распредѣленія внутренних сил по сѣченію, то на основаніи подобных же опытов, как и при растяженіи, можно считать его равномѣрным. Деформація сжатія Δl или Δh связана с величиной внѣшней нагрузки, как указывают наблюденія, зависимостью аналогичной той же зависимости при растяженіи. И здѣсь величина относительной деформаціи прямо пропорціональна внѣшней силѣ и обратно



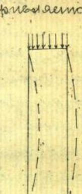
Фиг. 44.

пропорціональна площади попер. сѣченія, т. е.

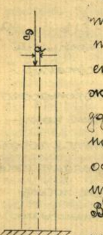
$$i = \frac{\Delta h}{h} = \frac{\beta P}{\omega}, \quad \text{откуда} \quad k = \frac{\Delta h}{\beta h} = E_1 \frac{\Delta h}{h} = E_1 i \quad \ldots (a)$$

Коэффиціент пропорціональности E_1, назыв. модулем упругости при сжатіи, i — относительное сжатіе.

Зависимость (a) (закон Гука) справедлива до нѣкотораго значенія k, при котором эта пропорціональность нарушается и соотношеніе между k и i становится гораздо сложнѣе. Вмѣстѣ с тѣм замѣчается, что в началѣ сжатія, небольшими грузами, деформированный брусок послѣ прекращенія дѣйствія внѣшней силы вполнѣ возстановляет свою форму, т. е. деформаціи получаются исчезающія чем упругія. Под дѣйствіем нагрузок, при которых внутренія напряженія достигают указаннаго предѣла пропорціональности, замѣчается появленіе пластических или остающихся сжатій и деформація, при дальнѣйшем увеличеніи сжимающей силы, становится составной. В общем, как видно, явленіе при сжатіи аналогичны таковым при растяженіи, но прямо противоположны. Поэтому сжатіе иногда трактуют, как отрицательное растяженіе. Но между этими двумя родами деформацій имѣется существенное различіе, которое заключается в слѣдующем. При растяженіи длина растягиваемаго бруска не играет роли[1], и, как указывают опыты, напряженія и величина деформаціи от длины почти не зависят. Совершенно другое наблюдается при сжатіи. Высота (длина) бруска здѣсь играет большую роль; а именно, при длинѣ превосходящей в нѣсколько раз наименьшій поперечный размѣр бруска, послѣдній не сжимается, а искривляется (фиг. 45). Ось бруска не остается прямой линией, а измѣняется в кривую. Указанное обстоятельство объясняется тѣм, что практически весьма трудно получить вполнѣ однородный брусок, а главное, почти невозможно приложить внѣшнюю силу так, чтобы, совпадая с направленіем оси, она (сила) была приложена точно в центрѣ тяжести сѣченія. Благодаря послѣднему обстоятельству, получается пара сил Pa (фиг. 46), которая производит изгибаніе бруска.


Фиг. 45.

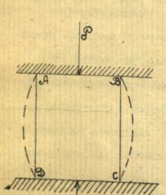
[1] Предполагается, конечно, что собственным вѣсом бруска пренебрегают.



Фиг 46

Само собою разумѣется, что упомянутыя выше трудности существуют и при растяженіи и так же эксцентрическое приложеніе силы вызывает явленіе болѣе сложное, нежели простое растяженіе. Но как увидим ниже, вліяніе этой ошибки здѣсь гораздо меньше. Искривленіе длиннаго бруска под дѣйствіем сжимающей силы представляет особаго рода изгиб, носящій названіе продольнаго изгиба или раздавливанія.

Во время сжатія, пока внутреннія напряженія не переходят предѣла упругости, измѣненіе поперечных размѣров весьма мало замѣтны, хотя увеличеніе их и существуют, аналогично поперечному сжатію при растяженіи. По мѣрѣ увеличенія внѣшней нагрузки, с возрастаніем остающейся деформаціи, первоначально призматическій брусок принимает форму, указанную на фиг. 47. Поперечныя сѣченія увеличиваются, но это увеличеніе не распространяется равномѣрно по всей длинѣ бруска, а возрастает от концов бруска к его серединѣ. Причина указанной неравномѣрности лежит в слѣдующем: в плоскостях соприкосновеніе с прибором, производящим сжатіе, вслѣдствіе нормальнаго давленія развивается сила тренія, которая препятствует перемѣщенію частиц в этих плоскостях. Частицы слоев, лежащих вблизи AB и CD, имѣя стремленіе увеличиться вслѣдствіе продольнаго сжатія, задерживаются взаимодѣйствіем частиц сѣченій AB и CD. А т. к. это взаимодѣйствіе убывает по мѣрѣ удаленія к среднему сѣченію, то увеличеніе послѣдняго должно быть наибольшим.



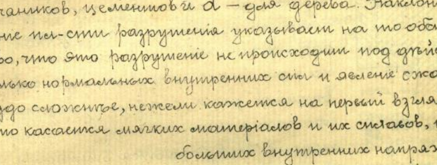
Фиг. 47.

Какова должна быть максимальная высота, при которой не наблюдается искривленія бруска - зависит от матеріала. Для круглаго цилиндрическаго бруска из сѣраго чугуна эта величина приблизительно около десяти діаметров. Ниже в статьѣ о продольном изгибѣ будут указаны способы полученія этих наибольших высот. Как средніе цифры можно считать отношеніе длины к діаметру (круглое

сѣченіе) [1]

для желѣза		15
" мягкой стали		15
" дерева	. . . .	12

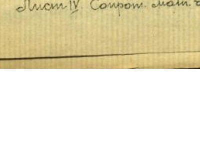
По существу дѣла брусок, подверженный сжимающей силѣ, не должен разрушится ни при какой угодно большой нагрузкѣ, т. к. под дѣйствіем сжатія сѣченія (слои) приближаются друг к другу. В дѣйствительности же всегда наблюдается предѣл. сопротивленія матеріала, но заранѣе представить себѣ форму разрушенія и опредѣлить опасное сѣченіе весьма трудно. Опытныя изслѣдованія показывают, что для большинства матеріалов разрушеніе наступает не в плоскостях перпендикулярных направленію внѣшней силы, а в плоскостях к ней наклонных. На фиг. 48 представлены общія формы разрушенія:



Фиг. 48

a, b — для чугуна, закаленной стали, для особенно твердых пород камня. c — для песчаников, цементов и d — для дерева. Наклонное положеніе пл-сти разрушенія указывает на то обстоятельство, что это разрушеніе не происходит под дѣйствіем только нормальных внутренних сил и явленіе сжатія гораздо сложнѣе, нежели кажется на первый взгляд.

Что касается мягких матеріалов и их сплавов, то при больших внутренних напряженіях замѣчается теченіе матеріала, что выражается и діаграммой сжатія.

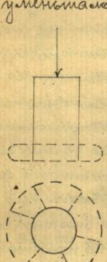


Фиг. 49.

Фиг. 49 представляет діаграмму при изслѣдованіи на сжатіе цилиндра $d = 30^m/_m$, $h = 50^m/_m$ из весьма мягкаго желѣза. Aa - предѣл пропорціональности. За точкой A деформація возрастает гораздо быстрѣе внутренняго напряже-

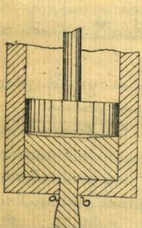
1) Полученныя данныя приблизительны и найдены из соотношенія $K = \frac{\pi^2 E}{64 (l/d)^2}$ Лист IV. Сопрот. мат. ч. I проф. И. И. Бобарыков.

нія и кривая становится пологой. При внутреннем напряженіи $K = 52$ кл/дм. (разрывающее $K_z = 40$) высота бруска уменьшалась в 5 раз (фиг. 50). Брусок представляет лепешку; поперечное сѣченіе остается приблизительно круглым, но на периферіи появляются радіальныя трещины. Опыты со свинцом указывают на явленіе теченія еще болѣе реально. Пластинка свинца помѣщается в цилиндрѣ имѣющем на днѣ отверстіе; под давленіем поршня (фиг. 51) свинец вытекает из упомянутаго отверстія в формѣ струи. Что явленіе это вполнѣ аналогично теченію, подтверждается фактом образованія суженія струи на нѣкотором разстояніи от нижней плоскости днища. Так. обр. вязкія пластическія тѣла не разрушаются в том смыслѣ, как это принято понимать в жизни.



фиг 50

Точной теоріи явленія сжатія не имѣется до сих пор и попытки создать ее нельзя назвать удачными.

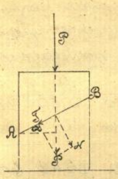


фиг. 51.

Принимая во вниманіе, что сѣченія, по которым происходит разрушеніе при растяженіи, иногда располагаются также наклонно к направленію дѣйствія внѣшней силы, слѣдует допустить, что при растяженіи, как и при сжатіи в матеріалѣ возбуждаются внутреннія напряженія не только нормальныя, но и касательныя.

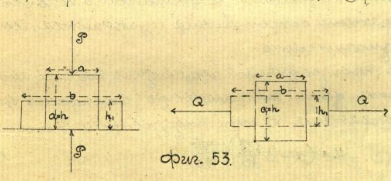
Coulomb, на основаніи этого соображенія считал, что разрушеніе по наклонному сѣченію при растяженіи происходит именно вслѣдствіе развитія касательных напряженій. Пусть на призму (фиг. 52) дѣйствует сила P; проведем мысленно плоскость AB под углом α к горизонтали; внѣшняя нагрузка может быть разложена на нормальную и касательную, слагающія N и T. Не трудно видѣть, что $T = P \sin\alpha = \Omega K_s$, гдѣ Ω — сѣченіе AB, а K_s — напряженіе в этой пл-сти (касательное). Если сѣченіе (плоскостью пер-

пендикулярной к оси) призмы будет ω, то очевидно получится: $P \sin\alpha = \frac{\omega}{\cos\alpha} K_s$ или $K_s = \frac{P}{2\omega} \sin 2\alpha$, откуда наибольшее значеніе K_s будет для сѣченія AB, проведеннаго под углом 45° к вертикали. При этом усиліе на m/m^2 $K_s = \frac{K}{2}$, гдѣ K нормальное напряженіе. Но, как увидим ниже, сопротивленіе матеріала скалывающей силѣ в большинствѣ случаев значительно меньше, нежели нормальным силам, этим и объясняется разрушеніе по наклонному сѣченію. Изложенная теорія не вполнѣ точна, ибо, как указывает опыт, далеко не всегда наклон разрушенія равен 45°. С другой стороны треніе, которое должно существовать в сѣченіи, не принято во вниманіе.



фиг. 52.

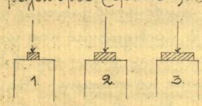
Подобным образом не вполнѣ удовлетворительна и другая теорія, основанная на взаимности явленій сжатія и растяженія. Согласно этому объясненію, разрушеніе при сжатіи можно толковать, как разрушеніе при растяженіи силами, перпендикулярными к оси, т. е. брусок A сжимаемый до разрушенія силой P, P, причем деформація $= h - h_1$ находится в одинаковых условіях как и брусок B тѣх же размѣров, но растягиваемый силами Q, Q (фиг. 53), причем послѣднія вызывают поперечное сжатіе $= h - h_1$.



фиг. 53.

В заключеніе необходимо обратить вниманіе на то, что опыты над раздробленіем брусков указали на вліяніе способа приложенія силы по отношенію к разрушающим нагрузкам. Bauschinger производил раздробленіе трех одинаковых каменных кубиков и нашел, что если раздробляющія силы распредѣляются на часть поверхности, то сопротивленіе значительно падает.

Для доказательства он производил давленіе на куб через посредство стальной каленой пластинки разных размѣров (фиг. 54). При этом получились цифры указанныя в таблицѣ. Из приведенной



Фиг. 54.

Бруски	1	2	3
Поперечное сѣченіе испытуемаго бруска	9900 кв. mm	9750 кв. mm.	9850 кв. mm
Площадь стальной пластинки	1521	3249	6084
Раздробляющій груз	16000 klgr.	30000 klgr.	47000 klgr.

таблицы видно, что сопротивленіе приблизительно пропорціонально площади распредѣленія нагрузки. Точно также имѣет значеніе высота бруска и форма его поперечнаго сѣченія.

Высота в m.m.	100	198	400
Площадь попер. сѣченія в кв. mm	311	308	311
Разрушающій груз в klgr. на кв. mm	85,8	75	72,3

Что касается высоты, то на значеніе ея указывалось выше, но наблюденія отмѣчают также обстоятельство что даже при брусках сравнительно небольшой высоты послѣдняя играет нѣкоторую роль. Это видно между прочим из второй таблицы. Опыты производились над чугунными брусками и достаточно ясно указывали, что напряженіе сопротивленія измѣняются, хотя не особенно значительно.

Bauschinger, производившій громадное количество опытов на сжатіе дал эмпирическую зависимость для величины напряженія к при раздробленіи в формѣ:

$$K = \left(\alpha + \beta\frac{\sqrt{\omega}}{h}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{\omega}}{p/4}} \quad \dots\dots \quad (11)$$

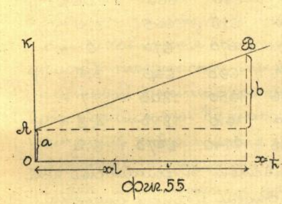
гдѣ h - высота призмы и p - периметр поперечнаго сѣченія. Коэффиціенты α и β находятся рядом наблюденій. Формулу Bauschinger'а можно написать так:

$$K = \left(\alpha A + \beta\frac{B}{h}\right), \quad a + \frac{b}{h} = a + bx$$

$$A = \sqrt{\frac{\sqrt{\omega}}{p/4}} \quad \text{и} \quad B = \sqrt{\omega}\sqrt{\frac{\sqrt{\omega}}{p/4}} = \sqrt{\frac{\omega\sqrt{\omega}}{p/4}} \quad \text{и} \quad x = 1/4$$

В новом видѣ получаем ур.-іе прямой в координатах к и $x = 1/h$. Раздробляя брусок одного и того же мате-

ріала с одинаковым поперечным сѣченіем (не только по величинѣ, но и по формѣ) найдем значеніе к при всяком h. Откладывая (фиг. 55) по оси x величины $x = 1/h$ и по ординат соотвѣтствующія напряженія к, получим прямую AB. Отрѣзок OA есть ничто иное, как a, при $x = 0$. Полагая $x = 1/h = 1$, находим ординату $Bb = K_{\text{при } x=1} = a + b$. Слѣдовательно, проводя прямую AC $\|^{\text{ую}}$ оси Ox, найдем отрѣзок $BC = b$.



Фиг. 55.

В дѣйствительности весьма рѣдко, найденныя точки (к, x) лежат строго на одной прямой; в большинствѣ случаев онѣ располагаются нѣсколько иначе, но так, что прямая AB легко обозначается. Поэтому нахожденіе коэффиціентов $\alpha = \frac{a}{A}$ и $\beta = \frac{b}{B}$ не представляет затрудненія. Числовыя значенія коэффиціентов α и β мѣняются, конечно, вмѣстѣ с матеріалом испытуемых брусков. Bauschinger дает, напр., для одной породы песчаника:

$$K = \left(310 + 346\frac{\sqrt{\omega}}{h}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{\omega}}{p/4}} \quad \text{и} \quad K = \left(262 + 320\frac{\sqrt{\omega}}{h}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{\omega}}{p/4}}$$

В таблицѣ видно на сколько велико согласованіе между напряженіями вычисленными по формулам Bauschinger'а и из выраженія $K = P/\omega$

NN	a	b	h	ω	Напряженія наблюд.	Напряженія вычисл.	Разность.
1	10,0 m/m	9,9	29,5	99	444 klg.	371 klgr.	16,4 %
2	10,0	9,8	9,7	98	602 "	588 "	2,33 "
3	6,6	6,5	4,75	42,9	676 "	684 "	1,8 "
4	4,8	4,0	1,4	22,08	1540 "	1337 "	13,2 "
5	4,7	10,0	1,4	47	1850 "	1757 "	4,5 "

Вторая формула Баушингера относится к случаю, когда h значительно превышает поперечный размѣр. Призма сѣченія $\omega = a \cdot b$.

№№	a	b	h	ω	Напряженіе при разрушеніи: наблюд.	Напряженіе при разрушеніи: вычисл.	Разность
1	9.95	9.85	9.6	98.01	680	666	2.06%
2	10.0	9.85	9.7	98.50	685	663	3.2 "
3	6.0	5.85	5.7	35.10	670	670	0 "
4	5.2	5.2	5.05	27.04	690	666	3,5 "
5	4.8	4,7	1.1	22.56	1950	1805	7.7 "
6	5.0	4.6	1.1	23.00	1910	1818	4,8 "
7	4.4	9.7	1.1	42.68	2140	2273	6,2 "

На вопрос о динамическом дѣйствіи внѣшних сил при сжатіи останавливаться не будем. Ввиду аналогіи с растяженіем можно сказать и здѣсь, что работа внутренних сил выражается также, а именно работа, отнесенная к куб. ед. $= \frac{K^2}{2E}$ до предѣла упругости; за этим предѣлом она вычисляется по діаграммам напряженій и сжатій (деформацій).

Твердость тѣл.

Понятіе „твердость матеріала" до сих пор не может считаться строго установленным; если представим себѣ два тѣла различной твердости нажатыми друг на друга, при чем тѣло болѣе твердое обладает меньшей поверхностью соприкосновенія, то получаемая деформація может служить при извѣстных условіях мѣрою твердости. При нагрузках небольших эта деформація будет упругой и стало быть по окончаніи нажатія исчезает. Произвести ея измѣреніе во время опыта почти невозможно, тѣм болѣе, что и болѣе твердое тѣло также претерпѣвает измѣненіе формы, хотя и в меньшей степени. Обычно под твердостью понимают сопротивленіе, какое представляет тѣло проникновенію в него с поверхности другого тѣла, болѣе твердаго. Само собою понятно, что для полученія числовых результатов необходимо получить отпечатки, которые могут быть легко измѣрены, т. е. необходимо имѣть дѣло с деформаціей пластической. Полученіе отпечатков производится вдавливаніем болѣе твердаго … поверхность испытуе-

маго и здѣсь очевидно имѣем дѣло с остающейся деформаціей. Как указывают многочисленныя наблюденія матеріал, подвергшійся наблюденіям далеко выходящим за предѣлы упругости, нѣсколько измѣняет свои механическія свойства и так. обр. в мѣстѣ опредѣленія твердости мы имѣем дѣло с матеріалом до нѣкоторой степени отличным по своим свойствам от первоначальнаго. Конечно, отказываясь от возможности получить абсолютныя значенія, так называемой твердости, приходится мириться со способами ея опредѣленія, позволяющими находить лишь относительное значеніе.

Можно идти двумя путями, либо задаваясь полученіем опредѣленной деформаціи, опредѣлять потребныя для сего нагрузки, величины которых и будут служить указателями относительной твердости; либо, пользуясь опредѣленной нагрузкой, измѣряют полученную деформацію для той же цѣли.

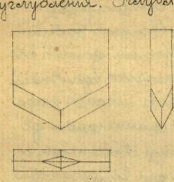
Способ Jansona.

По этому методу для опредѣленія твердости тѣл, берут усѣченный конус размѣров, показанных на фиг. 56. Такой стальной конус вдавливается всегда на одну и ту же глубину, а именно на половину своей высоты. Очевидно различныя тѣла в зависимости от своей твердости требуют приложенія различных грузов для погруженія конуса на постоянную величину 3,5 m/m. и матеріал будет считаться тѣм болѣе твердым, чѣм больше усилія было приложено.

Фиг. 56.

Измѣреніе твердости по способу Родмана

По этому способу для измѣренія твердости употребляется стальной закаленный нож (фиг. 57), имѣющій форму пирамиды с сильно вытянутым ромбическим основаніем. Нож вдавливается всегда одним и тѣм же грузом; о твердости судят по объему получаемаго углубленія. Углубленія оставляемыя ножем в разных тѣлах имѣют вид подобных пирамид, в силу чего отношеніе твердостей будет равно обратному отношенію кубов сходственных размѣров углубленій. Получив на поверхности площадки какого либо тѣла отпечаток ножа, имѣющаго форму вытянутаго ромба. Это



Фиг. 57.

измѣреніе может быть сдѣлано с большой точностью, если примѣнить микроскоп и микрометрическій измѣрительный прибор. Величина углубленія зависит от формы ножа и замѣтно измѣняется при небольших перемѣнах фигуры его. Поэтому для полученія всегда одинаковых результатов необходимо примѣнять ножи, формы которых тождественны между собой. Такого тождества легко достигнуть при той фигурѣ, которую придал ножу Родман. У него всѣ грани ножа плоскія, а плоскость представляет собою наиболѣе простую форму для изготовленія поверхности. Затѣм для тождества двух ножей Родмана необходимо, чтобы у обоих были одинаковые углы между соотвѣтствующими гранями, это легко достигается примѣненіем, при изготовленіи ножей, опредѣленнаго шаблона. Одинаковость углов между гранями может быть в случаѣ нужды провѣрена гоніометром, – прибором, употребляемым для измѣренія углов кристаллов.

Оба описанные пріема опредѣленія твердости обладают существенными недостатками и в настоящее время мало примѣняются. Усѣченный конус, предложенный Джонсоном, сплющивается весьма легко благодаря притупленію краев нижняго основанія; притупленіе это особенно скоро получается при испытаніи твердых тѣл, напр., стали, чугуна и т. д.. Не особенно т. удобно погружать конус до опредѣленнаго дѣленія, т. к. это требует, во первых, очень деликатнаго измѣренія, а во вторых, при снятіи

поверхность испытуемаго тѣла нѣсколько приподымается вокруг образуемаго углубленія. Сдѣланныя замѣчанія могут быть отнесены отчасти и к способу Родмана, хотя здѣсь имѣется несомнѣнное преимущество, т. к. слѣдить за погруженіем ножа нѣт надобности; измѣренію подвергаем лишь большую діагональ ромба.

Способ Бринелля.

В послѣднее время получает значительное распространеніе опредѣленіе твердости по способу шведскаго инженера Бринелля. Этот ученый предложил отпечаток производить вдавливаніем стального шарика, причем как и у Родмана, нагрузка назначается вперед и измѣняется в зависимости от діаметра шарика и матеріала. Нормальным размѣром Бринелль считает шарик в 10 m/m діаметром и груз в 5t, 3t, 1t и 0,5t, в зависимости от твердости матеріала. Так, высшая нагрузка примѣняется при опредѣленіи твердости стали, низшая для дерева, свинца и т. д. Измѣрив діаметр отпечатка вычисляют величину S – поверхности углубленія и частное от дѣленія груза P на S принимают как мѣру твердости g, т. е. $g = P : S$. Так. обр. твердость в предположеніи Бринелля есть давленіе в klgr. на кв. ед. поверхности отпечатка. Легко видѣть преимущество этого метода: стальные шарики с громадным сопротивленіем раздробленію изготовляются в настоящее время цѣлым рядом фабрик и нѣкоторыя из них дают точность до 0,002 m/m, что можно считать весьма достаточной. Что касается до того, насколько отпечаток сохраняет форму шара необходимо необходимо указать на весьма большую твердость самого шарика и соотвѣтственно ничтожную его деформацію.

Опыты проф. E. Meyer в 1908 году дают, напр. для стального шарика со средним діаметром в 10 m/m слѣдующія данныя для діаметра, перпендикуляр-наго направленія сжимающей силы.

нагрузка	діаметр.
0	9,995
500 kilgr	9,995
1000 "	9,998
1500 "	10.000
2000 "	10.000
2500 "	10.002
3000 "	10.002
0 "	9.995

Изъ этих цифр вытекает, что при измѣненіи нагрузки от 0 до 3 t увеличеніе діаметра вслѣдствіе поперечнаго выпучиванія достигает $z = \frac{10{,}002 - 9{,}995}{9.995} 100 = 0{,}07\ m/m$. При разгруженіи шарика, он принимает свои прежнія размѣры. Как видим, ошибка от допущенія неизмѣняемости шарика в предѣлах до 3 t груза можно считать ничтожной. Временное сопротивленіе такого шарика около 5000 — 6000 kilgr.

Недостатком способа Бринелля можно назвать то обстоятельство, что отношеніе между силой P и соотвѣтственным отпечатком не является вполнѣ постоянным, как предполагал автор метода. По его мнѣнію $P = ad^2$, гдѣ d діаметр отпечатка, а a постоянный коэффиціент, измѣняющійся вмѣстѣ с матеріалом испытуемаго тѣла. Между тѣм опыты проф. Мейера в 1907 году показали, что искомая зависимость выражается как $P = ad^m$, гдѣ m измѣняется от 2 до 2,32. По опытам Мейера получено, например,

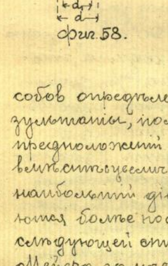
Мѣдь			Никкелевое желѣзо		
Нагрузка kilgr.	d m/m	q kilgr.	Нагрузка kilgr.	d	q
200	2.042	61,2	200	0.425	3200
500	3.174	63,2	300	0.892	334.0
800	4.006	63,4	500	1.070	357,5
1200	4.841	65,2	1000	1.334	407,0
1600	5.560	65,4	3000	2.835	476.0
2000	6.184	66,6			
2400	6.748	67,2			
3200	7.731	68,3			

т.е. вмѣстѣ с возрастаніем груза P увеличивается и величина q. В интервалѣ 200–3200 kilgr. имѣем для мѣди: $\frac{68.3 - 61.2}{68.3} 100 = 10{,}4\%$, для желѣза в интервалѣ 200–3000 kilgr.: $\frac{486 - 320}{486} 100 = 32{,}8\%$

Способ P. Ludwik'а

В 1907 году P. Ludwik опубликовал свой способ опредѣленія твердости, замѣнив шарик конусом у котораго угол при вершинѣ равен 90°. Твердость здѣсь находится так же как в методѣ Бринелля — дѣленіем груза P на поверхность отпечатка, т.е. $q = P : \frac{\pi d^2}{4}$. Но при этом в виду того, что при различных глубинах вдавливанія поверхности отпечатков подобны, величина q должна быть постоянна. При этом Ludwik под глубиной вдавливанія понимает t_1 (фиг. 58) т.е. разстояніе от наинизшей точки впадины до первоначальной поверхности или исключая из разсчета высоту $t - t_1$, которая получается вслѣдствіе раздавливанія матеріала в стороны. Точно также за діаметр отпечатка Ludwik считает не наибольшій d, а d_1 — соотвѣтствующій начальной плоскости. Т.к. $d_1 = 2t_1$, то q можно выразить как

$$q = P : \pi t_1^2$$



фиг. 58.

Проф. Мейер, производя параллельныя изслѣдованія нѣкоторых способов опредѣленія твердости, указывает на то, что результаты, полученные из опытов не подтверждают предположеній Ludwik'а и твердость q убывает вмѣстѣ с увеличеніем груза P. Если же вмѣсто d_1 ввести наибольшій діаметр отпечатка, то цифры получаются болѣе постоянными. Напр. в таблицѣ (на слѣдующей страницѣ), взятой из опытов проф. Мейера замѣчаем, что вторые столбцы, содержащіе цифры, отнесенные к діаметру (наибольшему) отпечатка, измѣняются гораздо медленнѣе. Дѣйствительно отбросив первыя строки будем имѣть:

Мѣдь			Литое желѣзо.		
Нагрузка клгр	$q = P : Rt_1^2$	$q = P : \frac{\pi d^2}{4}$	Нагрузка клд.	$q = P : \pi t_1^2$	$q = P : \frac{\pi d^2}{4}$
200	173,8	86,2	—	—	—
300	130,8	83,2	—	—	—
400	131,2	—	400	320,0	182
600	125,3	82,2	600	309,5	174,5
800	118,6	82,3	800	291,0	171,5
1000	116,2	82,3	1000	286,0	174,0
1500	113,0	82,6	1500	274,5	171,2
2000	110,5	82,8	2000	260,3	173,0
3000	101,0	81,4	3000	246,0	172,3

$\frac{130,8-101}{130,8} 100 = 22,8\%$, $\frac{83,2-81,4}{83,2} 100 = 2,16\%$, $\frac{(309,5-246,0)100}{309,5} =$

$= 20,5\%$ и наконец $\frac{174,5-172,3}{174,5} 100 = 1,26\%$

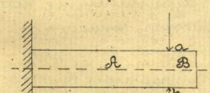
Кромѣ описанныхъ методовъ опредѣленія твердости, существуютъ еще нѣкоторые, сравнительно мало употребительные въ практикѣ. Изъ нихъ остановимся на способѣ Мартенса, который заключается въ томъ, что алмазнымъ рѣзцомъ проводятъ по полированной поверхности царапину подъ дѣйствіемъ одного и того же груза и затѣмъ подъ микроскопомъ измѣряютъ ширину этой царапины. Чѣмъ мягче матеріалъ тѣмъ она шире и наоборотъ. Алмазъ заточенъ на конусъ съ угломъ при вершинѣ равнымъ 90° и твердостью называется та нагрузка, которая необходима, чтобы получить царапину шириною въ 0,01 м/м. умноженное на $\frac{0.002}{\pi/4\ 0.01^2} = 25,5$. Какъ показываютъ опыты и здѣсь постоянства полученныхъ чиселъ нѣтъ.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ придти къ заключенію, что методовъ опредѣленія твердости, дающихъ непосредственно сравнимые данные, не имѣется. Опредѣляя тѣмъ или другимъ способомъ твердость матеріала, необходимо приводить для свѣдѣнія и всѣ обстоятельства, при которыхъ данныя числа были получены, дабы, при желаніи сопоставить полученные результаты съ какими либо

другими, можно было такое сравненіе сдѣлать. Съ этой точки зрѣнія необходимо признать всѣ описанные пріемы одинаково хорошими или — плохими.

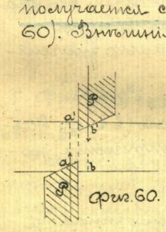
Сдвигъ.

Представимъ себѣ призматическій брусокъ, подверженный дѣйствію двухъ силъ P и P (фиг. 59) расположенныхъ въ плоскости перпендикулярной оси бруска. Результатомъ дѣйствія этихъ силъ, вообще говоря получается извѣстное формоизмѣненіе, вызываемое стремленіемъ къ смѣщенію части



Фиг. 59.

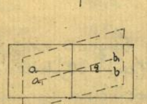
B относительно A. При значительной величинѣ силъ наступаетъ разрушеніе бруска, выражающееся въ отдѣленіи части B отъ A по плоскости ab. Описанное явленіе сдвига наблюдается при рѣзаніи ножемъ, ножницами и т. п. Въ дѣйствительности нѣтъ возможности приложить силы точно въ одной пл-сти, получается смятіе поверхностей ab и a'b' (фиг. 60). Внѣшнія силы приложены будутъ, слѣдовательно, на этихъ площадкахъ и между равнодѣйствующими P и P получается нѣкоторое, правда небольшое, разстояніе q. Такимъ обр. брусокъ оказывается подверженнымъ дѣйствію пары Pq. Какъ увидимъ ниже такая пара производитъ изгибъ бруска. Но въ томъ случаѣ, когда разстояніе q ничтожно, разрушеніе всегда происходитъ по сѣченію, лежащему между P и — P и его разсматриваютъ какъ сдвигъ сѣченія b относительно a.



Фиг. 60.

Въ явленіи сдвига мы встрѣчаемся съ такъ называемыми внутренними касательными силами, ибо очевидно, что при описанномъ способѣ приложенія внѣшнихъ силъ, внутреннія ихъ уравновѣшивающія должны лежать в плоскостях поперечных сѣченій.

Для уясненія себѣ взаимных отношеній между напряженіями и деформаціями вернемся к способу, который был изложен при объясненіи явленій растяженія. Пусть (фиг. 61) два безконечно малых элемента a и b подвергаются дѣйствію срѣзающих (сдвигающих) сил. Очевидно, что пока не наступило разрушеніе, т.е. пока взаимная связь между этими частицами не нарушена, они, под



Фиг. 61.

вліяніем внѣшней системы, займут новое положеніе a_1 и b_1; при этом линія центров $a_1 b_1$ с прежним своим положеніем ab составит угол g. Легко видѣть, что чѣм больше будет внѣшняя сила, тѣм угол g будет больше. Поэтому он может быть принят как мѣра деформаціи и носит названіе угла сдвига. Внутренняя сила T очевидно явится функціей угла сдвига и может быть представлена как $T = d\omega f(g)$, гдѣ $d\omega$ поверхность соприкасания элементов. Так при $g = 0$, велчина внутренней силы должна быть равна нулю и кромѣ того она непрерывна при малых значеніях, то можем написать:

$$T = d\omega f(g) = d\omega\left[f'(0)g + \tfrac{1}{2}f''(0)g^2 + \tfrac{1}{2\cdot 3}f'''(0)g^3 \ldots\right]$$

Отбрасывая всѣ члены кромѣ перваго (в виду весьма малых значеній g в предѣлах упругости) получим:

$$T = f'(0)d\omega g = G\,d\omega g,$$

т. к. очевидно $f'(0)$ есть величина постоянная и зависящая лишь от матеріала. Коэффиціент этот G носит названіе модуля сдвига или модуля упругости 2^го^ рода. Величина напряженія, т.е. внутренней силы, отнесенной к квадратной единицѣ, будет:

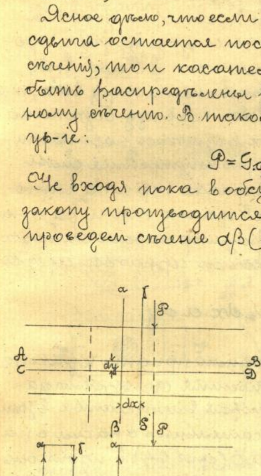
$$K_s = \frac{T}{d\omega} = Gg \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Полученная зависимость совершенно аналогична формулѣ $K = Ei$; модуль упругости 2^го^ рода измѣряется очевидно в тѣх же единицах как и E, а слѣдовательно и K_s.

Ясное дѣло, что если при деформаціи сдвига, угол сдвига остается постоянным во всѣх элементах сѣченія, то и касательныя напряженія должны быть распредѣлены равномѣрно по всему поперечному сѣченію. В таком случаѣ, очевидно, получим ур-іе:

$$P = G g\,\omega = K_s\omega \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Не входя пока в обсужденіе вопроса, по какому закону производится это распредѣленіе вообще, проведем сѣченіе $\alpha\beta$ (фиг. 62) и разсмотрим равновѣсіе правой части.



Фиг. 62.

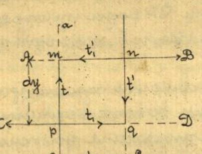
Внутренния силы, приложенныя в плоскости $\alpha\beta$ должны быть направлены по стрѣлкам, что видно из условія равновѣсія

$$P + \sum_0^{\omega} \Delta\omega K_s = 0^{1)}$$

Проводя далѣе на разстояніи dx от $\alpha\beta$ плоскость $\gamma\delta$, вырѣжем параллелипед $\alpha\beta\gamma\delta$. Из условія равновѣсія его найдем, что внутреннія силы в сѣченіи $\gamma\delta$ направлены противоположно таковым же в сѣченіи $\alpha\beta$. Наконец двумя пл-стями AB и CD ||^ыми^ оси и отстоящими друг от друга на разстояніи dy вырѣжем безконечно малый элементарный параллелипед $mnpq$ (фиг. 63); в гранях его mp и nq будут дѣйствовать силы t и t', очевидно, равныя друг другу, но противоположныя. Равенство $t = t'$ выражает то условіе, что сумма проекцій всѣх дѣйствующих сил ||^ной^ оси y^ов^ равна нулю. Образуя пару с моментом $t\,dx$, силы t, t'

1) гдѣ $\Delta\omega$ представляет элементарную площадку в сѣченіи $\alpha\beta$

требуют, для возможности равновѣсія параллелипеда, присутствія в гранях mn и pq подобных же касательных сил t_1 и t'_1, которыя должны быть равны друг другу и противоположны.[1] Пара $t_1 dy$ уравновѣшивает пару $t dx$, т. е. $t_1 dy = t dx$. В виду безконечно малых размѣров параллелипеда можно допустить, что внутреннія силы $t = t'$ и $t_1 = t'_1$, распредѣлены в гранях mp и nq равномѣрно с напряженіем k_s и в гранях mn и pq с напряженіем k'_s. Называя размѣр параллелипеда, перпендикулярный к плоскости чертежа через a имѣем равенство:

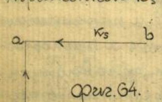


Фиг. 63.

$$k_s . dy . a . dx = k'_s . dx . a . dy .$$

откуда $\quad k_s = k'_s$

Таким образом необходимо придти к заключенію, что при сдвигѣ внутреннія силы обладают двойственностью, которая выражается в том, что в случаѣ появленія касательных с на сил с напряженіем k_s на грани ab (фиг. 64) в произвольной частицѣ тѣла, на грани ac, перпендикулярной ab, возбуждаются касательныя силы с напряженіем $k'_s = k_s$ и направленной по стрѣлкѣ.



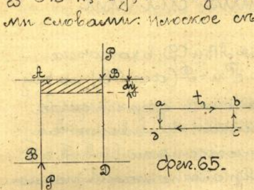
Фиг. 64.

Что касается распредѣленія внутренних сил в плоскости срѣзыванія, то можно сказать слѣдующее. Закон двойственности касательных сил относится, очевидно, ко всѣм внутренним площадкам безразлично.

Вырѣзая (фиг. 65) элемент AB у поверхности и вынося его отдѣльно, мы, на основаніи сказанных разсужденій, должны допустить, что на внѣшнюю грань AB дѣйствует касательная сила

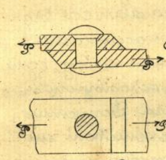
[1] Сумма проекцій на ось X-ов равна нулю; откуда $t_1 = t'_1$

При таком условіи понятно, что внутреннія силы и напряженіе k_s распредѣлены равномѣрно, т. е. $k_s = const. = \frac{P}{\omega}$. Но $k_s = G g$, а слѣдовательно и g постоянно. Другими словами: плоское сѣченіе AB до сдвига, остается плоским и послѣ деформаціи.



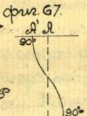
Фиг. 65.

С другой стороны, касательныя силы на внѣшней поверхности бруска обуславливают присутствіе касательных же внѣшних сил приложенных к бруску. Такой случай представляет, напр., заклепочное соединеніе. При малой толщинѣ листов можно допустить, что заклепки срѣзаются по плоскости AB (фиг. 66). Если заклепка сидит плотно, то на поверхности ея дѣйствует сила тренія, величина которой измѣняется в зависимости от взаимнаго давленія между стержнем заклепки и стѣнками дыры. В таком случаѣ при срѣзаніи, заклепка подвергается касательным внѣшним силам (тренія) и на своей поверхности, а потому возможно ожидать болѣе или менѣе равномѣрнаго распредѣленія внутренних напряженій в плоскости поперечнаго сѣченія. Если же заклепка сидит в своем гнѣздѣ до нѣкоторой степени свободно, то о равномѣрном распредѣленіи напряженій в сѣченіи не может быть и рѣчи. При таком условіи естественно ожидать, что плоское сѣченіе при деформаціи искривляется. Угол наклона перваго элемента к поверхности (точки $A'B'$) (фиг. 67) должен быть равен $90°$, ибо здѣсь за отсутствіем касательных сил не может быть перекашиванія. С явленіем неравномѣрнаго распредѣленія касательных сил при скалываніи придется еще раз



Фиг. 66

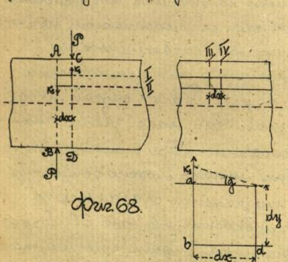
Фиг. 67.



встрѣтиться при изгибѣ.

Работа внутренних сил при сдвигѣ.

Представим себѣ два сѣченія AB и CD, в которых дѣйствуют срѣзающія силы P и −P (фиг. 68) на разстояніи друг от друга равном dx и вырѣжем плоскостями I и II, III и IV безконечно малый параллелипед abcd с размѣрами dx, dy и dz. На гранях его ab и cd возникают касательныя напряженія $k_s = G.\gamma$, если γ - соотвѣтствующій угол сдвига. Допустим, что в нѣкоторый момент сила P, возрастая от нуля, не достигнув еще своей наибольшей величины P_1, равна $P' < P$; сообразно с этим угол сдвига получит величину $\gamma' < \gamma$. В сосѣдній безконечно малый промежуток времени угол сдвига возрос также на безконечно малую величину $d\gamma$. Если допустить, что грань cd неподвижна, а грань ab сдвигается, что не измѣнит сущности явленія, то работа касательнаго напряженія будет, очевидно, равна $dy.dz.k_s.d\gamma.dx$, так как перемещеніе, которое равно $dx\,tg.d\gamma$ можно замѣнить через $dx.d\gamma$, если вмѣсто тангенса по малости угла взять дугу. Работа внутренних сил на грани ab за всю деформацію от 0 до γ будет:



Фиг. 68.

$$t = \int_0^{\gamma} dx.dy.dz.k_s.d\gamma = dv\int_0^{\gamma} \gamma.G\,d\gamma = dv\frac{k_s^2}{2G}$$

гдѣ $dv = dx.dy.dz$ есть об'ем элементарнаго параллелипеда. Раздѣляя полученное выраженіе на dv найдем работу касательных напряженій при сдвигѣ отнесенную к единицѣ об'ема:

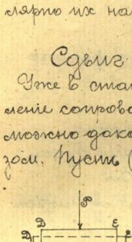
$$\mathcal{Z} = \frac{k_s^2}{2G} \quad \ldots\ldots\ (14)$$

По закону двойственности на гранях ac и bd также

возникают касательныя напряженія равныя по величинѣ k_s и направленныя согласно стрѣлок; но работа этих касательных напряженій равна нулю т.к. перемѣщеніе точек приложенія происходит перпендикулярно их направленію.

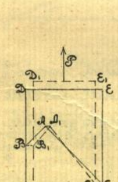
Сдвиг при растяженіи (сжатіи).

Уже в статьѣ о сжатіи указывалось, что это явленіе сопровождается сдвигом. В самом общем видѣ можно доказать это положеніе слѣдующим образом. Пусть (фиг. 69) брусок DEFG подвергается сжатію силами P, P. Возьмем внутри бруска около точки A двѣ взаимно перпендикулярныя пл-сти AB и BC. После деформаціи точки A, B и C перемѣстятся в A_1, B_1 и C_1, причем легко видѣть, что $\overline{CC_1} > \overline{BB_1} > \overline{AA_1}$. Слѣдовательно $\angle B_1A_1C_1 > \angle BAC$, а потому на пл-стях AB и AC очевидно дѣйствуют касательныя напряженія.



Фиг. 69.

Совершенно таким же образом можно показать, что явленіе сдвига наблюдается и при растяженіи. Отнеся наши разсужденія к этому случаю (фиг. 70) найдем, что прямой угол BAC переходит в $\angle B_1A_1C_1 < \angle BAC$. т.е. и здѣсь наблюдается измѣненіе прямого угла характеризующее наличность касательных напряженій. Связь между явленіями растяженія (сжатія) и сдвига указывает на то, что между модулями упругости перваго и втораго рода должна существовать опредѣленная зависимость.

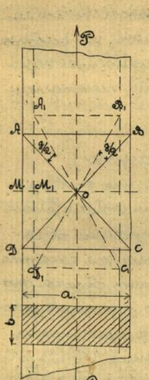


Фиг. 70.

Чтобы найти ее разсмотрим слѣдующій случай.

Брусок прямоугольнаго поперечнаго сѣченія с размѣрами $\omega = a.b$ (фиг. 71) подвергается растяженію силами P, P.

Возьмем два сѣченія AB и CD отстоя-



Фиг. 71.

щих друг от друга на разстоянии $AD = BC = a$. Послѣ деформации сѣчения перейдут в A_1B_1 и C_1D_1. Величина относительнаго удлинения отрѣзка $AD = BC$ будет:

$$i = \frac{\overline{A_1D_1} - \overline{AD}}{\overline{AD}}$$

С другой стороны поперечный размѣр уменьшается и:

$$\overline{A_1B_1} = AB(1 - mi)$$

гдѣ m - коэффициент Пуассона.
Деформація сдвига очевидно будет:

$$g = \angle AOB - \angle A_1OB_1 = 2\angle A_1OA$$

Из прямоугольнаго Δ-ка OM_1A_1 имѣем:

$$\overline{OM_1} = A_1M_1 \operatorname{tg} \angle OA_1M_1$$

но

$$\overline{OM_1} = \frac{A_1B_1}{2} = \frac{AB(1-mi)}{2} = \frac{a(1-mi)}{2}$$

$$A_1M_1 = \frac{\overline{AD}}{2}(1+i) = \frac{a(1+i)}{2}$$

$$\angle OA_1M_1 = 90 - (\angle AOM + g/2) = 45 - g/2$$

а потому имѣем:

$$\frac{a(1-mi)}{2} = \frac{a(1+i)}{2} \operatorname{tg}(45 - g/2)$$

слѣдовательно

$$1 - mi = (1+i)\frac{1 - g/2}{1 + g/2}$$

откуда

$$g = i(1+m) - \frac{ig}{2} + \frac{mig}{2}$$

Пренебрегая двумя послѣдними членами правой части как величинами чрезвычайно малыми по сравнению с первым получаем такую простую зависимость между деформаціями сдвига и растяжения

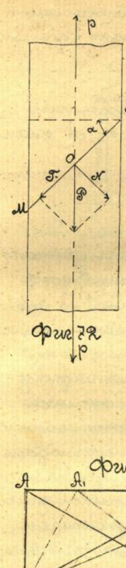
$$g = i(1+m)$$

Проведя (фиг. 72) через O пл-сть MM под углом α к горизонтальной пл-сти и отбросив нижнюю часть, замѣчаем, что сила P вызывает на наклонном сѣчении, величина котораго будет Ω, напряжение сдвига

$$K_s = \frac{T}{\Omega} = \frac{P\sin\alpha}{\Omega}$$

Но нормальное поперечное сѣчение бруска $\omega = \Omega\cos\alpha$, а потому имѣем:

$$K_s = \frac{P\sin\alpha\cos\alpha}{\omega} = \frac{P\sin 2\alpha}{2\omega} = \frac{K_z}{2}\sin 2\alpha$$



Фиг. 72

Наибольшее значение для K_s получается, как уже указывалось выше, при $\alpha = 45°$ т. е.

$$K_z = 2K_s$$

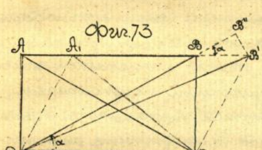
но $K_z = Ei = 2K_s = Gg$ или $Ei = Gi(1+m)$
откуда:

$$G = \frac{E}{2(1+m)}$$

Измѣняя m в предѣлах $m = 0{,}25 - 0{,}4$ получим $G = (0{,}4 - 0{,}36)E$

Растяжение (сжатие) при сдвигѣ.

На основании изложеннаго выше можно сказать, что если при растяжении наблюдается явление сдвига, то и обратно при сдвигѣ должно наблюдаться растяжение (сжатие). В самом дѣлѣ параллелипед ABCD под вліяніем сдвига перекашивается в $A_1B_1C_1D_1$. Діагональ BD при этом претерпѣвает удлинение, переходя в положение AB'. Діагональ AC, наоборот, сокращается по длинѣ и переходит в $\overline{CA_1}$. Разсмотрим соотношение между i и g в данном случаѣ.



Фиг. 73

Удлинение діагонали DB будет $\lambda = DB' - DB$. Спроектировав точку B' на BD по малости угла можем принять:

$$\overline{DB'} - \overline{DB} = \overline{BB''} = BB'\cos\alpha$$

с другой стороны $\overline{BD} = BC : \sin\alpha$
А поэтому

$$i = \frac{\lambda}{BD} = \frac{\overline{BB'}\cos\alpha}{BC/\sin\alpha} = \frac{\overline{BB'}\sin 2\alpha}{2\,\overline{BC}}$$

Но отношение $\overline{BB'} : \overline{BC}$ есть ничто иное как угол сдвига g, слѣдовательно

$$i = \frac{g\sin 2\alpha}{2}$$

При разсчетах на сдвиг необходимо имѣть в виду, чтобы напряжения нормальныя возникающия здѣсь не превосходили допустимой величины. Имѣем

$$i_{max} = g/2$$

т. е. наибольшия нормальныя напряжения (растяжения или сжатія) развиваются в плоскости направленной под ∠45° к направленію сдвига. Слѣдовательно касательное напряженіе будет:

$$k_s = g.G = 2\,i_{max}\,G = 2\frac{iE}{2(1+m)} = \frac{k_z}{1+m}$$

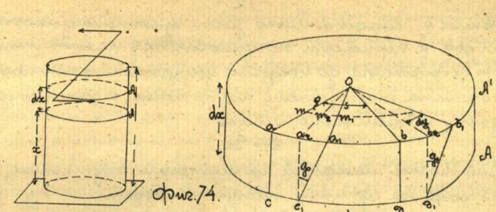
Отсюда зная величину допустимаго напряженія k_z находим значеніе допустимаго напряженія k_s. А именно принимая $m = 0{,}25 - 0{,}4$ получим

$$k_s = (0{,}8 - 0{,}7)\,k_z$$

Крученіе.

Крученіе называется то измѣненіе формы даннаго бруска, которое получается, когда по концам бруска дѣйствуют двѣ пары с равными по величинѣ, но противоположными по направленію моментами или, если один конец бруска закрѣплен неподвижно, а на другой дѣйствует пара сил в пл-сти, перпендикулярной оси бруска. При этом ось бруска остается прямой, поперечныя же сѣченія бруска поворачиваются около своих центров на углы тѣм большие, чѣм дальше отстоит разсматриваемое сѣченіе от закрѣпленнаго конца. Угол поворота сѣченія называется углом крученія. В дальнѣйшем изложеніи предполагаем, что поперечныя сѣченія остаются плоскими и в деформированном состояніи. Такое предположеніе фактически справедливо лишь для цилиндрическаго бруска круглаго сѣченія.

Вводу того, что практически имѣют наибольшее значеніе круглые цилиндрическіе бруски, в этой главѣ будет разсмотрѣно крученіе на цилиндрических брусках; в брусках прямоугольных, эллиптических и т. п. сѣченій, послѣднія при крученіи искривляются и явленіе имѣет значительно болѣе сложный характер. Возьмем на цилиндрѣ два сѣченія (фиг. 74) A и A_1 на разстояніи dx друг от друга и, проведя двѣ діаметральныя плоскости наклоненныя одна к другой под нѣкоторым небольшим радіальным углом φ, получаем на поверхности цилиндра прямоугольник $abcd$. Положим, что сѣченіе A_1 повернулось на безконечно ма-



Фиг. 74.

лый угол $d\varphi$ относительно сѣченія A[1], тогда точка a перейдет в a_1 и точка b — в b_1, в сѣченіи A - точки c перейдут в c_1 и d - в d_1. Отрѣзки производящих ac и bd займут новыя положенія a_1c_1 и b_1d_1; при этом прямые углы acd и bdd_1 переходят в острые, а прямоугольник $abcd$ переходит в параллелограмм $a_1b_1d_1c_1$. Такое видоизмѣненіе прямоугольника указывает на деформацію сдвига, а слѣдовательно на присутствіе касательных сил в поперечных сѣченіях.

Угол сдвига g_0 в разсмотрѣнном случаѣ представится углом $a_2c_1a_1$, т. е. $g_0 = \angle a_2c_1a_1$, а поэтому можно написать:

$$g_0 = \frac{a_2a_1}{ac} = \frac{r.d\varphi}{a.c} = \frac{r.d\varphi}{dx} \quad \dots\dots \quad (a)$$

гдѣ $d\varphi = a_2Oa_1 = b_2Ob_1$ — угол крученія, а r — внѣшній радиус цилиндра. Для какой либо точки m, лежащей в той же плоскости A_1, но на разстояніи $Om = \rho$ от оси, величина сдвига $m_2m_1 = \rho\,d\varphi$, а угол сдвига

$$g = \frac{m_2m_1}{ac} = \rho\frac{d\varphi}{dx} \quad \dots\dots \quad (b)$$

Сравнивая выраженіе (a) и (b) видим, что угол сдвига измѣняется с измѣненіем разстоянія точки от оси. Раздѣляя почленно эти два ур-ія друг на друга, получим $g_0 : g = r : \rho$ откуда:

$$g = g_0\frac{\rho}{r} \quad \dots\dots \quad (c)$$

Наибольшій угол сдвига будет, очевидно, для точек на поверхности цилиндра, т. е. $\angle g_0$ и наименьшій, равный нулю, на оси.

Уравненіе (c) представляет ур-іе прямой линіи (пере-

[1] Оба сѣченія на рис. 74 вынесены в сторону в увеличенном масштабѣ.

мѣнное ρ), слѣдовательно законъ измѣненія деформаціи отъ оси к периферіи представляется прямой линіей.
Но деформація до предѣла упругости прямо пропорціональна внутреннему напряженію, а именно для сдвига имѣемъ зависимость

$$k_s = G g$$

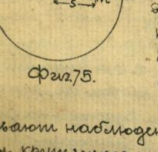
Для точки лежащей на периферіи внутреннее напряжение на единицу площади будетъ:

$$k'_s = g_0 G,$$

для другой же произвольной точки

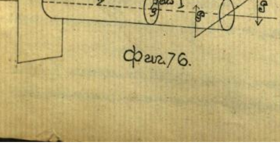
$$k_s = g G = \frac{g_0 \rho}{r} G = k'_s \frac{\rho}{r} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (15)$$

Графическое изображеніе закона измѣненій напряженій представится слѣдующимъ образомъ. отложивъ отъ точки a (фиг. 75) по касательной въ опредѣленномъ масштабѣ k'_s, соединивъ точку t_0 с O получимъ прямую, выражающую законъ



Фиг. 75.

измѣненія внутренняго напряженія. Чтобы опредѣлить внутреннее напряженіе для точки m, проведемъ черезъ эту точку линію mt, параллельную k'_s и тогда отрѣзокъ mt и выразитъ въ выбранномъ масштабѣ искомую величину внутренняго напряженія для упомянутой точки. Какъ показываютъ наблюденія, уголъ сдвига зависитъ отъ величины крутящаго момента (M) и діаметра изслѣдуемаго бруска. Чтобы опредѣлить зависимость между угломъ g сдвига и величинами M и d, найдемъ сначала какъ выражается зависимость между внутренними и внѣшними силами при крученіи.



Фиг. 76.

Проведемъ произвольное сѣченіе (перпендикулярное) к оси A (фиг. 76) и мысленно отбросимъ лѣвую часть бруска (II). При этомъ правая часть (I) остается въ равновѣсіи, слѣдовательно должно удовлетворят-

ся условіе, чтобы сумма моментовъ всѣхъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ к бруску, равнялась нулю. При отбрасываніи части (II) въ сѣченіи возникаютъ силы взаимодѣйствія, законъ распредѣленія которыхъ только что былъ выясненъ. Эти силы должны теперь трактоваться какъ внѣшнія, а потому можно написать условіе $\Sigma M = 0$.

Возьмемъ въ сѣченіи A элементарную площадку $d\omega$ на разстояніи ρ отъ оси бруска. Равнодѣйствующая внутреннихъ силъ на этотъ элементъ будетъ:

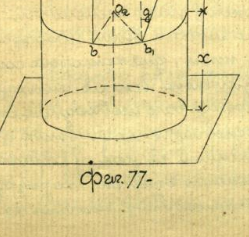
$$k_s d\omega = k'_s \rho \frac{d\omega}{r}$$

Моментъ этой равнодѣйствующей относительно оси выразится какъ: $k'_s \rho^2 \frac{d\omega}{r}$

Суммируя такіе элементарные моменты по всей площади поперечнаго сѣченія, получимъ:

$$M = Pa = \int_0^{\omega} k'_s \rho^2 \frac{d\omega}{r} = \frac{J_0 k'_s}{r_1} = \frac{\pi r^3}{2} k'_s \quad . \ . \ . \ . \quad (16)$$

гдѣ J_0 — полярный моментъ инерціи поперечнаго сѣченія. Такъ какъ k'_s представляетъ собою наибольшее напряженіе при крученіи, то впредь будемъ его обозначать черезъ k_s и, говоря о явленіи крученія, будемъ считать, что здѣсь предполагается напряженіе на элементахъ, принадлежащихъ поверхности цилиндра. Выше получено было $k_s = G g$, а потому имѣемъ g_0 — уголъ сдвига на поверхности цилиндра $g_0 = g_{max} = \frac{Mr}{J_0 G}$
т. е. зависитъ отъ момента крутящаго, обратно пропорціоналенъ третьей степени радіуса и отъ длины бруска не зависитъ.



Фиг. 77-

Уголъ крученія

Возьмемъ безконечно малый элементарный цилиндръ высотою dx, вырѣзанный изъ даннаго бруска на разстояніи x отъ мѣста закрѣпленія и на немъ точки a и b (фиг. 77). Пусть при крученіи точка a переходитъ въ a_1 и b — въ b_1. Изъ чертежа видно, что уголъ $d\varphi$ поворота верхняго сѣченія перваго относительно нижняго равняется: $\angle a_1O_1a - \angle b_1O_2b = \angle a_1O_1a_2$, кромѣ того $a_1a_2 = r\,d\varphi$ и $a_1a_2 = dx.\gamma$ [1)] гдѣ $\gamma = \angle a_1b_1a_2$, а потому $r\,d\varphi = dx.\gamma$ или $d\varphi = \gamma\frac{dx}{r}$. Переходя к конечным величинам, найдем угол крученія:

$$\varphi = \int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^{x}\gamma\frac{dx}{r} = \gamma\frac{x}{r} \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

Точка a взята на поверхности и внутреннее напряженіе выразится таким образом: $k_s = G\gamma$. С другой стороны, из ур-ія $M = \frac{J_0 k_s}{r}$ имѣем, что $k_s = \frac{Mr}{J}$, слѣдовательно $G\gamma = \frac{Mr}{J_0}$.

Из послѣдняго ур-ія опредѣляем γ и подставляем в ур-іе (α)

$$\gamma = \frac{Mr}{GJ_0}; \quad \varphi = \frac{Mr}{GJ_0}\cdot\frac{x}{r} = \frac{Mx}{GJ_0} \quad \ldots\ldots (7)$$

Для конечнаго сѣченія, для котораго $x = l$, имѣем:

$$\varphi = \frac{Ml}{GJ_0} \quad \ldots\ldots (17)$$

Ур-ія $M = \frac{J_0 k_s}{r}$ и (17) дают возможность по данному скручивающему моменту опредѣлить размѣры бруска и деформацію (угол крученія).

Если бы точка a взята была внутри бруска, то повторяя то же разсужденіе, очевидно, получим и тот же результат, ибо угол крученія для даннаго сѣченія величина опредѣленная.

На основаніи вышеуказанной двойственности внутренних сил при сдвигѣ (касательныя напряженія), при крученіи кромѣ напряженій, развивающихся в экваторіальных (поперечных) сѣченіях, должны наблюдаться напряженія и в пл-стях, проходящих через ось бруска.

Фиг. 78.

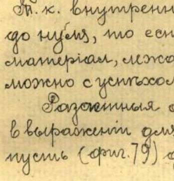
В самом дѣлѣ, как видим из фиг. 78 в пл-сти OBC должны возникать внутреннія напряженія параллельно оси. Это предположеніе может быть провѣрено опытом для тѣл, для которых сопротивленіе в различных направленіях неодинаково. Сюда прежде всего необходимо отнести дерево. Если подвергать скручиванію цилиндрическій деревянный брусок, у котораго ось ||-на направленію волокон, то разруше-

1) Такое допущеніе основано на безконечно малой величинѣ dx.

ніе обыкновенно начинается на поверхности, причем получаются долевыя трещины. Послѣднее обстоятельство объясняется тѣм, что дерево вообще сопротивляется слабѣе силам скалывающим вдоль волокон, нежели поперек.

Т. к. внутреннія напряженія у оси уменьшаются до нуля, то естественно может явиться мысль, что матеріал, лежащій близ оси, в сущности мало полезен и можно с успѣхом сплошныя сѣченія замѣнить кольцами.

Разсчетныя формулы при этом измѣняются лишь в выраженіи для момента инерціи. В самом дѣлѣ пусть (фиг. 79) дано кольцевое сѣченіе с діаметрами d_1 и d_2. Взяв на разстояніи ρ от центра площадку $d\omega$, имѣем, согласно вышеизложенному, что момент внутренних сил относительно оси будет:



Фиг. 79.

$$M = \int_{\omega_2}^{\omega_1} 2\frac{k_s\,d\omega\,\rho^2}{d_1} = \frac{2k_s}{d_1}\int_{\omega_2}^{\omega_1} d\omega\,\rho^2$$

но $d\omega = \rho.d\rho.d\alpha$, а потому получим:

$$M = \frac{2k_s}{d_1}\int_0^{2\pi}\int_{d_2/2}^{d_1/2}\rho^3\,d\alpha.d\rho = \frac{\pi}{16}\cdot\frac{(d_1^4 - d_2^4)}{d_1}k_s =$$

$$= \frac{2\pi}{d_1}\cdot\frac{d_1^4 - d_2^4}{32}k_s = \frac{2k_s}{d_1}J_0,$$

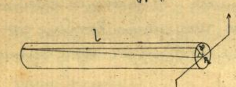
гдѣ J_0 — полярный момент кольца.

Пустотѣлые валы примѣняются в большихъ размѣрах для крупных пароходных, а иногда и для больших паровых пустотѣлых машин.

Хотя по разсчету пустотѣлые валы нѣсколько тяжелѣе сплошных, но при больших діаметрах изготовленіе однородных валов сплошного сѣченія представляет большія затрудненія.

Работа внутренних сил при крученіи.

Пусть цилиндрическій брусок діаметра d подвергается плавному дѣйствію внѣшняго крутящаго момента M, который измѣняется от нуля до значенія M в теченіи конечнаго промежутка времени. При этом крайнія сѣченія поворачивают друг относительно друга на угол $\varphi = \frac{Ml}{Jg}$ (фиг. 80). Работа внутреннихъ силъ равна работѣ T внѣшней пары.



фиг. 80.

Пусть в данный момент пара возростая от нуля, достигла величины M' при чем ей соотвѣтствует угол крученія φ'. В слѣдующій момент брусок получит крученіе $d\varphi'$. Элементарная работа внѣшней пары будет:

$M' d\varphi'$, а полная работа: $T = \int_0^{\varphi} M' d\varphi'$,

если φ - конечный угол крученія. Но угол крученія φ', соотвѣтствующій величинѣ M' будет:

$\varphi' = \frac{M'l}{J_0 g}$, а потому $T = \int_0^M \frac{M' \cdot l \cdot dM'}{J_0 g} = \frac{M^2 l}{2 J_0 g}$

А так как $M = \frac{2 J_0 k_s}{d}$, то работа внѣшних, слѣдовательно и внутренних сил будет:

$$T = \frac{4 J_0^2 k_s^2 l}{2 d^2 J_0 g} = \frac{2 J_0 l k_s^2}{g d^2} = \frac{\pi d^2 l}{4} \cdot \frac{k_s^2}{4g} = W \frac{k_s^2}{4g} \quad \cdots \quad (18)$$

если W - обем бруска. Выраженіе $\frac{k_s^2}{4g}$ представляет поэтому значеніе работы внутренних сил, отнесенных к единицѣ обема (среднее)[1]

Натяженіе k_s относится к частицам, расположенным на внѣшней поверхности цилиндра.

Переходя к опредѣленію величины деформаціи и напряженія при динамическом дѣйствіи силы, надо замѣтить, что при внезапном приложеніи пары M она будет скручивать брусок до тѣх пор, пока работа внутренних сил сдѣлается равной работѣ сил внѣшних. Другими словами, если угол крученія при динамическом приложеніи момента назовем через φ, то должно существовать равенство $M\varphi = \frac{k_s^2}{4g} W$[2], но т. к. угол крученія при статическом дѣйствіи силы $\varphi_0 = \frac{Ml}{J_0 g}$, то имѣем, вставляя значеніе M в предыдущее выраженіе, $\varphi_0 \varphi \frac{J_0 g}{l} = \frac{k_s^2}{4g} W$. Принимая во вниманіе далѣе, что

[1] На основаніи (14) можно получить T иначе, а именно $T = \int_0^W dw \frac{k_s'^2}{2g} = \int_0^W \varsigma d a d\varsigma dx \frac{k_s'^2}{2g} = \int_0^W \frac{1}{2 g r^2} \varsigma^2 da \cdot dx \cdot k_s^2 = \frac{k_s^2}{2 g r^2} \int_0^W \varsigma^2 d\varsigma \cdot da \cdot dx = \frac{k_s^2}{2g} \cdot \frac{W}{2} = W \frac{k_s^2}{4g}$, гдѣ $k_s' = \frac{k_s \varsigma}{r}$

[2] Конечно в предѣлах упругости.

$k_s = \vartheta g$, получим:

$$\frac{\varphi g \varphi_0 \pi d^4}{32 l} = \frac{\vartheta^2 g^2}{4g} \frac{\pi d^2 l}{4} \text{ или } \frac{\varphi \varphi_0 d^2}{32 l} = \frac{\vartheta^2}{16} l,$$

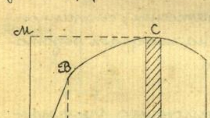
гдѣ ϑ - угол сдвига при ударном дѣйствіи пары. Но кромѣ того $\vartheta = \frac{\varphi \cdot d}{2 l}$, почему окончательно

$\varphi \cdot \varphi_0 = \frac{\varphi^2 d^2}{2 l d^2} l$, откуда $\varphi = 2\varphi_0$ и $\vartheta = 2\vartheta_0$

Таким обр. деформація при внезапном дѣйствіи силы, а слѣдовательно и напряженія вдвое больше нежели при плавном приложеніи того же момента M.

Не трудно на основаніи сказанного, найти деформацію и в том случаѣ, если в момент приложенія пары плечи, рычагов обладают нѣкоторой угловой скоростью отличной от нуля. Это может имѣть мѣсто, если силы P_1 и P представлены грузами, падающими с нѣкоторой высоты.

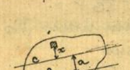
Непосредственные опыты над крученіем брусков из упругаго матеріала показывают, что деформація (угол крученія) при всѣх прочих данных прямо пропорціональна дѣйствующей силѣ. Эта зависимость наблюдается до извѣстнаго предѣла, до котораго получаемые углы крученія являются упругими, т.е. по разгруженіи бруска исчезают. Если крутящій момент постоянно возрастает, то при нѣкотором значеніи его наблюдается, что приращеніе углов крученія начинает идти гораздо быстрѣе приращенія моментов; при разгруженіи бруска замѣчается остающійся угол крученія. Если откладывать (фиг. 81) по оси абсцисс значеніе φ, а по оси ординат - соотвѣтственные моменты, то получим діаграмму аналогичную той, какая строится при растяженіи (сжатіи) легко видѣть, что и здѣсь площадь діаграммы выразит собою работу внутренних сил бруска $T = \int_0^{\varphi} M d\varphi$.



Фиг. 81.

Моменты инерціи.

Пусть дана плоская фигура и требуется найти ея момент инерціи относительно оси, проходящей через центр тяжести C. Возьмем (фиг. 82) элементарную площадку $d\omega$ на разстояніи x от ея оси. Ея момент инерціи относительно этой оси $j_c = x^2 d\omega$. Момент инерціи всей фигуры относительно той же оси:


Фиг. 82.

$$\mathfrak{J}_c = \int_0^\omega x^2 d\omega \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

причем интегрированіе распространяется на площадь всей фигуры.

Опредѣлим теперь момент инерціи относительно оси A ||ой оси C и отстоящей от нея на разстояніи $\underline{a}$. Элементарный момент той же площадки $d\omega$ относительно оси A: $j_a = (x+a)^2 d\omega$.

Полный же момент инерціи данной фигуры относительно той же оси: $\mathfrak{J}_a = \int_0^\omega (x+a)^2 d\omega = \int_0^\omega (x^2 + 2xa + a^2)\, dx = \int_0^\omega x^2 dx + \int_0^\omega a^2 d\omega + \int_0^\omega 2xa\, d\omega = \int_0^\omega x^2 d\omega + \int_0^\omega a^2 d\omega + 2a\int_0^\omega x\, d\omega$, но здѣсь $\int_0^\omega x^2 d\omega = \mathfrak{J}_c$, $\int_0^\omega a^2 d\omega = a^2 \int_0^\omega d\omega = a^2\Omega$, гдѣ Ω – площадь данной фигуры. Что касается члена $2a\int_0^\omega x\,d\omega$, то очевидно он обращается в нуль, ибо как извѣстно из элементарной механики, выраженіе $\int_0^\omega x\,d\omega$[1] относительно оси, проходящей через центр тяжести равно 0 для плоской фигуры. Так обр. искомый момент инерціи $\mathfrak{J}_a$ выражается так:

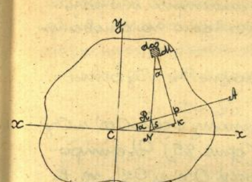
$$\mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_c + \Omega a^2 \quad \ldots \quad (20)$$

т.е. момент инерціи плоской фигуры относительно нѣкоторой оси, лежащей в плоскости фигуры, равен моменту инерціи той же фигуры относительно оси, ||ой данной и проходящей через центр тяжести, сложенному с произведеніем площади фигуры на квадрат разстоянія между осями.

Момент инерціи относительно произвольной оси.

Положим, что уже найден момент инерціи данной фигуры относительно двух произвольных осей координат (предполагаются прямоугольныя координаты), проходящих через центр тяжести (фиг. 83), т.е. нам извѣстны $\mathfrak{J}_x$ и $\mathfrak{J}_y$; требуется найти момент инерціи фигуры

[1] т.е. статическій момент площади относительно оси, проходящей через центр и лежащей в плоскости фигуры.



Фиг. 83.

относительно оси AC, проходящей через точку C. На основаніи ур-ія (19):

$\mathfrak{J}_a = \int_0^\omega a^2 d\omega$, гдѣ $a = \overline{MP}$, но из чертежа видно $a = \overline{MK} - \overline{PK}$.

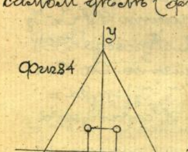
Из Δ-ка же MNK имѣем: $MK = y\cos\alpha$. Далѣе из того же чертежа находим $RS = PK = NC\sin\alpha = x\sin\alpha$ и слѣдовательно $a = y\cos\alpha - x\sin\alpha$.

Подставляя в ур-іе (19) найденное значеніе a получим

$$\mathfrak{J}_a = \int_0^\omega (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 d\omega = \int_0^\omega y^2\cos^2\alpha\, d\omega + \int_0^\omega x^2\sin^2\alpha\, d\omega - \int_0^\omega 2xy\cos\alpha\sin\alpha\, d\omega =$$
$$= \mathfrak{J}_x\cos^2\alpha + \mathfrak{J}_y\sin^2\alpha - \sin 2\alpha\int_0^\omega xy\,d\omega = \mathfrak{J}_x\cos^2\alpha + \mathfrak{J}_y\sin^2\alpha - W_{xy}\sin 2\alpha$$

Интеграл $W_{xy} = \int_0^\omega xy\,d\omega$ называется центробѣжным моментом инерціи и для каждой плоской фигуры можно найти такое положеніе осей координат, при котором выраженіе W_{xy} обращается в нуль. Эти оси называются главными осями сѣченія (главныя оси инерціи).

Умѣть найти положеніе главных осей для каждой плоской фигуры весьма существенно, в особенности в вопросѣ о косом изгибѣ. В фигурах, имѣющих ось симметріи, она является одной из главных осей. В самом дѣлѣ (фиг. 84), напр., возьмем равнобедренный треугольник, в котором ось Oy – ось симметріи. Выраженіе $W_{xy} = \int_0^\omega d\omega . x . y$ представляет собою сумму безконечно большого числа безконечно малых произведеній $d\omega . x . y$. Но для каждаго элемента $d\omega$ – с абсциссой $+x$, имѣется по другую сторону симметрично расположенный элемент $d\omega$ с абсциссой $-x$, при той же ординатѣ. А потому можно сказать,

Фиг 84


что $\int_0^\omega d\omega xy = \{d\omega x_1 y_1 - d\omega x_1 y_1 + d\omega x_2 y_2 - d\omega x_2 y_2 + \ldots + d\omega x_\omega y_\omega - d\omega x_\omega y_\omega\} = 0$

Если имѣются двѣ оси симметріи, то само собой понятно, что обѣ онѣ будут главными.

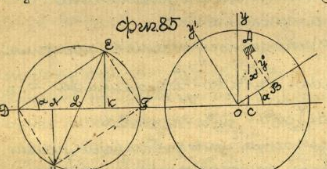
Если фигура не имѣет осей симметріи, то разысканіе главных осей может быть найдено на основаніи слѣдующих разсужденій.

Пусть извѣстны моменты инерціи J_x и J_y относительно главных осей Ox и Oy.

Возьмем какую либо другую систему осей Ox' и Oy' с тѣм же началом координат (фиг. 85). Центробѣжный момент относительно осей Ox' и Oy', т. е. W_{xy} может быть получен как сумма произведеній

$$W'_{xy}=\int_0^\omega d\omega . x'y'$$

Фиг. 85



Для нѣкотораго элемента A имѣем: $AB=y'$; $OB=x'$; $AC=y$; $OC=x$. Формулы преобразованія координат дают:

$y'=x\cos\alpha+y\sin\alpha$ и $x'=y\cos\alpha-x\sin\alpha$ или

$$W'_{xy}=\int_0^\omega d\omega(x\cos\alpha+y\sin\alpha)(y\cos\alpha-x\sin\alpha)=\int_0^\omega d\omega\, xy\cos^2\alpha-\int_0^\omega d\omega\, xy\sin^2\alpha+\frac{1}{2}\int_0^\omega y^2\sin 2\alpha\, d\omega-\frac{1}{2}\int_0^\omega x^2\sin 2\alpha\, d\omega=\frac{1}{2}(J_x-J_y)\sin 2\alpha+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)W_{xy}=\frac{1}{2}(J_x-J_y)\sin 2\alpha$$

ибо $W_{xy}=0$, т. к. оси Ox и Oy главныя (по условію).

Весьма удобно, зная J_x и J_y найти значеніе W'_{xy} графически. Для этого в выбранном масштабѣ откладывают отрѣзки $OD=J_x$ и $OF=J_y$. На части $DF=J_x-J_y$ описывают окружность с центром L. Проведя $DE \parallel Ox'$, из точки E опускают перпендикуляр на Ox. Отрѣзок $EK=DE\sin\alpha=DF\cos\alpha.\sin\alpha$; $EK=\frac{1}{2}(J_x-J_y)\sin 2\alpha=W'_{xy}$. Выше было найдено, что $J'_x=J_x\cos^2\alpha+J_y\sin^2\alpha$, преобразуя это выраженіе, получим:

$$J'_x=J_x\cos^2\alpha+J_y(1-\cos^2\alpha)=J_y+(J_x-J_y)\cos^2\alpha$$

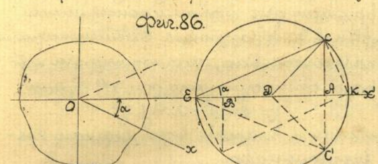
Подобно этому $J'_y=J_x\sin^2\alpha+J_y\cos^2\alpha=J_x+(J_x-J_y)\cos^2\alpha$.

Из фигуры имѣем $OK=OD-DK=J_x-DE\cos\alpha=J_x-DF\cos^2\alpha=J_x+(J_x-J_y)\cos^2\alpha=J'_y$, точно также $ON=OF+FN==J_y+FM\cos\alpha=J_y+DE\cos^2\alpha=J_y+(J_x-J_y)\cos^2\alpha=J_x$

Слѣдовательно, зная главные моменты инерціи весьма легко найти моменты инерціи и центробѣжный момент относительно произвольных осей Ox' и Oy'.

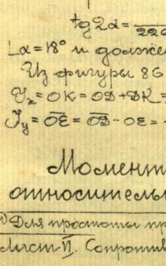
Теперь легко рѣшить и обратную задачу, а именно, по двум извѣстным моментам инерціи (относительно двух произвольных осей координат) найти главныя оси. Слѣдовательно даны $J'_x=OA$ и $J'_y=OB$ (фиг. 86) на перпендикулярѣ AC откладываем $AC=W'_{xy}$ и описываем окружность радіусом DC.

Фиг. 86.



Угол α – CED, отложенный вниз от Ox' и дает направленіе главной оси Ox. Если W'_{xy} отрицательный, то надо отложить его вниз, т. е. на AC' и угол α вверх от оси Ox'. Угол между осями Ox и Ox, опредѣляется весьма просто; из $\Delta^{ка}$ ACD имѣем $\overline{AC}=\overline{AD}\,tg 2\alpha$ или $tg 2\alpha=\frac{2W_{xy}}{J_x-J_y}$

Для примѣра возьмем так называемый зет-образный профиль (фиг. 87). Моменты инерціи J'_x и J'_y находятся легко[1)]



Фиг. 87.

$$J'_x=\frac{80.200^3-70.174^3}{12}=22603194=\overline{OA}$$

$$J'_y=\frac{174.10^3+150^3.13}{12}=3670750=OB$$

$$W'_{xy}=-2.13.70.40.93{,}5=-6806800=\overline{AC}$$

(Знак минус получается потому, что для верхней полки отрицательны абсциссы, а для нижней ординаты)

Слѣдовательно,

$$tg 2\alpha=\frac{2.6806800}{22603194-3670750}=0{,}71906$$ откуда

$\angle\alpha=18^\circ$ и должен быть отложен вверх от оси Ox'.

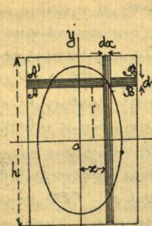
Из фигуры 86.

$$J_x=OK=OD+DK=\frac{1}{2}(J'_x+J'_y)+\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}(J'_x+J'_y)+\frac{AC}{\sin 2\alpha}=24717290$$

$$J_y=\overline{OE}=\overline{OD}-OE=\frac{1}{2}(J'_x+J'_y)-\frac{AC}{\sin 2\alpha}=1556646.$$

Моменты инерціи прямоугольника относительно главных его осей.

1) Для простоты пренебрегают закругленіями.



Фиг. 88.

Проведем оси через центр тяжести данного прямоугольника, параллельно сторонам (фиг. 88), а затѣм на разстояніи y и $y+dy$ от оси $x^{ов}$ возьмем двѣ параллельныя линіи AB и A_1B_1, образующія элементарный прямоугольник, момент инерціи котораго относительно оси $x^{ов}$ будет:

$$j_x = d\omega y^2 = a.dy.y^2$$

Момент инерціи всего данного прямоугольника:

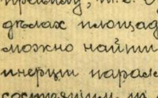
$$J_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} a\,dy.y^2 = \left(\frac{ay^3}{3}\right)_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = a\left(\frac{h^3}{24}+\frac{h^3}{24}\right) = \frac{ah^3}{12} \quad \ldots (21)$$

Подобно указанному выводу, относительно $y^{ов}$ получим, что

$$J_y = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} h.dx.x^2 = \frac{ha^3}{12}$$

Момент инерціи параллелограмма.

Чтобы опредѣлить момент инерціи для параллелограмма относительно оси Ox, можно было по общему правилу, т. е. суммируя элементарные моменты в предѣлах площади данной фигуры; но в данном случаѣ можно найти момент инерціи проще. Момент инерціи параллелограмма (фиг. 89) разсматривается состоящим из двух моментов: момента инерціи площадки A и – площадки B; послѣднюю можно перенести вдоль оси BC и от этого величина момента не измѣнится.



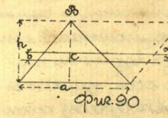
Фиг. 89

Слѣдовательно искомый момент инерціи параллелограмма равен моменту инерціи прямоугольника при тѣх же основаніях и высотѣ, т. е.

$$J_x = \frac{ah^3}{12} \quad \ldots \ldots (21')$$

Момент инерціи треугольника.

Для опредѣленія момента инерціи тр-ка относительно оси Ox, проходящей через центр тяжести, проведем через средину высоты ось $\alpha \parallel^{ую}$ оси x, а тр-к дополним до параллелограмма (фиг. 90), момент инер-



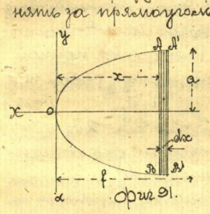
Фиг. 90

ціи котораго относительно оси α, проходящей через центр тяжести, будет $J_\alpha = \frac{ah^3}{12}$. Не трудно видѣть, что момент инерціи J'_α тр-ка относительно той же оси $\alpha\alpha$ будет = половинѣ момента инерціи J_α параллелограмма, т. е. $J'_\alpha = \frac{J_\alpha}{2} = \frac{ah^3}{24}$. На основаніи формулы (20) имѣем:

$$J_x = J_\alpha - \Omega b^2 = \frac{ah^3}{24} - \frac{ah}{2}\left(\frac{h}{6}\right)^2 = \frac{ah^3}{36} \quad \ldots (22)$$

Момент инерціи части пл-ди ограниченной параболой.

Проведем на разстояніи x и $(x+dx)$ линіи AB и $A_1B_1 \parallel^{ыя}$ оси $y^{ов}$, онѣ образуют фигуру, которую свободно можно принять за прямоугольник (фиг. 91). площадь котораго $d\omega = dx.2y$. Из ур-ія параболы $y^2 = 2px$ послѣ дифференцированія, имѣем: $2ydy = 2pdx$, откуда $dx = \frac{ydy}{p}$. Момент инерціи элементарного прямоугольника $j_x = (2y)^3\frac{dx}{12}$, замѣняя dx, находим:



Фиг. 91.

$$j_x = \frac{1}{3p}2y^4dy$$

Полный момент инерціи площади ограниченной параболой, будет:

$$J_x = \int_0^a \frac{2}{3}\frac{y^4dy}{p} = \frac{2}{3p}\int_0^a y^4dy = \frac{2a^5}{15p} \quad \ldots \quad (23)$$

Разсмотрѣнные нами моменты инерціи называются „экваторіальные моменты инерціи", так как оси инерціи лежат в плоскости фигуры.

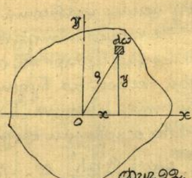
Если же будем брать моменты относительно оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной пл-сти фигуры, то такой момент инерціи называется полярным.

Полярный мом. инерціи плоской фигуры.

На данной фигурѣ возьмем элемент. площадку. Ея полярный момент относительно оси проходящей через точку O и перпендикулярной к плоскости чертежа (фиг. 92) $j_0 = d\omega.\rho^2$. Полярный момент инерціи всей фигуры:

$$J_0 = \int_0^\omega \rho^2 d\omega = \int_0^\omega (y^2+x^2)d\omega = \int_0^\omega x^2 d\omega + \int_0^\omega y^2 d\omega = J_x + J_y$$

и так $\quad J_0 = J_x + J_y$ . . . . (24)



т.е. полярный момент = суммѣ экваторіальных моментов относительно двух взаимно перпендикулярных осей, пересѣкающихся в точкѣ O, через которую проходит и полярная ось.

Фиг. 92.

Экватор. м. инерціи круга относительно оси проходящей через центр тяжести.

Вмѣсто того, чтобы разрѣшать вопрос общими пріемами, удобнѣе здѣсь опредѣлить этот момент через полярный который находится гораздо легче. Экваторіальный момент инерціи круга, вслѣдствіе полной симметричности послѣдняго равны между собой т. е.

$$J_x = J_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24')$$

Вслѣдствіе чего по ур-ію (24) $J_0 = J_x + J_y = 2J_x = 2J_y$

Для опредѣленія величины J_0, проведем два концентрических круга (фиг. 93) радіусов ϱ и $(\varrho + d\varrho)$ и затѣм два радіуса, угол между которыми безконечно мал и равен $d\alpha$. От пересѣченія кругов и радіусов, получаем элементарный прямоугольник abcd, площадь его $\omega = \varrho . d\varrho . d\alpha$; ея полярный момент инерціи $j_0 = \varrho . d\varrho . d\alpha . \varrho^2 = \varrho^3 d\varrho . d\alpha$. Полный же полярный момент инерціи круга

Фиг. 93.

$$J_0 = \int_0^{\pi} \int_0^{R} \varrho^3 d\varrho\, d\alpha$$

Интегрированіе производится по обѣим перемѣнным в соотвѣтственных предѣлах. Итак полярный момент инерціи круга:

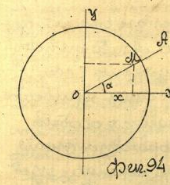
$$J_0 = 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

гдѣ $D = 2R$. Экватор. мом. инерціи круга по (24)

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_0 = \frac{\pi D^4}{64} \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Эллипс инерціи

Дана плоская фигура, у которой оси Ox и Oy расположены по направленію главных осей. Момент инерціи



Фиг. 94

относительно оси A (фиг. 94)

$$J_a = J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Положим $OM = \frac{1}{\sqrt{J_a}} = R \quad . \quad . \quad . \quad (b)$

тогда:

$$x = R\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{J_a}}$$

и

$$y = R\sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{J_a}} \quad \text{или}$$

$$\cos^2\alpha = x^2 J_a \quad \text{и} \quad \sin^2\alpha = y^2 J_a$$

подставляя в (a) и производя сокращенія:

$$J_a = x^2 J_x J_a + y^2 J_y J_a \; ; \quad 1 = x^2 J_x + y^2 J_y$$

Представим это ур-іе в слѣдующем видѣ:

$$1 = \left\{\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{J_x}}}\right\}^2 + \left\{\frac{y}{\sqrt{\frac{1}{J_y}}}\right\}^2 ;$$

тогда по аналогіи с (b) можно написать $1 = \frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2}$, это есть ур-іе эллипса, отнесенное к его главным полуосям

$$R_1 = \sqrt{1/J_x} \quad \text{и} \quad R_2 = \sqrt{1/J_y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Так как угол α взят был произвольно, то очевидно измѣняя его в $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots$ и откладывая соотвѣтственно на линіях $OA_1, OA_2, OA_3 \ldots$ отрѣзки $OM_1 = K'$, $OM_2 = K''$ и т.д. получим ряд точек $M_1, M_2, \ldots$ координаты которых удовлетворяют полученному ур-ію эллипса, который носит названіе эллипса инерціи. Его главныя оси будут главныя оси сѣченія. Зная величины J_x и J_y для даннаго сѣченія, по полуосям $R_1 = \sqrt{1/J_x}$ и $R_2 = \sqrt{1/J_y}$ строим эллипс; проводя в нем діаметр под произвольным углом α, находим, что половина этого діаметра равна $OM = \frac{1}{\sqrt{J_a}}$, откуда имѣем $J_a = \frac{1}{OM^2}$ (в выбранном масштабѣ).

Напр., для прямоугольника со сторонами a и h эллипс инерціи имѣет ур-іе:

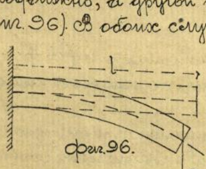
$$\left\{\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{\frac{ah^3}{12}}}}\right\}^2 + \left\{\frac{y}{\sqrt{\frac{1}{\frac{ha^3}{12}}}}\right\}^2 = \left\{\frac{x}{\sqrt{\frac{12}{ah^3}}}\right\}^2 + \left\{\frac{y}{\sqrt{\frac{12}{a^3h}}}\right\}^2$$

Изгиб.

Если на призматическій произвольнаго сѣченія брусок, лежащій свободно на двух опорах A и B дѣйствует сила P, направленная перпендикулярно к оси (фиг. 95), то он под дѣйствіем этой силы изгибается. Получается особый вид формоизмѣненія тѣла; именно - изгиб бруска. Подобное явленіе наблюдается

Фиг. 95.

и в том случаѣ, если один конец бруска закрѣплен неподвижно, а другой подвергнут дѣйствію силы P (фиг. 96). В обоих случаях ось бруска искривляется и мѣрой этого формоизмѣненія служат разстоянія точек оси в новом положеніи от их прежняго положенія; напр. отрѣзки CC_1, DD, и т. д. Эти отрѣзки называются стрѣлами прогиба и обозначаются обыкновенно буквами f и F.



Фиг. 96.

Число внѣшних сил, дѣйствующих на брусок, способ их приложенія может быть весьма разнообразен, равно как и форма бруска. Начнем наше разсмотрѣніе явленія изгиба с наиболѣе простого случая. Призматическій брусок укрѣплен горизонтально одним концом в стѣну так, чтобы одна из главных осей конечнаго сѣченія была вертикальна. На другой его конец дѣйствует сила P. Собственным вѣсом бруска пока пренебрегаем. Пусть сила P приложена вертикально в центрѣ тяжести конечнаго сѣченія и направлена, слѣдовательно, в пл-сти, содержащей в себѣ ось бруска, а также одну из главных осей сѣченія (вертикальную). При этих условіях, как показывают наблюденія, ось бруска искривляется оставаясь в той же пл-сти дѣйствія силы P, т. е. кривая получается плоская[1]) Цѣлый ряд опытов, произведенных Gerstner, Wertheim и др. учеными, показал,

1) Потому и все явленіе носит названіе плоскаго изгиба.

что стрѣла прогиба f, наибольшая величина которой получается в точкѣ приложенія силы P (фиг. 96) до извѣстнаго предѣла пропорціональна силѣ P, т. е. получается зависимость:

$$f = \alpha . P,$$

гдѣ α — коэфф. пропорціональности. Для сѣченія прямоугольнаго, у котораго высота и основаніе соотвѣтственно будут h и a, величина стрѣлы прогиба будет равна:

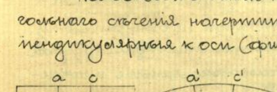
$$f_1 = \beta \frac{P l^3}{a h^3} \qquad (27)$$

Здѣсь β — коэффиціент, очевидно, зависящій от свойств матеріала, формы поперечнаго сѣченія, но не от длины l бруска. Такая пропорціональность продолжается до нѣкотораго значенія силы $P = P_1$. При измѣненіи силы P в этих предѣлах; т. е. от нуля до P_1, получающіяся стрѣлки прогиба f, исчезают по прекращеніи дѣйствія внѣшней силы. При значеніи P большем нежели P_1, стрѣлки прогиба оказываются состоящими из двух частей, из которых одна исчезает по снятіи нагрузки, а другая остается, т. е. брусок уже не может выпрямиться вполнѣ. При нѣкоторой величинѣ $P = P_2$ происходит разрушеніе — излом бруска.

Из сказаннаго видно, что явленіе изгиба также подчиняется общему закону пропорціональности. Величина разрушающаго груза зависит от длины бруска, от размѣров формы сѣченія. Приступая к изученію явленій изгиба, полагаем, что внѣшняя нагрузка дѣйствует плавно в предѣлах упругости.

Внутреннія силы.

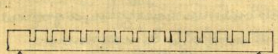
Если на боковой стѣнкѣ не нагруженнаго бруска прямоугольнаго сѣченія начертить двѣ прямыя ab и cd,[1]) перпендикулярныя к оси (фиг. 97), то при изгибѣ параллельность их исчезает. Прямыя $a'b'$ и $c'd'$ остаются при небольших деформаціях почти прямыми и составляют по прежнему прямые углы с осью бруска в новом положеніи.



Фиг. 97.

1) Предполагается, что боковыя грани вертикальны.

Непосредственными измѣреніями можно убѣдиться, что дуга $a'c' > ac$ и $b'd' < bd$ и $m'n' = mn$. То обстоятельство, что $a'c' > ac$ было замѣчено давно и объяснялось развивающимися здѣсь силами растяженія, которыя удлиняют волокна. При этом предполагалось, что удлиненіе происходит на той и другой сторонѣ бруска наибольшее (растяженіе) на выпуклой и наименьшее (равное нулю) на вогнутой. Объясненіе это держалось больше столѣтія, пока французскій изслѣдователь Duhamel de Monceau не произвел опыты, ясно указывающіе на ошибочность этого объясненія и разъяснил наглядно, что на внутренней (вогнутой) сторонѣ происходит сжатіе. Duhamel на одной сторонѣ деревяннаго бруска дѣлал перпендикулярные к оси прорѣзы. В них вставлялись довольно свободно деревянныя же шпонки. Положив брус (фиг. 98) прорѣзами вверх (на вогнутую сторону) он убѣдился, что для

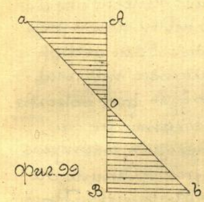


Фиг. 98.

разрушенія такого бруска надо приложить силу почти такую же как для излома цѣлаго бруска того же матеріала и тѣх же размѣров. Этого не могло быть, если бы на вогнутой сторонѣ было растяженіе волокон; послѣднія как перерѣзанныя по длинѣ не могли бы сопротивляться растягивающим усиліям. Кромѣ того, заложенныя свободно в прорѣзы деревянныя шпонки, оказались при деформаціи сильно защемленными, что прямо указывает на существующее в этих волокнах сжатіе. Подвергая испытанію другой брусок таких же размѣров, но уже обращенной прорѣзами вниз, Duhamel убѣдился, что сопротивленіе такого бруска разрушающим усиліям значительно меньше и шпонки выпадают из прорѣзов; очевидно, на выпуклой сторонѣ наблюдалось растяженіе волокон.

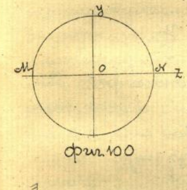
Магп, производя опыты над изгибом непосредственными измѣреніями помощью стальных линеек, показал, что величины растяженія и сжатія убывают, по мѣрѣ приближенія волокон к нѣкоторой сред-

ней линіи, которая остается неизмѣнной, а закон измѣненія деформаціи от одного крайняго волокна до другого может быть представлен прямой ab (фиг. 99)



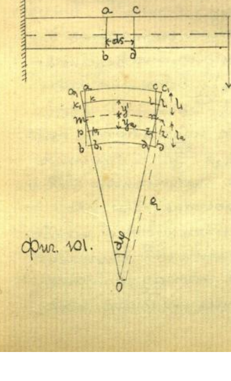
Фиг. 99

Отсюда слѣдует притти к заключенію, что в брускѣ при изгибѣ данной силой P матеріал подвергается растяженію на одной сторонѣ и сжатію на другой (вогнутой), причем напряженіе матеріала распредѣляется не равномѣрно. Кромѣ того в каждом брускѣ независимо от формы его поперечнаго сѣченія должен находится слой, в котором постепенно убывающее растяженіе переходит в сжатіе или наоборот; слой этот, очевидно, не подвергается напряженіям и носит названіе нейтральнаго слоя. Линія MN в каком либо поперечном сѣченіи (фиг. 100), в котором лежат нейтральныя волокна называется нейтральной линіей даннаго сѣченія.



Фиг. 100

Выведем теперь аналитическое выраженіе внутренняго напряженія при изгибѣ. Возьмем на брускѣ два ||ныя поперечных сѣченія, лежащих друг от друга на весьма близком разстояніи ds и вынесем заключенную между ними часть $abcd$ в сторону (фиг. 101). Послѣ деформаціи волокно ac удлинится до a_1c_1, а волокно bd укоротится до b_1d_1. Волокно mn, как принадлежащее нейтральному слою остается без измѣненія. Вслѣдствіе малости дуг a_1c_1, b_1d_1 и mn их можно свободно принять за дуги кругов одного центра.



Фиг. 101.

Продолжая затѣм стороны a_1b_1 и c_1d_1 до пересѣченія в O, получим въ этой точкѣ центръ кривизны дугъ a_1c_1, mn и b_1d_1. При этомъ предполагаемъ, что сѣченія ab и cd послѣ деформаціи остаются плоскими. Какъ увидимъ ниже, такое предположеніе не оправдывается въ дѣйствительности, но на правильность результата это допущеніе не вліяетъ. Если деформаціи въ растянутыхъ и сжатыхъ частяхъ измѣняются по закону прямой линіи, то взявъ два волокна растянутое kl на разстояніи y_1 и сжатое pr на разстояніи y_2 отъ нейтральнаго слоя, увидимъ, что первое обратится въ k_1l_1 и второе въ p_1r_1. До деформаціи, очевидно, были равенства $ac = kl = mn = pr = bd = ds$. Называя радіусъ кривизны дуги mn черезъ $\varrho = Om$, послѣ деформаціи имѣемъ: $mn = ds = d\varphi . \varrho$; $k_1l_1 = d\varphi(\varrho + y_1)$; $p_1r_1 = d\varphi(\varrho - y_2)$, откуда относительное удлиненіе волокна kl:

$$i_1 = \frac{k_1l_1 - kl}{kl},$$

но такъ какъ $kl = mn = ds$, то получимъ:

$$i_1 = \frac{k_1l_1 - mn}{mn} = \frac{d\varphi(\varrho + y_1) - d\varphi . \varrho}{\varrho . d\varphi} = \frac{y_1}{\varrho}$$

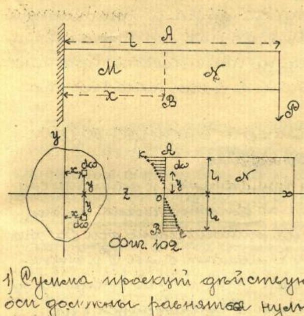
Точно также относительное сжатіе волокна pr:

$$i'' = \frac{mn - p_1r_1}{mn} = \frac{d\varphi\varrho - d\varphi(\varrho - y_2)}{\varrho . d\varphi} = \frac{y_2}{\varrho}$$

Соотвѣтствующія же имъ напряженія будутъ:

$$K_z' = \frac{E_1 y_1}{\varrho} \quad \text{и} \quad K_z'' = \frac{E_2 y_2}{\varrho}$$

Такимъ образомъ внутреннее напряженіе растяженія и сжатія при изгибѣ прямо пропорціонально разстоянію отъ нейтральнаго слоя (y_1 и y_2) и обратно пропорціонально радіусу кривизны (ϱ). Переходя къ крайнимъ волокнамъ получаемъ, что въ нихъ проявляются наибольшія напряженія растяженія $K_z = \frac{Ee_1}{\varrho}$ и сжатія $K = \frac{Ee_2}{\varrho}$. Разрѣжемъ данный брусокъ плоскостью AB и вынесемъ отрѣзанную часть N въ сторону (фиг. 102). Очевидно, чтобы она оставалась въ равновѣсіи, необходимо должны существовать въ сѣченіи AB внутреннія силы (силы взаимодѣйствующія между частями бруска M и N), законъ распредѣленія которыхъ, какъ



Фиг. 102

уже было сказано выражается прямой kl.

Проведемъ черезъ точку O координатныя оси Ox и Oy и напишемъ условіе равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на вынесенную часть. Изъ теоретической механики извѣстно, что для этого нужно выполненіе двухъ условій:

1) Сумма проекцій дѣйствующихъ силъ на координатныя оси должны равняться нулю,

2) Сумма моментовъ относительно тѣхъ же осей такъ же должны равняться нулю.

Разсмотримъ сначала условіе $\Sigma X = 0$. Проекція силы P на ось x-овъ обращается въ нуль, т. к. направленіе силы перпендикулярно оси. Для опредѣленія суммы проекцій внутреннихъ силъ на ту же ось возьмемъ элементарную площадку $d\omega$ на разстояніи y отъ оси Ox въ сѣченіи AB. Внутреннее напряженіе на этой площадкѣ назовемъ черезъ k. Сумма всѣхъ элементарныхъ внутреннихъ силъ для растянутой части ω_1 будетъ $\int_0^{\omega_1} k . d\omega$. Внутреннія силы для части сжатой дадутъ, очевидно, сумму $-\int_0^{\omega_2} k d\omega$, если ω_2 — площадь сжатой части сѣченія. Полная сумма проекцій внутреннихъ силъ на ось Ox напишется какъ:

$$\int_0^{\omega_1} k_z d\omega - \int_0^{\omega_2} k_s d\omega = \int_0^{\omega_1} \frac{E_1 y d\omega}{\varrho} - \int_0^{\omega_2} \frac{E_2 y d\omega}{\varrho} = \frac{1}{\varrho}\left\{E_1 \int_0^{\omega_1} y d\omega - E_2 \int_0^{\omega_2} y d\omega\right\} = 0$$

Для матеріаловъ, у которыхъ модули упругости сжатія и растяженія E_1 и E_2 равны между собою, получимъ выраженіе

$$\frac{E}{\varrho}\left\{\int_0^{\omega} y d\omega - \int_0^{\omega_2} y d\omega\right\} = 0, \text{ откуда } \int_0^{\omega_1} y d\omega = \int_0^{\omega_2} y d\omega,$$

что возможно лишь при условіи $\omega_1 = \omega_2$ т. е. что нейтральный слой проходитъ черезъ центръ тяжести сѣченія AB. Но т. к. сѣченіе взято совершенно произвольно, то слѣдовательно, нейтральный слой проходитъ черезъ центры тяжести всѣхъ сѣченій бруска.

Для желѣза и стали модули упругости E_1 и E_2

почти не отличаются другъ отъ друга и принимаютъ $E_1 = E_2 = E = 20000$ klg. на m/m^2. Для другихъ матеріаловъ разница между E_1 и E_2 больше, но практически принимаютъ что $E_1 = E_2$ для большинства строительныхъ матеріаловъ.

Зависимость между внутренними и внѣшними силами.

Второе условіе равновѣсія, примѣнимое къ данному случаю, сводится къ положенію, что алгебраическая сумма моментовъ всѣхъ внѣшнихъ силъ относительно оси Oz (фиг. 102) должна быть нулемъ, т. к. моментъ силы P и внутреннихъ силъ относительно осей x-овъ и y-овъ равны нулю. Для сѣченія AB моментъ силы P выражается какъ:

$$M_x = P(l-x)$$

Для опредѣленія момента внутреннихъ силъ относительно той же оси Oz, возьмемъ въ сѣченіи элементарную площадку $d\omega$ на разстояніи y отъ нейтральнаго слоя. Моментъ внутреннихъ силъ, дѣйствующихъ на эту площадку равенъ $d\omega . k_z . y$. Моментъ всѣхъ внутреннихъ растягивающихъ по сѣченію A опредѣлится суммированіемъ указаннаго выраженія въ предѣлахъ сѣченія ω_1.

$$m'_x = -\int_0^{\omega} d\omega . k_z . y \text{; для силъ сжимающихъ } m'_x = -\int_0^{\omega} y . d\omega . k$$

Въ такомъ случаѣ аналитическимъ выраженіемъ условія равновѣсія моментовъ будетъ: $P(l-x) - \int_0^{\omega} d\omega . k_z . y - \int_0^{\omega_2} d\omega . k . y = 0$

или $M_x - \int_0^{\omega} \frac{d\omega . y^2 . E_1}{\rho} - \int_0^{\omega_2} \frac{d\omega . y^2 . E_2}{\rho} = 0$, гдѣ ω_1 и ω_2 соотвѣтственно равны площадямъ растянутой и сжатой частей сѣченія. Въ частномъ случаѣ, когда модуль упругости $E_1 = E_2$, получимъ равенство $M_x = \frac{E}{\rho} \int_0^{\omega} d\omega . y^2$, но $\int_0^{\omega} d\omega . y^2$ представляетъ собою экваторіальный моментъ инерціи J_z относительно оси Oz, а потому, окончательно, искомая зависимость представится формулой:

$$M_x = \frac{E}{\rho} J_z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Уравненіе кривой изгиба.

Кривой изгиба или упругой кривой называется линія, по которой располагается ось бруска послѣ деформаціи. На практикѣ очень часто нужно знать стрѣлу прогиба для различныхъ точекъ, что находится весьма легко, когда

извѣстно уравненіе упругой кривой. Дифференціальное исчисленіе даетъ выраженіе для радіуса кривизны въ слѣдующей формѣ:

$$\rho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

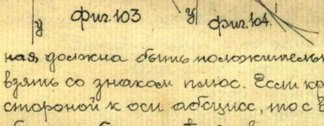
Первая производная представляетъ собой тангенсъ угла φ, который образуетъ касательная въ данной точкѣ кривой съ осью Ox. Т. к. явленіе разсматривается въ предѣлахъ упругости, то уголъ φ — наклоненія касательной обыкновенно весьма малъ, а потому и $tg\,\varphi$ будетъ представлять чрезвычайно малую дробь. Тѣмъ меньшее значеніе будетъ имѣть квадратъ этой дроби и безъ большой ошибки можно въ числителѣ опустить второй членъ. Тогда получимъ:

$$\rho = \pm \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}} \text{ или } \pm \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\rho}$$

Внося въ это выраженіе значеніе радіуса кривизны черезъ изгибающій моментъ внѣшней силы $\rho = \frac{EJ}{M_x}$, находимъ ур-іе:

$$M_x = \pm E . J \frac{d^2y}{dx^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

что и представляетъ дифференціальное ур-іе кривой изгиба; знакъ во второй части опредѣляется положеніемъ кривой относительно оси абсциссъ. Если кривая обращена выпуклой стороной къ оси x-овъ (фиг. 103) то съ



Фиг. 103 Фиг. 104

возрастаніемъ абсциссъ увеличивается уголъ наклона касательной къ оси, слѣдовательно, возрастаетъ и $tg\,\varphi$, поэтому вторая производная должна быть положительной и ур-іе (29) нужно взять со знакомъ плюсъ. Если кривая обращена вогнутой стороной къ оси абсциссъ, то съ возрастаніемъ абсциссъ будетъ убывать $tg\,\varphi$ и вторую производную надо брать со знакомъ минусъ (фиг. 104). Ур-іе (29) справедливо лишь для частнаго предположенія равенства модулей упругости при сжатіи и растяженіи.

Знакъ можетъ быть опредѣленъ еще иначе, напр., положительнымъ принимается тогда, если радіусъ кривизны, считая отъ точки кривой къ центру, направленъ въ ту же сторону как и положительная ось ординат. Отрицательный знак ставится в противоположном случаѣ.

С другой стороны, при разрѣшеніи многих задач, весьма трудно опредѣлить заранѣе расположеніе кривизны; иногда упругая кривая имѣет точку перегиба, а потому заранѣе установить правильной знак невозможно. Имѣя в виду, что направленіе изгибающаго момента отражается непосредственно на искривленіе бруска можно сказать, что главное значеніе для нас имѣет знак момента M_x, а не знак радіуса кривизны. Поэтому во всѣх примѣрах приводимых ниже будем считать радіус кривизны положительным, т. е. ур-іе (29) будем писать так:

$$\pm M_x = EJ\frac{d^2y}{dx^2}$$

Что же касается знака перед M_x, то к нему примѣним слѣдующее правило: при разсмотрѣніи правой части бруска, изгибающій момент считается положительным, если он направлен в сторону часовой стрѣлки и наоборот. Если же в разсмотрѣніи принимается лѣвая часть бруска, то момент вращающій по часовой стрѣлкѣ, считается отрицательным, а против — положительным.

Примѣр 1-ый Брус закрѣплен одним концом, а на другой дѣйствует сосредоточенная сила P. Возьмем произвольное сѣченіе MN на разстояніи x от закрѣпленнаго конца и начало координат положим в точкѣ A и ось y-ов направлена вниз. Согласно только что сказанному, дифференціальное ур-іе кривой будет:

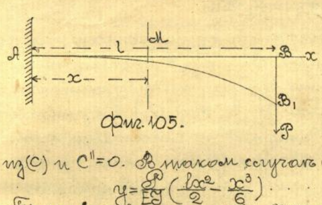
$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = P(l-x) \quad \ldots \quad (a)$$

Интегрируя его два раза, имѣем:

$$EJ\frac{dy}{dx} = P\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + C' \quad \ldots \quad (b)$$

$$EJy = P\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C'x + C'' \quad \ldots \quad (c)$$

гдѣ C' и C'' — произвольныя постоянныя, которыя опредѣляются слѣдующим образом. Относя данное сѣченіе к мѣсту закрѣпленія, т. е. полагая $x=0$ (фиг. 105) находим, что $\frac{dy}{dx}=0$, ибо первый элемент кривой остается горизонтальным благодаря



Фиг. 105.

защемленію[1]. Поэтому из (b) имѣем при $x=0$ $y'=0$ и $C'=0$. Точно так же полагая $x=0$ находим $y=0$, т. к. в мѣстѣ закрѣпленія прогиба нѣт, слѣдовательно, из (c) и $C''=0$. В таком случаѣ ур-іе кривой изгиба будет:

$$y = \frac{P}{EJ}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \quad \ldots \quad (d)$$

Придавая в этом ур-іи x-су извѣстныя значенія в предѣлах от 0 до l, находим соотвѣтственныя стрѣлы прогиба. Положив $x=l$, получим стрѣлу прогиба для конечной точки B. Из ур-ія (d) она опредѣлится так:

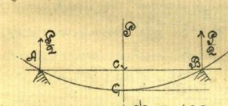
$$BB_1 = f = \frac{P}{EJ}\left(\frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{6}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{Pl^3}{EJ} \quad \ldots \quad (30)$$

Для бруска с прямоугольным сѣченіем, у котораго основаніе a и высота h, будем имѣть:

$$J = \frac{ah^3}{12} \text{ и тогда } f = \frac{1}{3}\frac{Pl^3\cdot 12}{Eah^3} = \frac{4}{E}\cdot\frac{Pl^3}{ah^3} \quad \ldots \quad (31)$$

Сравнивая послѣднее выраженіе с выраженіем (27) $f = \alpha\frac{Pl^3}{ah^3}$, полученным опытным путем, увидим, что они тождественны и что коэффиціенту $\alpha = \frac{4}{E}$. Для цилиндрическаго бруска $J = \frac{\pi d^4}{64}$ и $f = \frac{64 l^3 P}{3E\pi d^4} \quad \ldots \quad (32)$

Примѣр 2-ой Брусок лежит на двух опорах и посрединѣ нагружен сосредоточенной силой P (фиг. 106).



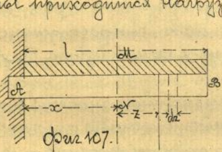
Фиг. 106.

Эту задачу можно свести к предыдущей. В самом дѣлѣ, сила P передается на опоры, гдѣ вызывает реакціи $\frac{P}{2}$. Кривая изгиба, очевидно должна быть симметричной и вершина ея лежит на вертикали, совпадающей с направленіем силы P. Представим себѣ мысленно, что (по полученіи деформаціи) среднее сѣченіе CC_1 защемлено, тогда можно примѣнить выраженіе (30); необходимо только вмѣсто P подставить $P/2$ и вмѣсто l — величину $l/2$.

[1]) Защемленіе выражается в том, что сѣченіе не может поворачиваться под вліяніем изгиба.

$$f=\frac{P}{2EJ}\left(\frac{l^3}{16}-\frac{l^3}{48}\right)=\frac{1}{48}\cdot\frac{Pl^3}{EJ}\ ^{1)} \quad \dots\dots (33)$$

Примѣр 3ій. Брусок закрѣплен одним концом и нагружен равномѣрным грузом. Т.к. груз P распредѣлен равномѣрно по всей длинѣ бруска, то на единицу длины приходится нагрузка $P/l=p$ (фиг. 107). Возьмем сѣченіе MN на разстояніи x от мѣста закрѣпленія; на отрѣзанной части MB дѣйствует равномѣрно распредѣленная нагрузка равная



Фиг. 107.

$$(l-x)p=(l-x)\frac{P}{l}\ ,$$

момент которой относительно даннаго сѣченія найдется так: на элементарном участкѣ dz, отстоящем от сѣченія MN на разстояніи z дѣйствует внѣшняя нагрузка $p.dz$. Слѣдовательно момент всей нагрузки участка MB получится суммированіем элементарных моментов по длинѣ $MB=l-x$, т.е.

$$M_x=\int_x^l pz\,dz=\frac{P}{2l}(l-x)^2$$

Не трудно видѣть, что полученное выраженіе представляет из себя также момент относительно сѣченія MN равнодѣйствующей распредѣленно нагрузки на участкѣ MB; эта равнодѣйствующая по величинѣ $=\frac{P(l-x)}{l}$ и приложена в точкѣ, отстоящей от сѣченія MN на разстояніи $\frac{l-x}{2}$. Слѣдовательно изгибающій момент получим вид $\frac{P}{l}\cdot\frac{(l-x)(l-x)}{2}$, что тождественно с нашим выраженіем. Дифференціальное ур-іе кривой изгиба будет, ибо M_x — положительный:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P}{2l}(l-x)^2$$

Интегрируя это выраженіе 2 раза, находим:

$$EJ\frac{dy}{dx}=\frac{P}{2l}\left(l^2x-lx^3+\frac{x^3}{3}\right)+C'$$

$$EJy=\frac{P}{2l}\left(\frac{l^2x^2}{2}-\frac{lx^3}{3}+\frac{x^4}{12}\right)+C'x+C''$$

Легко доказать и здѣсь, что произвольные постоянные C' и C'' равны нулю. В самом дѣлѣ и в данной задачѣ при $x=0$, $y=0$ и $\frac{dy}{dx}=0$; полагая затѣм $x=l$, найдем, что стрѣла прогиба конечной точки будет:

$$y=f=\frac{P}{2EJl}\left(\frac{l^4}{2}-\frac{l^4}{3}+\frac{l^4}{12}\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{Pl^3}{EJ} \quad \dots\dots (34)$$

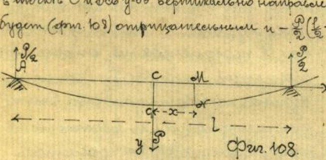
Сравненіе выраженій (30) и (34) дает, что при равномѣрной нагрузкѣ стрѣла прогиба почти в три раза меньше, чѣм при сосредоточенной силѣ.

Примѣр 4ый. Брусок лежит на двух опорах и нагружен равномѣрно распредѣленным грузом.

В таком случаѣ, как и при сосредоточенной силѣ, кривая изгиба симметрична (фиг. 109), поэтому здѣсь можно примѣнить тот же пріем, что и в примѣрѣ 2-ом, т.е. предположить, что брусок длиною $l/2$ закрѣплен одним концом в C_1 и изгибается силами $P/2$ (равными реакціи опоры) вверх и $P/2$ (распредѣленной нагрузкой) вниз. Общее ур-іе изгиба $M_x=EJy''$. В данном случаѣ момент внѣшних сил для сѣченія MN будет равен моменту реакціи $P/2$ без момента нагрузки, лежащей между сѣченіем MN и концом B, т.е.

Фиг. 109.

Эти же рѣшенія получаются и прямым путем. Полагая начало коорд. в точкѣ C и ось y-ов вертикально направленную, найдем, что изгиб. момент будет (фиг. 108) отрицательным и $-\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-x\right)=+EJ\frac{d^2y}{dx^2}$, откуда послѣ двойного интегр. имѣем:



Фиг. 108.

$$EJ\frac{dy}{dx}=-\frac{P}{2}\left(\frac{lx}{2}-\frac{x^2}{2}\right)+C'\ ;$$

$$EJy=-\frac{P}{2}\left(\frac{lx^2}{4}-\frac{x^3}{6}\right)+C'x+C'';$$

Полагая $x=0$, находим, что $y'=0$, ибо благодаря симметріи кривой относительно оси Cy в точкѣ C, кривая горизонтальна и слѣдовательно и $C'=0$. При $x=\frac{l}{2}$, очевидно, $y=0$, но при этом $C''=\frac{Pl^3}{48}$ и уравненіе кривой будет:

$$EJy=-\frac{P}{2}\left(\frac{lx^2}{4}-\frac{x^3}{6}\right)+\frac{Pl^3}{48}$$

полагая $x=0$, имѣем:

$$f=\frac{Pl^3}{48}$$

1) мот III. Сопрот. мат. ч. I. пр. И.И. Бобарыков.

$$M_x = \frac{P}{2l}\left(\frac{l}{2}-x\right)^2 - \frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-x\right)$$

Подставляя значеніе M_x в ур-іе изгиба, получаем

$$EJy'' = -\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}-x\right)^2 + \frac{P}{2l}\left(\frac{l}{2}-x\right)^2 \text{ или } EJy'' = \frac{P}{2}\left(\frac{x^2}{l}-\frac{l}{4}\right)$$

Интегрируя это выраженіе два раза, находим:

$$EJy' = \frac{P}{2}\left(\frac{x^3}{3l}-\frac{lx}{4}\right)+C'; \quad EJy = \frac{P}{2}\left(\frac{x^4}{12l}-\frac{lx^2}{8}\right)+C'x+C''.$$

Полагая $x=0$, замѣчаем, что $y'=0$, а т.к. вслѣдствіе симметричности кривой касательная к средней точкѣ ея будет горизонтальна. При $x=\frac{l}{2}$, $y=0$, ибо на опорѣ прогиба нѣт; первое условіе приводит к $C'=0$, второе дает $C''=\frac{5Pl^3}{384}$ и ур-іе кривой обращается в

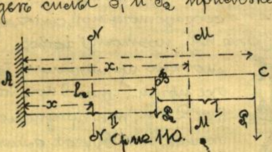
$$EJy = \frac{P}{2}\left(\frac{x^4}{12l}-\frac{lx^2}{8}\right)+\frac{5Pl^3}{384}$$

Подставляя в полученное выраженіе для кривой изгиба $x=0$ находим что стрѣла прогиба по серединѣ будет:

$$y = \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{48}\cdot\frac{Pl^3}{EJ}$$

Опредѣленіе кривой изгиба в случаѣ нѣскольких сосредоточенных сил.

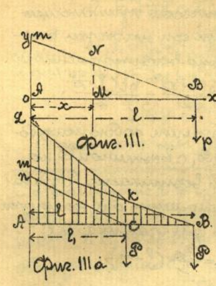
Разсмотрим наиболѣе простой случай, когда на брусок, закрѣпленный одним концом, дѣйствуют двѣ силы P_1 и P_2 приложенныя в точках В и С (фиг. 110).



Фиг. 110.

При данных условіях приходится разсматривать в брускѣ двѣ самостоятельных части АВ (II-ая) и ВС (I-ая). Дѣйствительно, для произвольнаго сѣченія между В и С,[1] изгибающій момент получается только от силы P_1, тогда как для части АВ в выраженіи момента входит еще сила P_2. Поэтому нельзя написать общаго выраженія момента для всей кривой. В самом дѣлѣ, если на брусок дѣйствует одна сила P, то изгибающій момент ея относительно сѣченія N на разстояніи x от А будет (фиг. 111) $M_x = P(l-x)$, откладывая по ординатам y в выбранном масштабѣ отрѣзки $= M_x$,

[1] На фиг. 110 точка В-приложеніе силы P_2, на фиг. 111 $AC=l_1$ $AB=l$



Фиг. 111.
Фиг. 111а.

получим измѣненіе изгибающаго момента по закону прямой Вm, если Am = M = Pl при $x=0$. Под дѣйствіем плавно возрастающаго от В до А — изгибающаго момента ось бруска изгибается по нѣкоторой кривой, которая имѣет общее выраженіе

$$y = \frac{1}{EJ}\left\{\int\left[\int M_x dx + C_1\right]dx + C_2\right\}$$

Переходя к случаю двух сосредоточенных сил (фиг. 111а) замѣчаем, что возрастаніе момента силы P_1 происходит по прямой Вm. Момент силы P_2 (на участкѣ АС) измѣняется по прямой Сn. Слѣдовательно на длинѣ $l_1 = AC$ ординаты прямой Сn складываются с ординатами Вm, а потому измѣненіе изгибающаго момента будет происходить по ломанной ВКL. Так. обр. в данном случаѣ не имѣется непрерывной функціи $M_x = f(x)$ по всей длинѣ l и слѣдовательно должны существовать два интеграла:

$$y_1 = \frac{1}{EJ}\left\{\int\left[\int M'_x dx + C'_1\right]dx + C'_2\right\} \text{ в предѣлах } x=l_1 \text{ и } x=l$$

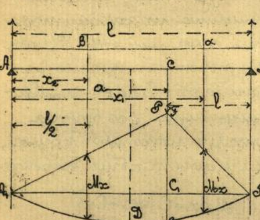
$$y_2 = \frac{1}{EJ}\left\{\int\left[\int M''_x dx + C''_1\right]dx + C''_2\right\} \text{ в " — " } x=0 \text{ и } x=l_1,$$

т. е. получаются двѣ кривых изгиба, имѣющих общую точку с абсциссой $x=l_1$.

Подобное же явленіе будет имѣть мѣсто при одновременном дѣйствіи распредѣленных и сосредоточенных нагрузок. На фиг. 112 представлена балка, подверженная изгибом распредѣленным грузом p клгр. на 1 пог. mt. и сосредоточенной силой P. Изгибающій момент для какого либо сѣченія α, лежащаго на разстояніи x от лѣвой опоры В будет (силы лежащія правѣе сѣченія а)

$$M'_x = \frac{p(l-x_1)^2}{2} - (l-x_1)\left(\frac{Pa}{l}+\frac{pl}{2}\right) \text{ для сѣченія } \beta$$

$$M''_x = \frac{p(l-x_2)^2}{2} - \left(\frac{Pa}{l}+\frac{pl}{2}\right)(l-x_2) + P(a-x).$$



Фиг. 112.

Графически изгибающій моментъ отъ нагрузки равномѣрно распредѣленной:
$$m_x = \frac{p(l-x)^2}{2} - \frac{pl(l-x)}{2},$$
представитъ собою параболу $\mathfrak{A}_1 D \mathfrak{B}_1$ с вершиной D на средней вертикали. Изгибающій моментъ отъ нагрузки $\mathfrak{P}$ даетъ для участка B_1C:
$$m'_x = \frac{\mathfrak{P}a}{l}(l-x),$$
для участка $\mathfrak{A}C_1$:
$m''_x = -\frac{\mathfrak{P}a}{l}(l-x) + \mathfrak{P}(a-x)$. Оба выраженія представятся графически прямыми $\mathfrak{B}_1F$ и $\mathfrak{A}_1F$ расположенными выше $\mathfrak{A}_1B_1$, для удобства чтенія. Результирующіе моменты M'_x и M''_x выразятся ординатами площади $\mathfrak{A}_1 F \mathfrak{B}_1 E D$ и как видно из фигуры представляютъ двѣ самостоятельныя функціи x на участкахъ C_1B_1 и $\mathfrak{A}_1C_1$. Поэтому в данном случаѣ кривая изгиба состоитъ изъ двух кривыхъ:
$$y_1 = \frac{1}{EJ}\left\{\int\left[\int M'_x dx + C_1\right]dx + C_2\right\}$$
$$y_2 = \frac{1}{EJ}\left\{\int\left[\int M''_x dx + C'_1\right]dx + C'_2\right\}$$
На основаніи изложеннаго можно сказать, что в случаѣ одновременно изгибающаго дѣйствія нѣскольких сосредоточенных сил, упругая кривая состоитъ изъ такого числа отдѣльных кривыхъ на сколько участков разбивается брусок по длинѣ этими силами.

Возвратимся к задачѣ. На фиг. 110 возьмем во II^ой^ части произвольное сѣченіе NN_1; дифференціальное ур-іе упругой кривой для этого сѣченія напишется так:
$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \mathfrak{P}_1(l_1-x) + \mathfrak{P}_2(l_2-x) \quad \dots \quad (a)$$
Для части I (сѣченіе MM_1) то же ур-іе приметъ видъ
$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \mathfrak{P}_1(l_1-x) \quad \dots \quad (b)$$
Интегрируя эти два ур-ія, имѣем для выраженія (a)

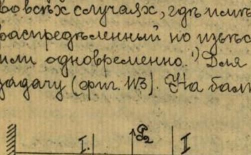
$$EJ\frac{dy_2}{dx} = \mathfrak{P}_1\left(l_1x - \frac{x^2}{2}\right) + \mathfrak{P}_2\left(l_2x - \frac{x^2}{2}\right) + C' \quad \dots \quad (I)$$
$$EJy_2 = \mathfrak{P}_1\left(\frac{l_1x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \mathfrak{P}_2\left(l_2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C'x + C'' \quad \dots \quad (II)$$
и для ур-ія (b) $EJy'_1 = \mathfrak{P}_1\left(l_1x - \frac{x^2}{2}\right) + C'_1 \quad \dots \quad (III)$
$$EJy_1 = \mathfrak{P}_1\left(l_1\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C'_1x + C''_1 \quad \dots \quad (IV)$$
Таким обр. мы получим 4 ур-ія с 4-мя произвольными постоянными. Произвольная постоянная C' и C'' обращаются в нуль, ибо при $x=0$, мы находим из ур-ій I и II, что $y = \frac{dy}{dx_1} = 0$. Для опредѣленія произвольных C'_1 и C''_1 замѣтим, что обѣ кривыя в точкѣ $\mathfrak{B}$ имѣютъ общую ординату, кромѣ того как показываютъ наблюденія кривая изгиба первой части переходитъ в кривую изгиба 2^ой^ части совершенно плавно, так что обѣ линіи в точкѣ $\mathfrak{B}$ имѣютъ общую касательную. Поэтому при значеніи $x = x_1 = l_2$ тангенсы углов наклона касательных обѣих кривых в точкѣ $\mathfrak{B}$ с осью абсцисс равны между собою т. е. $y'_1 = y'_2$, а слѣдовательно: $EJy'_1 = EJy'_2$ поэтому можно написать:
$$\mathfrak{P}_1\left(l_1l_2 - \frac{l_2^2}{2}\right) + \mathfrak{P}_2\left(l_2^2 - \frac{l_2^2}{2}\right) = \mathfrak{P}_1\left(l_1l_2 - \frac{l_2^2}{2}\right) + C'_1 \text{ откуда}$$
$$C'_1 = \frac{\mathfrak{P}_2 l_2^2}{2} \quad \dots \quad (c)$$
Точно также, приравнивая между собою правыя части ур-ій (II) и (IV), находим при $x = x_1 = l_2$
$$\mathfrak{P}_1\left(\frac{l_1l_2^2}{2} - \frac{l_2^3}{6}\right) + \mathfrak{P}_2\left(\frac{l_2^3}{2} - \frac{l_2^3}{6}\right) = \mathfrak{P}_1\left(\frac{l_1l_2^2}{2} - \frac{l_2^3}{6}\right) + \frac{\mathfrak{P}_2l_2^3}{2} + C''_1,$$
откуда $\quad C''_1 = -\frac{\mathfrak{P}l_2^3}{6} \quad \dots \quad (d)$

Подставляя найденныя значенія произвольных постоянных в ур-ія (I), (II), (III) и (IV) получим для 2^ой^ части
$$y_2 = \frac{1}{EJ}\left\{\mathfrak{P}_1\left(\frac{l_1x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \mathfrak{P}_2\left(l_2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\right\}.$$
и ур-іе кривой 1^ой^ части в видѣ:
$$y_1 = \frac{1}{EJ}\left\{\mathfrak{P}_1\left(\frac{l_1x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{\mathfrak{P}_2l_2^2}{2}x - \frac{\mathfrak{P}_2l_2^3}{6}\right\}$$
Стрѣла прогиба точки $\mathfrak{B}$ найдется из любого из них, полагая $x = l_2$
$$f_b = \frac{1}{EJ}\left\{\mathfrak{P}_1\left(\frac{l_1l_2^2}{2} - \frac{l_2^3}{6}\right) + \mathfrak{P}_2\left(l_2\frac{l_2^2}{2} - \frac{l_2^3}{6}\right)\right\} = \left\{\frac{\mathfrak{P}_2l_2^3}{3} + \frac{\mathfrak{P}_1l_2^2}{6}(3l_1 - l_2)\right\} =$$
Стрѣла прогиба точки C получится при $x = l_1$ — из ур-

кривой 1^ой^ части.

$$f_c = \frac{1}{EJ}\left\{\frac{P_1 l_1^3}{3} + \frac{P_2 l_2^2}{6}(3l_1 - l_2)\right\}$$

Приведенный примѣръ изгиба двумя сосредоточенными силами показываетъ, что рѣшеніе вопроса, хотя и не представляетъ затрудненія, но является довольно сложнымъ, благодаря большому количеству произвольныхъ постоянныхъ, а именно число ихъ равно удвоенному числу участковъ кривыхъ. Для сокращенія работы при рѣшеніи подобныхъ задачъ Clebsch предложилъ нѣсколько иначе производить интегрированіе дифференціальныхъ ур-iй кривыхъ изгиба. Способъ Clebsch'a состоитъ въ томъ, что вмѣсто перемѣнной x въ членахъ вида $A(l-x)^n$ пользуются перемѣнной $l-x=z$. Этотъ пріемъ допустимъ во всѣхъ случаяхъ, гдѣ имѣются сосредоточенныя силы, распредѣленный по извѣстному закону грузъ порознь или одновременно.[1)] Для примѣра возьмемъ слѣдующую задачу (фиг. 113). На балку защемленную въ точкѣ A дѣйствуютъ грузы сосредоточенные P_1, $-P_2$ и равномѣрно распредѣленный p клгр. на 1 пог. ед.. Ур-іе упругой кривой:



Фиг. 113.

$$EJ\frac{d^2y_1}{dx^2} = M'_x = P_1(l_1-x) - P_2(l_2-x) + \frac{p(l_1-x)^2}{2} \quad \text{- - - - - (a)}$$

для второй $$EJ\frac{d^2y_2}{dx^2} = M''_x = P_1(l_1-x) + \frac{p(l_1-x)}{2} \quad \text{. . . (b)}$$

Производя интегрированія по (l_1-x), (l_2-x), вмѣсто x, получимъ:

$$\int P_1(l_1-x)\,d(l_1-x) = \frac{P_1(l_1-x)^2}{2} + A, \text{ ибо } d(l_1-x) = -dx,$$

далѣе $$\int -\frac{P_1(l_1-x)^2}{2}\,d(l_1-x) + \int A\,d(l_1-x) = \frac{P_1(l_1-x)^3}{6} - A(l_1-x) + B =$$

$$= \frac{P_1(l_1-x)^3}{6} + Ax + (B - Al) = \frac{P_1(l_1-x)^3}{6} + Ax + C$$

Интегрируя тоже выраженіе $P_1(l_1-x)$ по x, получимъ:

$$\int P_1(l-x)\,dx = P_1\left(l_1x - \frac{x^2}{2}\right) - A_1$$

$$\int P_1\left(l_1x - \frac{x^2}{2}\right)dx + \int A_1\,dx = P_1\left(l_1\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + A_1x + C_1$$

видимъ, что различіе между первыми и вторыми интегралами заключается лишь въ произвольныхъ постоянныхъ, а именно:

1) При дѣйствіи распредѣленной нагрузки, таковая должна по всей длинѣ балки подчинена одному и тому же закону распредѣленія.

$$-\frac{1}{2}P_1(l_1-x)^2 + A = -\frac{P_1 l_1^2}{2} + P_1l_1x - \frac{P_1x^2}{2} + A = P_1\left(l_1x - \frac{x^2}{2}\right) + A - \frac{P_1l_1^2}{2}$$

или $$A - \frac{P_1 l_1^2}{2} = A_1 \text{ и т. д.}$$

Интегрируя ур-ія (a) и (b) по способу Clebsch'a находимъ:

$$EJ\frac{dy_1}{dx} = -\frac{1}{2}P_1(l_1-x)^2 + \frac{1}{2}P_2(l_2-x)^2 - \frac{1}{6}p(l_1-x)^3 + C_1\ ;$$

$$EJy_1 = \frac{1}{6}P_1(l_1-x)^3 - \frac{1}{6}P_2(l_2-x)^3 + \frac{1}{24}p(l_1-x)^4 + C_1x + C_2\ ;$$

$$EJ\frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2}P_1(l_1-x)^2 - \frac{1}{6}p(l_1-x)^3 + C'_1\ ;$$

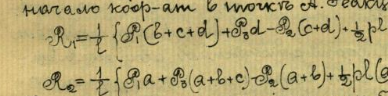
$$EJy_2 = -\frac{1}{6}P_1(l_1-x)^3 + \frac{1}{24}p(l_1-x)^4 + C'_1x + C'_2$$

Т. к. при $x = l_2$ получается общая точка кривыхъ 1^го^ и 2^го^ участка, то имѣемъ:

$$EJ\frac{dy_1}{dx}\Big|_{x=l_2} = EJ\frac{dy_2}{dx}\Big|_{x=l_2} \quad \text{и} \quad EJy_1\Big|_{x=l_2} = EJy_2\Big|_{x=l_2}$$

откуда $C_1 = C'_1$ и $C_2 = C'_2$.

Такимъ обр. вмѣсто 4-хъ произвольныхъ постоянныхъ необходимо опредѣлить лишь двѣ. Сколько бы не было приложено сосредоточенныхъ грузовъ и при равномѣрно распредѣленной нагрузкѣ по всей балкѣ при рѣшеніи ур-iй способомъ Clebsch'a всегда имѣетъ лишь двѣ произвольныхъ постоянныхъ.



Фиг. 114

Если балка лежитъ на двухъ опорахъ, ходъ рѣшенія остается тотъ же. Для иллюстраціи приведемъ еще примѣръ.

На фиг. 114 дана балка длиною $l = a + b + c + d$, лежащая на двухъ опорахъ (свободно). Приложены три сосредоточенныхъ силы P_1, $-P_2$ и P_3 въ точкахъ C, D и E, кромѣ того имѣется распредѣленный грузъ p на пог. ед.. Положимъ начало коор-атъ въ точкѣ A. Реакціи въ опорахъ будутъ:

$$R_1 = \frac{1}{l}\left\{P_1(b+c+d) + P_3d - P_2(c+d) + \frac{1}{2}pl(b+c+d+a)\right\}$$

$$R_2 = \frac{1}{l}\left\{P_1a + P_3(a+b+c) - P_2(a+b) + \frac{1}{2}pl(a+b+c+d)\right\}$$

Дифференціальныя ур-ія кривыхъ будутъ для участка a: $EJy''_1 = -R_2(l-x) + P_3(a+b+c-x) - P_2(a+b-x) + P_1(a-x) + p\frac{(l-x)^2}{2}$, для участка b: $EJy''_2 = -R_2(l-x) + P_3(a+b+c-x) - P_2(a+b-x) + \frac{p}{2}(l-x)^2$, для участка c:

$EJy_3'' = -R_2(l-x) + P_3(a+b+c-x) + \frac{1}{2}p(l-x)^2$, для участка d:

$EJy_4'' = -R_2(l-x) + \frac{1}{2}p(l-x)^2$

Двукратное интегрированіе дает:

a) $EJy_1' = R_2\frac{(l-x)^2}{2} - \frac{1}{2}P_3(a+b+c-x)^2 + \frac{1}{2}P_2(a+b-x)^2 - \frac{1}{2}P_1(a-x)^2 - \frac{1}{6}p(l-x)^3 + C_1 \quad \ldots \quad (a_1)$

$EJy_1 = -\frac{1}{6}R_2(l-x)^3 + \frac{1}{6}P_3(a+b+c-x)^3 - \frac{1}{6}P_2(a+b-x) + \frac{1}{6}P_1(a-x)^3 + \frac{1}{24}p(l-x)^4 + C_1x + C_2 \quad \ldots \quad (a_2)$

b) $EJy_2' = R_2\frac{(l-x)^2}{2} - \frac{1}{2}P_3(a+b+c-x)^2 + \frac{1}{2}P_2(a+b-x)^2 - \frac{p}{6}(l-x)^3 + C_3 \quad \ldots \quad (b_1)$

$EJy_2 = \frac{1}{6}R_2(l-x)^3 + \frac{1}{6}P_3(a+b+c-x)^3 - \frac{1}{6}P_2(a+b-x)^3 + \frac{p}{24}(l-x)^4 + C_3x + C_4 \quad \ldots \quad (b_2)$

c) $EJy_3' = \frac{1}{2}R_2(l-x)^2 - \frac{1}{2}P_3(a+b+c-x)^2 - \frac{p}{6}(l-x)^3 + C_5 \quad \ldots \quad (c_1)$

$EJy_3 = -\frac{1}{6}R_2(l-x)^3 + \frac{1}{6}P_3(a+b+c-x)^3 + p/24\,(l-x)^4 + C_5x + C_6 \quad \ldots \quad (c_2)$

d) $EJy_4' = R\frac{(l-x)^2}{6} - p/6\,(l-x)^3 + C_7 \quad \ldots \quad (d_1)$

$EJy_4 = -\frac{1}{6}R_2(l-x)^3 + p/24\,(l-x)^4 + C_7x + C_8 \quad \ldots \quad (d_2)$

Для кривыхъ a и b при $x = a$ имѣемъ:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_2}{dx} \text{ и } y_1 = y_2$$

А потому, приравнивая правыя части ур-ій (a_1) и (b_1), (a_2) и (b_2) имѣемъ: $C_1 = C_3$; $C_2 = C_4$

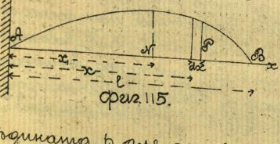
Полагая $x = a+b$, приравниваем правыя части ур-ій (b_1) и (c_1), (b_2) и (c_2), получимъ: $C_3 = C_5$; $C_4 = C_6$

Наконецъ, полагая $x = a+b+c$ из ур-ій (c_1) и (d_1), (c_2) и (d_2) получимъ: $C_5 = C_7$; $C_6 = C_8$.

Итак получаем: $C_1 = C_3 = C_5 = C_7$ и $C_2 = C_4 = C_6 = C_8$

т.е. вмѣсто 8-ми произвольныхъ постоянныхъ всего двѣ.

Нагрузка распредѣлена по заданному закону.



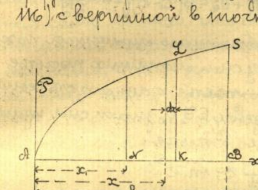
Фиг. 115.

Въ этомъ случаѣ интегрированіе производится обычнымъ путемъ. Пусть на балку AB (фиг. 115) дѣйствует распредѣленный груз причемъ ордината p для соотвѣтственной абсциссы в выбранном масштабѣ выражает нагрузку на пог. ед. Обыкновенно дается функція $p = f(x)$.

Чтобы найти изгибающій моментъ для даннаго сѣченія N, на разстояніи x, берем элемент dx; нагрузка на этот элемент будет $p.dx = f(x)dx$, моментъ ея элементарный относительно сѣченія N будет $p.dx(x-x_1)$ и моментъ груза, лежащаго на участкѣ NB относительно сѣченія N напишется так:

$$M_x = \int_{x_1}^{l} p(x-x_1)\,dx = \int_{x_1}^{l} f(x)(x-x_1)\,dx$$

Для примѣра возьмем случай когда данная нагрузка выражается ур-іем параболы $p^2 = 2qx$ (фиг. 116) с вершиной в точкѣ A. Найдем изгибающій моментъ для сѣченія, отстоящаго от начала координат на разстояніи x_1. Нагрузка на элемент dx будет $p.dx$ и моментъ относительно N выразится так:



Фиг. 116

$$M_{x_1} = \int_{x_1}^{l} p(x-x_1)\,dx = \int_{x_1}^{l}\sqrt{2qx}(x-x_1)\,dx = \int_{x_1}^{l} x\sqrt{2qx}.\,dx - \int_{x_1}^{l} x_1\sqrt{2qx}.\,dx =$$

$$= 2\sqrt{2q}\left\{\frac{\sqrt{l^5}}{5} - \frac{x\sqrt{l^3}}{3} + \frac{2}{15}\sqrt{x^5}\right\}$$

Или замѣнивъ x_1 через x, найдем вообще

$$M_x = 2\sqrt{2q}\left\{\frac{\sqrt{l^5}}{5} - \frac{x\sqrt{l^3}}{3} + \frac{2}{15}\sqrt{x^5}\right\}$$

Алгебраическое ур-іе кривой изгиба в разсматриваемом случаѣ получается, как и обыкновенно, двукратным интегрированіем и дѣленіем второго интеграла на произведеніе EJ.

Из сказаннаго до сих пор, ясно каким образом при всякаго рода заданной нагрузки построить ур-іе кривой изгиба.

Иногда бывает интересна и обратная задача: по заданному ур-ію кривой найти нагрузку на балку. Уже извѣстно, что первая производная ординаты кривой по абсциссѣ представляет тангенс угла наклона касательной в точкѣ (x, y) к оси абсцисс. Из дифференціальнаго ур-ія кривой имѣем, что

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{EJ}$$

Посмотримъ, что представляетъ изъ себя третья и четвертая производная, т.е.

$$\frac{d^3y}{dx^3} \text{ и } \frac{d^4y}{dx}$$

Обращаясь к частнымъ случаямъ, напр. (фиг. 113) найдемъ:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{M_x''}{EJ}=\frac{1}{EJ}\left\{P_1(l_1-x)-P_2(l_2-x)+\frac{p}{2}(l_1-x)^2\right\},$$

откуда

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{EJ}\frac{dM_x''}{dx}=\frac{1}{EJ}\left\{-P_1+P_2-p(l_1-x)\right\}=-\frac{\Sigma P}{EJ}$$

т.е. первая производная изгибающаго момента по x даетъ алгебраическую сумму силъ, лежащихъ правѣе (или с обратнымъ знакомъ — лѣвѣе) даннаго сѣченія, раздѣленную на произведеніе EJ и знаки силъ измѣнены на противоположные. Далѣе

$$\frac{d^4y_1}{dx^4}=\frac{1}{EJ}\frac{d^2M_x''}{dx^2}=\frac{1}{EJ}p, \text{ т.е.}$$

вторая производная изгибающаго момента по x представляетъ ординату распредѣленной нагрузки, раздѣленную на произведеніе EJ.

Возьмемъ случай параболической нагрузки (фиг. 116)

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{EJ}\cdot\frac{dM_x}{dx}=\frac{2\sqrt{2q}}{EJ}\left\{-\frac{\sqrt{l^3}}{3}+\frac{\sqrt{x^3}}{3}\right\}=-\frac{2\sqrt{2q}}{EJ}\left(\frac{\sqrt{l^3}}{3}-\frac{\sqrt{x^3}}{3}\right)$$

Числитель этого выраженія представляетъ собою площадь $KLSB$. Дѣйствительно эта площадь равна:

$$KLSB=\int_x^l p\,dx=\int_x^l\sqrt{2qx}\,dx=\sqrt{2q}\left|\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right|_x^l=2\sqrt{2q}\left\{\frac{\sqrt{l^3}}{3}-\frac{\sqrt{x^3}}{3}\right\}$$

Знак минус, полученный в первомъ случаѣ, объясняется тѣмъ, что с возрастаніемъ x момент уменьшается, а потому первая производная отрицательна. Площадь параболическаго отрѣзка $KLSB$ есть сумма силъ лежащихъ правѣе сѣченія KL и получалась, как надо было ожидать отрицательной.

Переходимъ к четвертой производной.

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{1}{EJ}\frac{d^2M_x}{dx^2}=\frac{2\sqrt{2q}}{EJ}\cdot\frac{\sqrt{x}}{2}=\frac{\sqrt{2qx}}{EJ}=\frac{p}{EJ}$$

Но $p=\sqrt{2qx}$ представляетъ ординату нагрузки (ордината изъ ур-ія параболы $p^2=2qx$)

На основаніи сказаннаго в нѣкоторыхъ случаяхъ воз-

можно по заданному ур-ію кривой изгиба найти дѣйствующія внѣшнія силы.

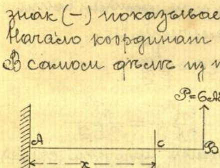
Примѣръ 1-ый. Пусть дано ур-іе упругой кривой в формѣ $y=Ax^3+Bx^2$ отсюда получаемъ:

$$y'=3Ax^2+2Bx \qquad y''=6Ax+2B$$
$$y'''=6A \qquad y^{IV}=0$$

Послѣдняя зависимость указываетъ, что распредѣленной нагрузки нѣтъ и дѣйствуетъ лишь сосредоточенная сила. В томъ что сила одна убѣждаетъ насъ наличность одного ур-ія кривой. Между прочимъ можно принять, что брусокъ либо защемленъ однимъ концомъ, либо сила приложена посрединѣ бруска, лежащаго на двухъ опорахъ. Величина приложенной силы найдется изъ третьей производной, а именно:

$$P=-6AEJ$$

знак (—) показываетъ, что сила направлена вверхъ. Начало координатъ находится в мѣстахъ защемленія. В самомъ дѣлѣ изъ прилагаемаго чертежа (фиг. 117)



Фиг. 117.

имѣемъ для сѣченія C.

$$EJy''=+P(l-x) \quad \text{или}$$
$$y''=-6A(l-x)=-6Al+6Ax$$
$$y'=-6Alx+3Ax^2$$
$$y=-3Alx^2+Ax^3$$

Слѣдовательно $-3Al=B=+\frac{Pl}{2EJ}$, откуда находимъ величину l; E и J заданы

Примѣръ 2-ой. Дано

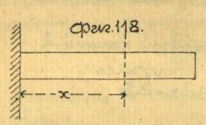
$$y=Ax^5+Bx^4+Cx^3+Ex^2,$$
$$y'=5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Ex$$
$$y''=20Ax^3+12Bx^2+6Cx+2E=\frac{M_x}{EJ}$$
$$y'''=60Ax^2+24Bx=-\frac{\Sigma P}{EJ}$$
$$y^{IV}=120Ax+24B=\frac{p_x}{EJ}$$

Послѣднее ур-іе показываетъ, что имѣется распредѣленная нагрузка по закону прямой линіи на балкѣ защемленной однимъ концомъ. При $x=0$, $24B=\frac{p}{EJ}$.

Если дано, что $B=-10Al$, то на свободномъ концѣ нагрузка $=0$. Наибольшая ордината $p/_{x=0}=24BEJ=AC$ (фиг. 118)

Примѣръ 3-ій. Дано $y=Ax^6+Bx+C$

Здѣсь имѣемъ тотъ же случай, но начало координатъ находится в точкѣ B, т.е. на свободном концѣ.



Фиг. 118.

Примѣр 4-ый Дано

$$y = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$$

Ур-іе представляет упругую кривую для балки защемленной одним концом и нагруженной равномѣрно распредѣленной нагрузкой.

В самом дѣлѣ имѣем:

$$y' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx$$

$$y'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C = \frac{M_x}{EJ}$$

$$y''' = 24Ax + 6B = -\frac{\Sigma P}{EJ}$$

$$y^{IV} = 24A = \frac{p}{EJ}$$

Из третьей производной получаем при $x = l$

$$6B = -\frac{pl}{EJ}$$

отсюда слѣдует, что коэффиціент должен быть отрицательный и находим величину l.

Из 2-го ур-ія $\frac{p}{2EJ}x^2 - \frac{pl}{EJ}x + 2C = \frac{M_x}{EJ}$

имѣем, что при $x = l$

$$2C = +\frac{pl^2}{EJ} - \frac{pl^2}{2EJ} = \frac{pl^2}{2EJ}$$

Дѣйствительно для предполагаемой нагрузки, считая начало координат в мѣстѣ защемленія, найдем:

$$M_x = EJy'' = p\frac{(l-x)^2}{2} = \frac{pl^2}{2} - plx + \frac{px^2}{2}$$

что получится при подстановкѣ в выраженіе для y'', значеній для A, B и C.

Примѣр 5-ый

Дано
$$y = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + D$$

$$y' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx$$

$$y'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$$

$$y''' = 24Ax + 6B = \frac{\Sigma P}{EJ}$$

$$y^{IV} = 24A = \frac{p}{EJ}$$

Очевидно имѣется равномѣрно-распредѣленный груз с ординатой p клгр. на 1 пог. ед., как и в только что разсмотрѣнном примѣрѣ. Отличіе от него заключается лишь в присутствіи постояннаго члена D в ур-іи кривой. Это дает повод полагать, что кромѣ

распредѣленной нагрузки имѣется и сосредоточенная сила P, приложенная на свободном концѣ бруска, если он защемлен или посрединѣ него, если он лежит на двух опорах.

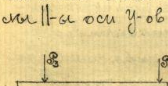
Срѣзывающая сила и касательныя напряженія при изгибѣ.

Возвратимся опять к вопросу о напряженіях. При разсмотрѣніи зависимости между внѣшними и внутренними силами изогнутаго бруска, указывалось, что для равновѣсія правой (или лѣвой) части, отсѣченной произвольным сѣченіем, необходимо соблюденіе 6 условій равновѣсія. Нами разсмотрѣно два, а именно: $\Sigma X = 0$ и $\Sigma M_z = 0$.

Не трудно видѣть что условія

$$\Sigma Z = 0, \ \Sigma M_x = 0 \ \text{и} \ \Sigma M_y = 0$$

удовлетворяются сами собой. Остается ур-іе $\Sigma Y = 0$ (ось y-ов направлена вертикально). Очевидно, что, для уравновѣшиванія отрѣзанной части, необходимо условіе, чтобы сумма проекцій на ось y-ов всѣх внѣшних сил, дѣйствующих на эту часть равнялась суммѣ проекцій внутренних сил, дѣйствующих в пл-сти сѣченія на ту же ось. Но т.к. внѣшнія силы ||-ы оси y-ов (фиг. 119), то внутреннія силы должны лежать в пл-сти сѣченія.

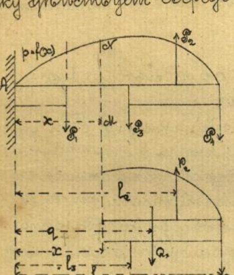


фиг. 119

Так. обр. мы приходим к заключенію, что в каждом нормальном сѣченіи изогнутаго бруска кромѣ нормальных напряженій, растяженія и сжатія, дѣйствуют еще касательныя напряженія k_s. Называя сумму сил которыми нагружена часть равновѣсіе которой разсматривается, через ΣP имѣем равенство:

$$\Sigma P = \int_0^{\omega} k_s d\omega$$

Из сказаннаго видно, что любое сѣченіе бруска подвергается скалыванію силой S равной алгебраической суммѣ сил, дѣйствующих правѣе (или что тоже — лѣвѣе) этого сѣченія. Сила эта $S = \Sigma P$ носит названіе срѣзывающей силы, которое станет понятным из слѣдующаго примѣра. Пусть (фиг. 120) на балку дѣйствует сосредоточенныя силы P_1, P_2, P_3, P_4 и распредѣленная нагрузка $p = f(x)$. Возьмем какое-нибудь сѣченіе MN на разстояніи x от начала координат, вынесем правую часть бруска в сторону. Приложим в сѣченіи MN силы $P_1, -P_1, P_2, -P_2, P_3, -P_3, Q_x, -Q_x$, причем Q_x представляет равнодѣйствующую распредѣленной нагрузки на части MB, приложенную в центрѣ тяжести площади MNB. Тогда получим слѣдующіе моменты составляющих пар:



Фиг. 120.

$$P_1(l_1 - x) - P_2(l_2 - x) + P_3(l_3 - x) + Q_x(q_x - x) = M_x,$$

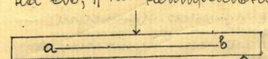
что дает, очевидно изгибающій момент M_x уравновѣшенный моментами напряженій сжатія и растяженія в пл-сти MN. В той же плоскости будут дѣйствовать силы $P_1, -P_2, +P_3 + Q_x$, которыя в суммѣ дадут ту же величину, как и сумма сил, лежащих правѣе сѣченія MN. И так при совершенно произвольной нагрузкѣ внѣшними силами, в любом сѣченіи бруска дѣйствует срѣзающая сила равная по величинѣ и по направленію суммѣ сил ΣP, лежащих правѣе или лѣвѣе даннаго сѣченія. Слѣд. срѣзающая сила равна производной момента по абсциссѣ, но противоположна по знаку, т. е.

$$-S = \frac{dM_x}{dx}$$

Присутствіе скалывающей (срѣзывающей) силы при изгибѣ в поперечных сѣченіях бруска, на основаніи двойственности касательных сил, влечет за собою появленіе таких же сил в слоях ||-ых оси бруска. Чтобы представить себѣ как распредѣляются силы в поперечном сѣченіи, посмотрим сначала, как распредѣляются касательныя силы в направленіях ||-ых

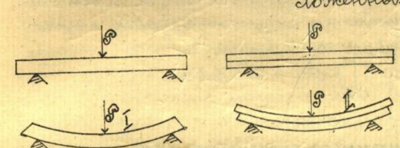
оси (нейтральному слою) бруска.

Существованіе только что разсмотрѣнных касательных сил подтверждается особенно ярко наблюденіем над деревянными брусками, подверженными изгибу. Часто при разрушеніи брусков появляется трещина ab, ||-но нейтральному слою (фиг. 121).

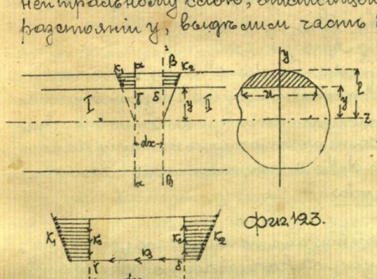


фиг. 121

Представим себѣ два бруска (фиг. 122) один (I) — цѣлый, а другой (II), состоящій из двух отдѣльных половинок, наложенных одна на другую и будем на каждый брусок дѣйствовать одинаковыми силами; опыт показывает, что по



концам второго бруска получается ступенчатое возвышеніе верхней половины над нижней. Между тѣм в цѣльном брускѣ такого выдвиганія не замѣчается. Это об'ясняется тѣм, что сила сдвигающая балку во II брускѣ, компенсируется в первом касательными напряженіями. Возьмем в изогнутом брускѣ два нормальных сѣченія $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$ на разстояніи dx друг от друга и пл-стью ||-ой нейтральному слою, отстоящей от послѣдней на разстояніи y, выдѣлим часть бруска (фиг. 123).



фиг. 123.

Взаимодѣйствіе отброшенных частей лѣвой I и правой II выразится в возникновеніи на гранях $\alpha\alpha$ нормальных напряженій k_1, $\beta\beta$ — k_2, а также касательных k_3. На основаніи упомянутой выше двойственности на грани γδ, имеющей площадь u.dx, возникают такія же касательныя напряженія. Найдя их величины здѣсь, мы найдем ее на вертикальной грани αα. Одно из условій равновѣсія вырѣзанной нами части бруска A, будет $\Sigma x = 0$, т. е. сумма проекцій всѣх приложенных к этой части внутренних сил на ось x-ов (направленную вдоль оси бруска) должна равняться нулю. Нормальныя напряженія k_1 и k_2 отличаются друг от друга по величинѣ, ибо дѣйствуют на различныя грани и сумма проекцій их на ось x-ов будет:

$$\int_y^e k_1 d\omega - \int_y^e k_2 d\omega = u.dx.k_s$$

Но вообще

$$k_1 = \frac{E y_1}{\varrho_1} \quad и \quad k_2 = \frac{E y_2}{\varrho_2}$$

гдѣ y_1 и y_2 перемѣнныя ординаты сѣченій αα и $\beta\beta_1$, а т. к. $M'_x = \frac{EJ}{\varrho_1}$ и $M''_x = \frac{EJ}{\varrho_2}$, гдѣ M'_x и M''_x, ϱ_1 и ϱ_2 соотвѣтственно представляют изгибающіе моменты и радіусы кривизны в тѣх же сѣченіях. Поэтому можем написать:

$$\int_y^e \frac{M'_x y_1 d\omega}{J} - \int_y^e \frac{M''_x y_2 d\omega}{J} = u.dx.k_s$$

Но т. к. интегрированіе распространяется в пл-сти сѣченія, для которой изгибающій момент есть величина постоянная и от y независящая, то имѣем:

$$\frac{M'_x - M''_x}{J} \int_y^e y\,d\omega = u.dx.k_s\,,$$

т. к. очевидно, что $\int_y^e y_1 d\omega = \int_y^e y_2 d\omega$. В виду того, что разстояніе между сѣченіями αα и ββ безконечно мало, измѣненіе изгибающаго момента, который есть функція абсциссы x, также мало, а потому можно написать $M'_x - M''_x = dM_x$ и окончательно имѣем:

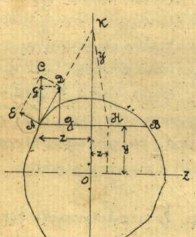
$$k_s = \frac{\frac{dM_x}{dx}\int_y^e y\,d\omega}{J.u} \qquad (35)$$

Необходимо оговорить, что приведенное ур-іе будет правильно лишь в том случаѣ, если на протяженіи dx нѣт приложенных сосредоточенных сил. В противном случаѣ не может быть рѣчи о плавном возрас-

таніи M_x вмѣстѣ с x и, слѣд., нельзя полагать $M'_x - M''_x = dM_x$. Разсматривая полученное выраженіе для напряженія k_s, замѣчаем: 1) множитель $\frac{dM_x}{dx}$ есть ничто иное как срѣзующая сила для данного сѣченія ибо $\frac{dM_x}{dx} = -\Sigma P$. Знак (−) не имѣет для вычисленія никакого значенія; 2) множитель $\int_y^e y\,d\omega$ представляет собою статистическій момент заштрихованной части поперечнаго сѣченія относительно нейтральнаго слоя (фиг. 125); 3) дѣлитель u есть поперечный размѣр сѣченія на уровнѣ y от нейтральнаго слоя; 4) J — момент инерціи всего поперечнаго сѣченія относительно нейтральнаго слоя.

Оба перемѣнные множителя в числителѣ выраженія для k_s измѣняются, первой с абсциссой x, второй с ординатой y.

Выводя зависимость (35) мы предполагали во 1), что касательныя напряженія направлены ||но пл-сти изгиба и во 2), что величина их в каждом слоѣ ||ом нейтральному не зависит от величины z — разстоянія от оси OY. В дѣйствительности нельзя сказать, что первое предположеніе совершенно вѣрно; наоборот, надо думать, что в произвольном элементѣ поперечнаго сѣченія бруска, касательное напряженіе, вообще говоря, направлено наклонно к плоскости изгиба. В таком случаѣ, второе предположеніе формулируется иначе: слагающія касательных напряженій в поперечном сѣченіи бруска, ||-ныя пл-сти изгиба, не зависят от величины z и для данной величины y — постоянны. Слѣдовательно ур-іе (35) служит для опредѣленія не касательных напряженій, а — их составляющих — перпендикулярных нейтральному слою. Принимая второе допущеніе в послѣдней формулировкѣ как правильное, возможно найти и полную величину касательнаго напряженія. Для этого надо помнить, что при отсутствіи заданных внѣшних сил касательных к поверхности, на послѣдней касательныя напряженія в направленіи длины бруска должна быть равна нулю. Дѣйствительно, возьмем сѣченіе произвольной формы (фиг. 124) и положим что касательныя напряженія направлены ‖-но пл-сти изгиба OY и опредѣляется отрѣзком AC. Разложив это напряженія на составляющія AD — касательная к контуру и AE — нормальная к нему, увидим, что по свойству двойственности касательных напряженій, напряженіе AE вызовет на поверхности равное по величинѣ напряженіе в направленіи ‖ой оси бруска. Но т. к. внѣшних сил, могущих уравновѣсить эти напряженія, не имѣется, то $AE = 0$. А слѣд., касательное напряженіе в точкѣ A должно быть направлено по касательной к контуру сѣченія AD. Если оно и по величинѣ равно отрѣзку AD, то разложив послѣднюю на вертикальную AF и горизонтальную AG, получим, что $k_5 = AF$ согласно сказанному выше допущенію постоянно по всей линіи AD, а числовое значеніе его опредѣлится по выраженію (35). Остается невыясненным вопрос как же направлено напряженіе в каком либо элементѣ H. Принято считать что направленіе опредѣляется положеніем точки K — пересѣченія касательной AD с осью OY. Конечно такое предположеніе годится лишь для сѣченій симметричных по отношенію к пл-сти изгиба. Из выраженія (35) ясно, что составляющія касательных напряженій, ‖ыя пл-сти изгиба, достигают наибольшей величины в тѣх сѣченіях по длинѣ бруска, в которых получается наибольшее значеніе суммы сил, т. е. срѣзывающей силы, ΣP_{max}. В самом же поперечном сѣченіи наибольшее K_5 будет на таком разстояніи y от нейтральнаго слоя для



Фиг. 124.

котораго получается тахітит отношенія $\frac{\int_y^e y\,d\omega}{u}$

Разсмотрѣніе цѣлаго ряда примѣров приводит к заключенію, что послѣднее отношеніе будет наибольшим в нейтральном слоѣ или в слоѣ, отстоящем от него довольно близко:

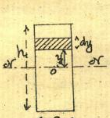
1) Пусть поперечное сѣченіе будет прямоугольник с основаніем a и высотою h (фиг. 126). Не трудно видѣть, что для него $u = a = const$... Интеграл $\int_y^e y\,d\omega = \int_y^{\frac{h}{2}} y \cdot a \cdot dy = \frac{ah^2}{8} - \frac{ay^2}{2}$. Наибольшая величина его будет $\frac{ah^2}{8}$ при $y = 0$.

Фиг. 125

2) Поперечное сѣченіе круг радіуса R (фиг. 127). Возьмем произвольную площадку $d\omega = 2z\,dy$, и т. к. $z = R\cos\alpha$ и $y = R\sin\alpha$, то имѣем $\int_y^e y\,d\omega = 2\int_\alpha^{\pi/2} R^3 \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha\, d\alpha =$

$$= -2R^3 \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\alpha\, d\cos\alpha = \tfrac{2}{3} R^3 \cos^3\alpha,\quad u = 2z = 2R\cos\alpha$$

а потому $\frac{\int_y^e y\,d\omega}{u} = \frac{1}{3} R^2 \cos^2\alpha$.



Фиг. 126

Наибольшее значеніе отношенія $\frac{1}{u}\int_y^e y\,d\omega = \frac{1}{3}R^2$ при $y = 0$, т. е. на нейтральном слоѣ.

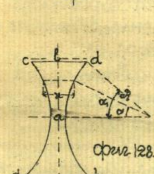
3) Сѣченіе формы указанной на фиг. 128, кривыя ab и cd суть дуги круга радіуса R. Имѣем $u = 2R + a - 2R\cos\alpha$ или $u = a + 2R(1-\cos\alpha)$ и $\int_y^e y\,d\omega = \int_y^e (a + 2R[1-\cos\alpha])\,dy \cdot y$;

$$\int_y^e y\,d\omega = \int_\alpha^{\alpha_1} (a + 2R(1-\cos\alpha))\, R\sin\alpha \cdot R\cos\alpha\, d\alpha =$$

$$R^2 \int_\alpha^{\alpha_1} a\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha + 2R^3 \int_\alpha^{\alpha_1} \sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha -$$

$$-2R^3 \int_\alpha^{\alpha_1} \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha\, d\alpha,\ \text{ибо}\ y = R\sin\alpha - \tfrac{1}{2}R^2 a\cos^2\alpha +$$

$$+ \tfrac{1}{2} 2R^2\cos^2\alpha + \tfrac{2}{3}R^3\cos^3\alpha \Big|_\alpha^{\alpha_1}\ \text{и отношеніе}$$



Фиг. 128.

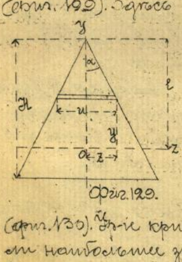
$\frac{1}{u}\int_y^e y\,d\omega$ получает вид

$$\frac{R^2\left(\frac{a}{2} + 2R - \frac{2}{3}R\cos\alpha_1\right)\cos^2\alpha_1 + R^2\left(\frac{2}{3}R\cos\alpha - \frac{a}{2} - 2R\right)\cos^2\alpha}{a + 2R(1-\cos\alpha)}$$

достигает своего максимума при $\alpha = 0$.

Если в сѣченіи ось, относительно которой берется моментъ инерціи, не является осью симметріи, то наибольшее значеніе для K_s не всегда получается в нейтральном слоѣ, а в волокнах, отстоящих от послѣдняго на нѣкотором разстояніи. Обычно небольшом. Напр.:

1) Поперечное сѣченіе — равнобедренный треугольник (фиг. 129). Здѣсь $u = 2z$, $\int_y^e y\,d\omega = \int_y^e y\,2z\,dy$. Но $z = (e-y)\,tg\alpha$ и слѣд.:



Фиг. 129.

$\int_y^e y\,2z\,dy = 2tg\alpha \int_y^e y(e-y)\,dy = \frac{1}{3}(e^3 - 3ey^2 + 2y^3)\,tg\alpha$ и отношеніе

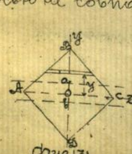
$\frac{1}{u}\int_y^e y\,d\omega = \frac{1}{6}(e^2 + ey - 2y^2)$. Максимум послѣдняго выраженія имѣет мѣсто при $y = e/4$ и равен $3/16\,e^2$.

2) Поперечное сѣченіе — площадь ограниченная отрѣзком параболы AOB (фиг. 130). Ур-іе кривой отнесено к вершинѣ $z^2 = 2py$. Если наибольшее значеніе для y назовем через H, то разстояніе центра тяжести C от вершины равно $e = 3/5\,H$. Согласно вышеизложенному будем имѣть:

Фиг. 130

$\frac{1}{u}\int_y^e y\,d\omega = \frac{1}{2z}\int_0^y 2z(e-y)\,dy = \frac{1}{2\sqrt{2py}} \cdot 2\sqrt{2p} \cdot$

$\int_0^y y^{1/2}(e-y)\,dy = \frac{2(5ye - 3y^2)}{15}$, откуда наибольшее значеніе получится при $y = 0{,}5H$, т.е. на разстояніи $r = 0{,}1H$ от нейтральнаго слоя. Если будем искать наибольшее значеніе K_s для квадратнаго сѣченія, поставленнаго на ребро, то хотя здѣсь имѣется двѣ оси симметріи, но искомый максимум с нейтральной осью не совпадает. Дѣйствительно, для верхней половины искомый слой проходит ||-но AC через точку A_1 (фиг. 131) отстоящую от нейтральнаго слоя на $aO = 1/4\,OB = \frac{1}{2}c\sqrt{2}$, гдѣ c — сторона квадрата. Для нижней половины соотвѣтственный максимум будет в $\underline{b}$. Часто, особенно при клепанных балках инте-

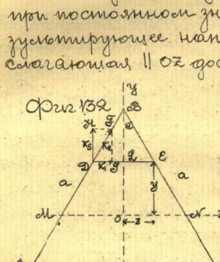


Фиг. 131.

ресно знать как вообще распредѣляются эти напряженія в данном поперечном сѣченіи, а потому считаем нужным показать на нѣскольких примѣрах нахожденіе закона распредѣленія.

Чтобы показать как можно найти величину полнаго касательнаго напряженія приведем два примѣра равнобедреннаго тр-ка и круга.

Пусть дан (фиг. 132) ΔABC. Проведем линію $DE \parallel AC$; пл-сть изгиба будет OY. Не трудно видѣть, что при постоянном значеніи составляющей $K_s \parallel OY$ результирующее напряженіе $K_2 = DF = \sqrt{K_s^2 + K_1^2}$, гдѣ K_1 слагающая $\parallel OZ$ достигает наибольшаго значенія для K_s в точках D и E. Значеніе для K_s опредѣляем по ур-ію (35) откуда $K_s = \frac{\Sigma P . M_c}{J . 2z}$



Здѣсь M_c — статическій момент площади DBE относительно оси OZ; слѣдовательно

$M_c = 1/2\,\overline{DE} . \overline{BL}\,(\overline{OL} + 1/3\,\overline{BL})$;

называя стороны ΔABC через $a = \overline{AB} = \overline{BC}$ и $b = \overline{AC}$ и высоту $BK = h$, получим:

$$K_s = \frac{\Sigma P\,h\,tg\alpha}{b . J_z}\left\{2/3\,hy - y^2 + \frac{2}{3}\,\frac{h}{6}(2/3\,h - y)\,tg\alpha\right\} \quad \ldots \quad (a)$$

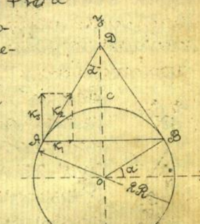
Наибольшее значеніе будет при $y = 1/6\,h$, как это мы уже видѣли выше. Далѣе из чертежа имѣем:

$$K_1 = K_s\,tg\alpha \quad \text{и} \quad K_2 = K_s\sqrt{1 + tg^2\alpha}$$

Для круга получается иное отношеніе. Дан круг радіуса R; проведем хорду $AB \parallel$ нейтральному слою NN (фиг. 133). На основаніи сказаннаго выше, вертикальная составляющая ($\parallel$ оси OY) — опредѣлится из ур-ія (35) — будет равна

$$K_s = \frac{\Sigma P}{3J_z} R^2 \cos^2\alpha$$

Слагающая K_s (в точкѣ A или B) будет, как и раньше, равна, оче-



Фиг. 133.

видно $k_1 = k_5 tg\alpha$ и результирующее $k_2 = k_5\sqrt{1+tg^2\alpha}$
или
$$k_5 = \frac{\Sigma \mathcal{P}}{3\mathcal{J}} \mathcal{R}^2 \cos^2\alpha \sqrt{1+tg^2\alpha} = \frac{\Sigma \mathcal{P}}{3.\mathcal{J}} \mathcal{R}^2 \cos\alpha \ldots \ldots (b)$$

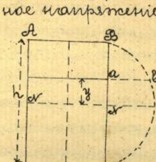
Из (b) находим что наибольшее значение для $k_2 = \frac{\Sigma \mathcal{P}\mathcal{R}^2}{3\mathcal{J}}$ будетъ имѣть мѣсто для нейтральнаго слоя и
$$k_2 = k_5 = \frac{\Sigma \mathcal{P}\mathcal{R}^2}{3\mathcal{J}}$$
ибо здѣсь k_1 обращается в нуль. Наибольшее значение для составляющей k_1 найдется из
$$k_1 = \frac{\Sigma \mathcal{P}\mathcal{R}^2}{3\mathcal{J}} \cos^2\alpha\, tg\alpha = \frac{\Sigma \mathcal{P}\mathcal{R}^2}{6.\mathcal{J}} \sin 2\alpha \quad \text{при } \alpha = 45^\circ$$

Из сказаннаго выше слѣдует, что по мѣрѣ удаления от нейтральнаго слоя вверх или вниз касательныя напряжения падают и при достижении наиболѣе удаленных от него волокон обращается в нуль. Это совершенно ясно из того, что если бы в поперечных сѣченiях у наружных волокон существовали касательныя напряжения, направленныя перпендикулярно нейтральному слою; то по закону двойственности должны появиться такiя же напряжения и в этих внѣшних наиболѣе удаленных волокнах. Но по заданию внѣшния силы состоят лишь из распредѣленных и сосредоточенных сил, дѣйствующих перпендикулярно оси бруска, а отнюдь не касательных к его поверхности. Непосредственныя наблюдения могут показать что прямая $\alpha\beta$ нанесенная напр. на боковой поверхности бруска послѣ изгиба обращается в кривую $\alpha_1 O \beta_1$, причем элементы кривой у α_1 и β_1 образуют с внѣшними прямыми углы в 90°. Это обстоятельство подтверждает предположение, что касательныя напряжения у наиболѣе удаленных волокон (при отсутствии внѣшних касательных сил) не возбуждаются и от нуля — в точках α_1 и β_1 — возрастают до maximum'а в точкѣ O на нейтральном слоѣ гдѣ и наблюдается наибольший угол сдвига $\mathcal{g}$ (фиг. 134)

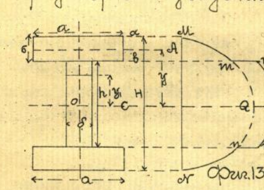

Фиг. 134.

Переходя к частным случаям возьмем брусок с прямоугольным сѣченiем имѣющим основание a и высоту h. Считая, что срѣзающая сила для нѣкотораго произвольнаго

сѣчения (фиг. 135) $\Sigma\mathcal{P}$ найдена, найдем, что касательное напряжение выразится так:


Фиг. 135.

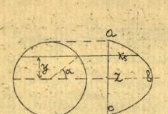
$$k_5 = \frac{\Sigma \mathcal{P}}{\mathcal{J}}\left(\frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2}\right) = \frac{\Sigma \mathcal{P}(h^2 - 4y^2)}{8\mathcal{J}} = \mathcal{A} + \mathcal{B}y^2,$$ т.е. получим ур-е параболы. При $y = \pm h/2$, k_5 обращается в нуль. При $y = 0$, k_5 достигает своего maximum'а. Если пожелаем искомую параболу построить, напр на сторонѣ пр-ка $\mathcal{B}\mathcal{C}$, то получим кривую $\mathcal{B}E\mathcal{C}$. Желая найти напряжение на разстоянии y от нейтральнаго слоя, проводим прямую $\mathcal{N}\mathcal{N}$ и отрѣзок ab даст в извѣстном масштабѣ искомое k_5. Пусть сѣчение имѣет форму двутавра с размѣрами указанными на фиг. 136. Для какого либо слоя $\mathcal{A}$ лежащаго в верхней (или что тоже в нижней) имѣем.


Фиг. 136.

$$k_5 = \frac{\Sigma \mathcal{P}}{8\mathcal{J}}(H^2 - 4y^2) = \mathcal{A} + \mathcal{B}y^2$$
причем зависимость эта справедлива на разстоянии от слоя a до b; в самом слоѣ $\underline{b}$ значение $\underline{u}$ сразу мѣняется от $\mathcal{B}$ до δ, почему от слоя $\underline{b}$ выражение для k_5 будет другое, а именно $\int_y^e y\,d\omega = 1/2\, a\delta(H-\delta) + 1/8\,(h^2-4y^2)\delta_1$, а потому
$$k_5 = \frac{\Sigma \mathcal{P}}{\mathcal{J}\delta_1}\left\{1/2\, a\delta(H-\delta) + 1/8\,(h^2-4y^2)\delta_1\right\} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{B}y^2,$$
т.е. здѣсь имѣет мѣсто парабола с отличной от первой постоянным членом $\mathcal{A}_1$. Графически это выразится так: первая зависимость представится параболой $\mathcal{M}mQn\mathcal{N}$, но она имѣет мѣсто лишь на частях $\mathcal{M}m$ и $n\mathcal{N}$; вторая зависимость выражается параболой $m'Q_1n_1$, которая есть ничто иное, как парабола mQn, отодвинутая вдоль оси OC на величину $mm' = QQ = nn_1$.

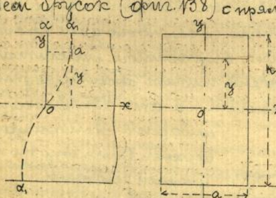
Круговое сѣчение: $k_5 = \frac{\Sigma \mathcal{P}}{3\mathcal{J}} \mathcal{R}^2 \cos^2\alpha = \mathcal{A}\cos^2\alpha = \mathcal{A} - \frac{\mathcal{A}y^2}{\mathcal{R}^2} = \mathcal{A} - \mathcal{B}y^2$ т.е. кривая параболическая abc (фиг. 137)

Итак предположение о том, что плоскiя сѣчения до изгиба, остаются таковыми при деформации бруска, оказывается не вѣрным. Указанное допущеніе, сдѣланное Бернулли, весьма упрощает вывод зависимости между внутренними и внѣшними силами, а потому интересно знать,



Фиг. 137.

как велика неточность указаннаго допущенія. Возьмем брусок (фиг. 138) с прямоугольным сѣченіем $a \cdot h$ и посмотрим в какую кривую $\alpha_1 O a$, обращается прямая $\alpha\alpha \perp$ оси бруска. Пусть начало координат находится в O и оси Ox и Oy направлены, как показано на фиг. 138. Возьмем точку a



Фиг. 138

с координатами y и x, для нея можно написать $dx = g\,dy$, гдѣ g — угол сдвига выразится так: $g = k_s/G = \dfrac{\Sigma P \int_y^e y\,d\omega}{J \cdot a \cdot G}$, а тогда ур-е кривой $\alpha_1 O a$, будет:

$$x = \int \frac{\Sigma P \int_y^e y\,d\omega}{J \cdot a \cdot G}\,dy + C \qquad (36)$$

В нашем случаѣ имѣем: $x = \dfrac{\Sigma P}{8 J G a}\int (h^2 - 4y^2)\,dy + C$

Не трудно видѣть, что при $x = 0$, $y = 0$ и слѣд. $C = 0$

$$x = \frac{\Sigma P}{8 J G}\left(h^2 y - \frac{4y^3}{3}\right)$$

наибольшее значеніе для x будет при $y_{max} = \frac{h}{2}$, а потому имѣем:

$$x_{max} = \frac{\Sigma P h^3}{24 G J} = 0{,}5\,\frac{\Sigma P}{G a}$$

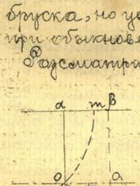
Пусть для чугунной балки $l = 2^m$, $a = 100^m/_m$, $h = 400^m/_m$, $\Sigma P = 4000$ klg. При этих условіях наибольшее напряженіе при растяженіи достигает 3 klgr. на кв. $^m/_m$. Наибольшее касательное напряженіе $k_s = 1{,}2$ klgr. на кв. $^m/_m$, что для чугуна надо принять весьма достаточным. Полагая далѣе $G = 3000$ klgr. на кв. $^m/_m$, найдем, что $x_{max} = \frac{0{,}5 \cdot 4000}{3000 \cdot 100} = \sim 0{,}007^m/_m$.

Как мы видим получается величина настолько ничтожная, что говорить о перекашиваніи сѣченія в данном случаѣ не стоит.

Возьмем случай болѣе пластичнаго матеріала. Желѣзный лист толщиною $b = 10^m/_m$ и высотою $800^m/_m$, подвергается срѣзывающей силѣ $= P = 5000$ klg.; $G = 7700$ klgr. на кв. $^m/_m$. $x_{max} = 0{,}5\,\frac{5000}{7700 \cdot 10} = 0{,}0325^m/_m$, точно также величина очень малая.

Легко показать, что благодаря присутствію касательных напряженій увеличивается стрѣла прогиба бруска, но увеличеніе это также незначительно и при обыкновенных вычисленіях им пренебрегают.

Разсматривая два сѣченія $\alpha\alpha$ и $\beta\beta$ (фиг. 139) расположенных друг относительно друга на разстояніи равном dx, замѣчаем, что если вообразить сѣченіе $\alpha\alpha$ неподвижным то точка O_1 переместится в O_2 и стрѣла прогиба будет $O_1O_2 = dx \cdot g$. Если бы угол сдвига оставался постоянным на всем протяженіи $\alpha\alpha$, то стрѣла прогиба в сѣченіи $\beta\beta$ или что то же $\alpha\alpha$ была бы O_1O_2. Но угол сдвига измѣняется от α до α по тому же закону



Фиг. 139

как и k_s. Поэтому стрѣла прогиба измѣняется для каждаго волокна в мѣстѣ с разстояніем его от нейтральнаго слоя и обращается в нуль для крайних фибр.

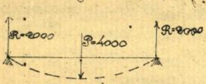
Поэтому вычислить точно эту стрѣлу нельзя — ее принимают равной стрѣлѣ, которая получилась бы, если бы касат. напряж. оставалось распредѣленным равномѣрно; другими словами вычисляют дополнительную стрѣлу для $k_s = \frac{\Sigma P}{\omega}$. При этих условіях получаем ур-е упругой кривой (от касательных напряженій) в видѣ:

$$y = \int \frac{\Sigma P}{\omega \cdot G}\,dx + C$$

Пусть дана желѣзная балка длиною 6 метров, на двух опорах, нагруженная по серединѣ силою $P = 4000$ klg. Сѣченіе двутавровое № 30 по русск. сортам. Имѣем $\Sigma P = 2000$ klgr. = const., $G = 7700$ klgr., $\omega = 6361^m/_m$ и $y = \frac{2000x}{6361 \cdot 7700} + C$ при $x = \frac{l}{2}$, $y = 0$ и $C = \frac{3000 \cdot 2000}{6361 \cdot 7700}$ и $y_{max}\big|_{x=0} = 0{,}122^m/_m$. Между тѣм стрѣла прогиба от изгибающаго момента будет, как видим из (33)

$$y = f = \frac{Pl^3}{48EJ} = 102{,}23^{m/m}$$

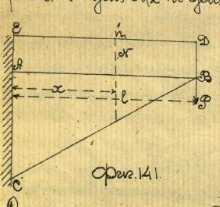
таким образом и полная стрѣла $f = 102{,}352^{m/m}$, т. е. приращеніе, вслѣдствіе касательных напряженій, совершенно ничтожно. Поэтому дальнѣйшее разсмотрѣніе, как могущее имѣть лишь теоретическое значеніе мы оставим.



Фиг. 140.

Перейдем теперь к опредѣленію наибольшаго значенія срѣзающей силы ΣP в различных случаях. Общій способ заключается в нахожденіи $maximum$'а $\frac{dM_x}{dx}$. Общій аналитическій пріем извѣстен и мы остановимся лишь на графическом способѣ, который имѣет значительное преимущество в своей наглядности. Дѣйствительно, весьма часто приходится провѣрять сѣченіе балки на касательныя напряженія не только в мѣстѣ, гдѣ сумма достигает $maximum$'а, но и в других точках по оси, а потому весьма удобно сразу видѣть, как измѣняется величина ΣP в мѣстѣ о x.

Так как обыкновенно при разсчетах приходится сначала опредѣлить величины изгибающих моментов, то будем разсматривать построеніе діаграммы одновременно для M_x и для ΣP



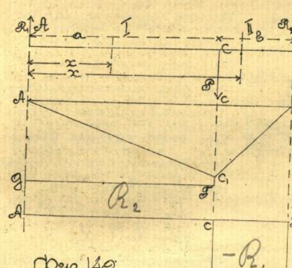
Фиг. 141.

1) Балка AB (фиг. 141) защемлена одним концом и нагружена на свободном концѣ сосредоточенной силой P. Для произвольнаго сѣченія N имѣем $M_x = P(l-x)$. $M_{max}|_{x=0} = Pl$. Откладывая $AC = Pl$, находим кривую изгибающих моментов в видѣ прямой BC.

Сѣкущая сила $\Sigma P = P$ и постоянна по всей длинѣ балки. Откладывая в масштабѣ сил $AE = P$, находим, что закон измѣненія ΣP выражается прямой ED.

2) Балка (фиг. 142) лежит на опорах A и B и нагружена силою P в точкѣ C. Реакціи на опорах будут

в A — $R_1 = \frac{Pb}{l}$ и в B — $R_2 = \frac{Pa}{l}$

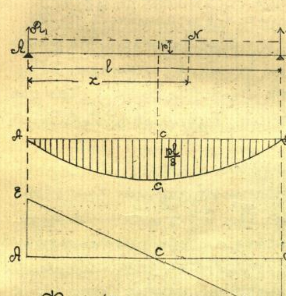


Фиг. 142.

Изгибающіе моменты выразятся в части I $M'_x = P(a-x) - R_2(l-x)$ и II $M''_x = -R_2(l-x)$. Кривая изгибающих моментов будет ломанная AC_1B ибо для точки C, т. е. при $x=a$ $M'_x = M''_x = \overline{CC_1}$. Срѣзающая сила ΣP во II части будет равна $R_2 = \frac{Pa}{l}$ и постоянна на участкѣ CB. В I части срѣзающая сила $= \frac{Pa}{l} - P = -\frac{Pb}{l} = R_1$ и также постоянна по всей длинѣ. Если положительную $\Sigma P = R_2$ будем отсчитывать от AB вниз, то на участкѣ AC $\Sigma P = -R_1$ надо откладывать вверх. Так. обр. діаграмма срѣзающей силы будет $AdFCEDB$, гдѣ $Ad = CF = R_2$ и $CE = BD = R_1$.

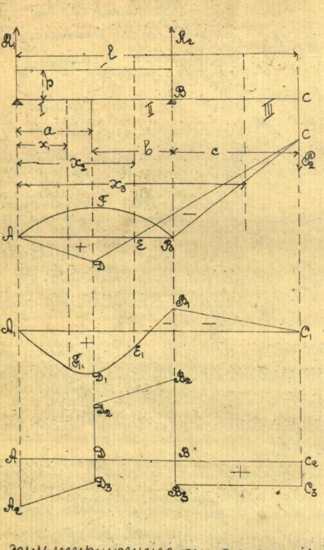
3) Балка лежит на опорах AB (фиг. 143) и нагружена равномѣрно распредѣленной нагрузкой p kg. на 1 пог. метр.

Для любого сѣченія N имѣем $M_x = p\frac{(l-x)^2}{2} - R_2(l-x) = p\frac{(l-x)^2}{2} - \frac{pl}{2}(l-x)$. Наибольшее значеніе $M_{max.} = -\frac{pl^2}{8} = CC_1$ будет посрединѣ бруска и кривая M_x представится параболой AC_1B. Сѣкущая сила $\Sigma P = \frac{dM_x}{dx} = \frac{p}{2}(2x-l)$ т. е. распредѣленіе ея представится прямой ED, если $BD = AE = R_1 = R_2 = \frac{pl}{2}$ при $x = l/2$ $\Sigma P = 0$ т. е. прямая ED пересѣкает AB в точкѣ C.



Фиг. 143

4) Балка (фиг. 144) лежит на опорах и нагружена равномѣрно распредѣлен-



ными грузом p. Кромѣ этого приложены сосредоточенныя силы: P_1 между опорами и P_2 на свѣшивающемся концѣ (консоль). Имѣем три части упругой кривой; соотвѣтственно:

$M'_x = -R_1 x_1 + \frac{p x_1^2}{2}$;

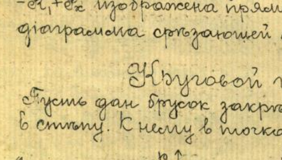
$M''_x = -R_1 x_2 + \frac{1}{2} p x_2^2 + P_1 x_2$,

$M'''_x = P_2 (l - x_3)$

Графически удобнѣе представить сначала кривую изгибающих моментов от сосредоточенных грузов. Это показано діаграммой $ABCDE$, кривая AFB (парабола) соотвѣтствует кривой от распредѣленнаго груза. Наконец $A_1F_1D_1E_1B_1C_1$ представляет результирующую от сложенія обѣих предыдущих діаграмм. Срѣзающая сила в $\overline{III}$ участкѣ $\Sigma P_3 = -P_2$ постоянна по длинѣ BC и представляет прямую B_3C_3 ($B_2B_3 = R_2$). Срѣзающая сила в $\overline{I}$ участкѣ $\Sigma_1 P = -R_1 + P_x$ изображена прямой D_3A_2 ($D_2D_3 = P_1$). Так. обр. діаграмма срѣзающей силы будет $AA_2D_3D_2B_2B_3C_3C_2$.

Круговой изгиб

Пусть дан брусок закрѣпленный одним концом в стѣну. К нему в точках B и C приложены двѣ равныя и противоположныя силы P, P на разстояніи $\underline{a}$ друг от друга (фиг. 145).



Фиг. 145

Если возьмем на разстояніи x от точки закрѣпленія (в предѣлах от A до C) сѣче-

ніе N, то момент внѣшних сил относительно этого сѣченія будет: $M_x = P(l-x) - P(l-a-x) = Pa = \mathrm{Const.}$, т. е., изгибающій момент — величина постоянная и равен моменту пары (P, P). Упругая кривая в данном случаѣ представляет дугу круга, почему и самый изгиб называется круговым. Момент внѣшних сил $M = \frac{EJ}{\rho} = Pa = \mathrm{const.}$, но для данного бруска E и J — величины постоянныя а в таком случаѣ и $\rho = R$ постоянно[1])

Другим явленіем характеризующим круговой изгиб является отсутствіе касательных напряженій. Величина касательнаго напряженія

$$k_s = \frac{\Sigma P \int_y^e y\,d\omega}{uJ} = \frac{\frac{dM_x}{dx}\int_y^e y\,d\omega}{u.J}$$

но момент внѣшних сил — постоянная величина, слѣд., и производная его тож равна нулю, а в таком случаѣ и касательн. напряженія k_s обращаются в нуль.

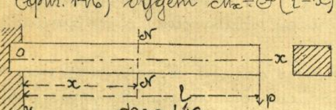
Конечно явленіе кругового изгиба будет лишь на участкѣ AB что же касается части CB то упругая кривая здѣсь выразится ур-іем $EJy'' = P(l-x)$.

Тѣла равнаго сопротивленія изгибу.

При изгибѣ бруска нормальныя напряженія (сжатіе и растяженіе) распредѣляются неравномѣрно не только по поперечному сѣченію, но и по длинѣ бруска. Для данного поперечнаго сѣченія напряженіе произвольнаго волокна, отстоящаго от нейтральнаго слоя на разстояніе y напряженіе будет: $k = \frac{M_x y}{J}$ и для крайней фибры $k_e = \frac{M_x e}{J}$. Измѣняя значеніе x (положеніе поперечнаго сѣченія) будем получать различныя значенія M_x, а стало быть и k (исключеніе составляет круговой изгиб, при котором $M = \mathrm{Const.}$). Поэтому построить тѣло рав-

1) Сказанное конечно справедливо лишь условно, ибо при выводѣ ур-ія упругой кривой в выраженіи для радіуса кривизны опущена первая производная y' поэтому точная кривая изгиба в данном случаѣ отклоняется от окружности.

наго сопротивленія изгибу, при условіи, чтобы напряженіе во всѣх частицах бруска были постоянны, невозможно. Тѣм не менѣе, принимая во вниманіе, что при постоянном сѣченіи, напряженіе К убывает с уменьшеніем M_x надо признать призматическую форму не раціональной. Можно поставить требованіе, чтобы в каждом поперечном сѣченіи наибольшее напряженіе растяженія (сжатія) оставалось постоянным. Тѣло построенное в этом предположеніи называется тѣлом равнаго сопротивленія изгибу и имѣет ту выгоду, что требует меньшее количество матеріала. Пусть дан брусок, закрѣпленный одним концом в стѣну и подверженный дѣйствію изгибающей силы P. Момент для какого либо произвольнаго сѣченія N (фиг. 146) будет $M_x = P(l-x)$. Положим далѣе, что брусок имѣет прямоугольное сѣченіе, тогда $W = \frac{ah^2}{6}$, если a и h основаніе и высота пр-ка.



Фиг. 146.

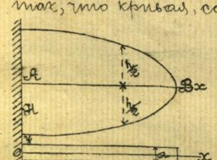
Подставляя в ур-іе прочности имѣем:

$$h^2 = \frac{6P(l-x)}{ak_1} = 2\frac{3P}{ak_1}(l-x) \quad \ldots \quad (a)$$

или полагая $\frac{3P}{ak_1} = p$, получим: $h^2 = 2p(l-x)$, что представляет ур-іе параболы, отнесенной к осям XY. Так. обр., если основанія поперечных сѣченій остаются постоянными, то высота измѣняется так, что кривая, соединяющая крайнія точки (контур), является параболой (фиг. 147). Положим $x = 0$, ~~тогда~~

$$h^2_{x=0} = H^2 = 2pl = \frac{6Pl}{ak_1}$$

а площадь закрѣпленнаго сѣченія $\omega = Ha$.



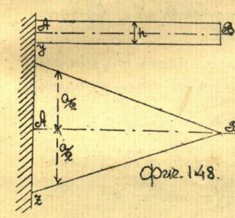
Фиг. 147.

Примѣр 2-ой. Допустим теперь что высота h пр-ка не измѣняется по длинѣ бруска.

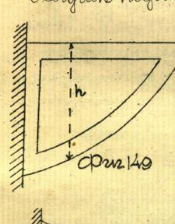
Тогда из выраженія (a), имѣем:

$$a = \frac{6P(l-x)}{h^2 k_1},$$

что представляет ур-іе первой степени с двумя неизвѣстными, т. е. брусок будет очерчен двумя прямыми, проходящими через точку B на разстояніи l от начала координат (фиг. 148). Двѣ разсмотрѣнныя формы тѣл равнаго сопротивленія являются наиболѣе употребительными. Нужно замѣтить, что на практикѣ эти формы в том видѣ, в каком мы их получим, т. е. со строго теоретическим очертаніем, почти не употребляются, а служат при конструированіи, так сказать, руководством для созданія раціональных форм. Непригодность математически-правильнаго очертанія явствует, напр. из того, что сѣченіе B (фиг. 148) имѣет площадь = 0. На практикѣ полученную величину h, в случаѣ постояннаго основанія a чаще откладывают вниз (фиг. 149).



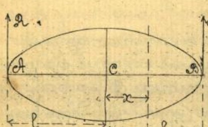
При постоянной высотѣ h на нѣкотором участкѣ b бруску придают призматическую форму (фиг. 150). Если желательно получить брусок равнаго сопротивленія с перемѣнными h и a, то задается отношеніе этих величин: $h : a = n$. В таком случаѣ имѣем ур-іе



$$k_1 = \frac{6P(l-x)}{ah^2} = \frac{6P(l-x)}{n^2a^2} = \frac{6P(l-x)n}{h^3}$$

откуда $a^3 = \frac{6P(l-x)}{n^2 k_1}$ и $h^3 = \frac{6nP(l-x)}{k_1}$

Примѣр 3-ій. Балка длиною $2l$ пр-аго сѣченія $a \times h$, нагружена равномѣрно распредѣленным грузом p, лежит свободно на двух опорах. Вслѣдствіе симметричности (фиг. 151) изгиба, положим начало координат в C. Для сѣченія, отстоящаго на разстояніи x от C, изгибающій момент:



Фиг. 151.

$$M_x = \frac{p(l-x)^2}{2} - pl(l-x) = \frac{p(l^2-x^2)}{2} =$$

$$= -\frac{p(l^2-x^2)}{2}$$, Наибольшее (абсолютное) значеніе M_x будет

$$M_{x=0} = -\frac{pl^2}{2}$$

Называя высоту балки в среднем через h_1, момент инерціи для него через J_1 и полагая $a = const.$, имѣем:

$$\frac{pl^2}{2} = \frac{2J_1}{h_1} K_b = \frac{ah_1^2}{6} K_b$$

Для сѣченія x: $\frac{1}{2}(l^2-x^2)p = \frac{1}{h_x} 2J_x K_b = \frac{1}{6} \cdot ah_x^2 K_b$ или

$$K_b = \frac{6pl^2}{2h_1^2 a} = \frac{6p(l^2-x^2)}{2ah_x^2}$$, откуда $\frac{h_x^2}{h_1^2} + \frac{x^2}{l^2} = 1$, т.е.

боковое очертаніе должно быть произведено по эллипсу с полуосями $h^1/_2$ и l.

Изложенные три примѣра, показывают, что балка формы равнаго сопротивленія требует матеріала значительно меньше нежели призматическія. Так в первом случаѣ экономія в объемѣ достигает 53%, ибо объем балки равнаго сопротивленія относится к объему призматической формы, как площадь параболы (фиг. 152) к площади описаннаго пр-ка.

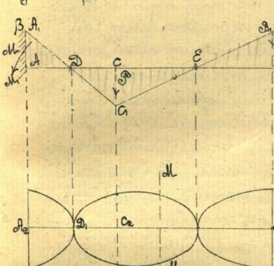
Фиг. 152

В эллиптической балкѣ экономія будет равна:

$$\frac{2lh_1 - \pi l\frac{h_1}{2}}{2lh_1} = \frac{4-\pi}{4} = 0{,}21 \text{ т.е. } 21\%$$

В тѣх случаях, когда упругая кривая имѣет точку перегиба, а слѣд., когда изгибающій момент мѣняет свой знак, переходя через нуль, форма тѣла равнаго сопротивленія получается сложнѣе; брус как бы состоит из отдѣльных частей не связанных между собою. Напр. в балкѣ AB защемленной по концам A и B и нагруженной в C (фиг. 153) сосредоточенной силой

P, имѣем двѣ точки D и E перехода M_x через нуль. Из условій $M_x = \frac{J}{e}K$ при $M_x = 0$ имѣем $J = 0$ т.е. поперечное сѣченіе обращается в нуль. Пусть сѣченіе будет пр-ое с постоянным основаніем $\underline{a}$, тогда для нѣкотораго сѣченія MM имѣем зависимость:



Фиг. 153

$$M_x = M_2 - R_2(l-x) = \frac{1}{6} ah_x^2 K$$

Здѣсь M_2 и R_2 защемляющій момент и реакція в опорѣ B. Не трудно видѣть, что боковое очертаніе балки на участкѣ CE представится параболой

$$h_x^2 = \frac{6}{K}\{-R_2(l-x) + M_2\}$$

На участкѣ DC будем имѣть параболу

$$h_x^2 = \frac{6}{K}\{-R_1 x + M_1\}$$

На участкѣ AD —

$$h_x^2 = \frac{6}{K}\{-R_1 x + M_1\}$$

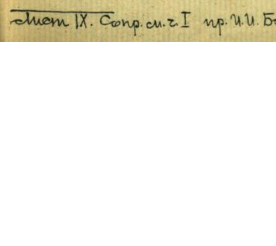
и на участкѣ EB —

$$h_x^2 = \frac{6}{K}\{-R_2(l-x) + M_2\}$$

Дана балка на фиг. 154, имѣем в сѣченіи NN

$$M_x = -R_2(l-x) + P\frac{(l-x)^2}{2} = \frac{P}{8}(5lx - l^2 - 4x^2) = \frac{ah_x^2}{6}K$$

Это будет ур-іе эллипса с полуосями $B_1D_1 = \frac{3}{8}l$ и $D_1D = \sqrt{\frac{27pl^2}{256aK}}$ (64) Дѣйствительно, т. к. точка перегиба находится в C_1 на разстояніи $A_1C_1 = \frac{1}{4}l$, то перенося начало координат из A_1 в D_1, причем $A_1D_1 = \frac{5}{8}l$, находим ур-іе



Фиг. 154.

$$\frac{x^2}{(\frac{3}{8}l)^2} + \frac{h_x^2}{\frac{27Pl^2}{64aK}} = 1$$

На участкѣ A_1C_1 имѣем зависимость:

$$\frac{ah_x^2}{6}K = \frac{P}{8}\{4x^2 + l^2 - 5lx\}$$

ибо момент в C_1 мѣняет свой знак и слѣд. получается гипербола.

Разсматривая тѣло равнаго сопротивленія изгибу, замѣчаем, что здѣсь имѣются сѣченія, обращающіеся по величинѣ в нуль для точек перегиба упругой кривой. Практически выполненіе таких тѣл, конечно, невозможно; но и теоретически сѣченія эти должны имѣть нѣкоторую величину; дѣйствительно до сих пор мы принимали вовниманіе лишь напряженія нормальныя. Между тѣм maximum срѣзающей силы не совпадает с minimum'ом момента. Для послѣдняго случая, напр., имѣем $\Sigma P = P/8\{5l - 8x\} = 0$ при $x = 5/8\,l$, т.е. в сѣченіи, гдѣ изгибающій момент равен $9/128\,Pl$. Maximum для суммы P будет при $x = 0$, когда $\Sigma P = 5/8\,Pl$. В том сѣченіи, гдѣ $M_x = 0$, т.е. при $x = 1/4\,l$; имѣем $\Sigma P = 3/8\,Pl$. При пр-ом сѣченіи и $a = const.$, имѣем:

$$k_s = \frac{1}{J}\cdot\frac{3}{64}Pl(h^2 - 4y^2)$$

Т.к. k_s достигает наибольшаго значенія при $y = 0$, то $k_{max.} = \frac{3plh^2}{64J}$, откуда по заданному k_s находим соотвѣтственное значеніе для h.

При нагрузкѣ силами сосредоточенными на участках между точками приложенія сил величина ΣP остается постоянной, а потому и в предыдущем примѣрѣ в сѣченіях, гдѣ M_x обращается в нуль, напряженія касательныя будут отличны от нуля и слѣд. поперечное сжатіе должно имѣть конечные размѣры.

Деформація тѣл равнаго сопротивленія на изгиб и ур-іе кривой изгиба в тѣлах равнаго сопротивленія.

Деформація тѣла равнаго сопротивленія сравнительно с деформаціей призматическаго бруска при прочих равных обстоятельствах (одинаковой длинѣ, том же способѣ закрѣпленія на опорах, внѣшних силах и способѣ их приложенія) всегда больше чѣм во втором.

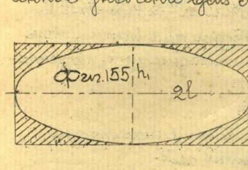
Докажем это, напр., для перваго из разсмотрѣн-

ных случаев. Из общаго ур-ія кривой изгиба, имѣем:

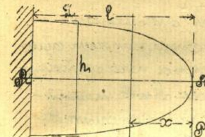
$$\pm Ey'' = \frac{M_x}{J} \quad \ldots\ldots \quad (a)^{1)}$$

С другой стороны из выраженія $M_x = W_x k_b = \frac{2J_x}{h_x}k_b$ получим $\frac{M_x}{J_x} = \frac{2k}{h_x}$. Подставляя полученное значеніе для M_x/J_x в ур-іе (a), найдем:

$$\pm Ey'' = \frac{2k}{h_x} \quad \ldots\ldots \quad (b)$$



Полагая $x = l$, т.е. переходя к сѣченію A (фиг. 156), в котором на основаніи выраженія $Pl = 1/6\,ah_1^2\,k_b$ имѣем: $h_1 = \sqrt{\frac{6Pl}{ak_b}}$, (при $x = l$)



Фиг. 156.

найдем, что момент инерціи этого сѣченія будет:

$$J_1 = \frac{ah_1^3}{12} = \frac{a}{12}\sqrt{\left(\frac{6Pl}{ak_b}\right)^3}$$

Перемножая почленно полученное выраженіе для момента инерціи с выраженіем (b), находим:

$$EJy'' = \frac{ak_b}{6h_x}\sqrt{\left(\frac{6Pl}{ak_b}\right)^3}, \text{ но } h_x^{2)} \sqrt{\frac{6Px}{ak_b}} \text{ и слѣдоват.}$$

$$EJ_1y'' = \frac{ak_b\sqrt{\left(\frac{6Pl}{ak_b}\right)^3}}{6\sqrt{\frac{6Px}{ak_b}}} = \frac{ak_b\sqrt{\left(\frac{6Pl}{ak_b}\right)^3}}{6\sqrt{\frac{6Pxl}{ak_b l}}} = \frac{ak_b\sqrt{\left(\frac{6Pl}{ak_b}\right)^3}}{6\sqrt{\frac{6Pl}{ak_b}}\sqrt{\frac{x}{l}}} = \frac{Pl}{\sqrt{\frac{x}{l}}} = Pl\left(\frac{x}{l}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Итак ур-іе кривой изгиба тѣла равнаго сопротивленія будет: $EJ_1y'' = Pl\left(\frac{x}{l}\right)^{-\frac{1}{2}} = Pl\sqrt{l}\,x^{-\frac{1}{2}}$

Интегрируя это выраженіе два раза, получаем:

$$\left.\begin{aligned} EJ_1y' &= 2Pl\sqrt{l}\cdot x^{1/2} + C_1 \quad \ldots\ldots \quad (1) \\ EJ_1y &= 4/3\,Pl\sqrt{l}\cdot x^{3/2} + C_1x + C_2 \quad \ldots \quad (2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (d)$$

Произвольныя постоянныя C_1 и C_2 опредѣляются из того условія, что для сѣченія A (фиг. 156) стрѣла прогиба равна нулю и тангенс угла наклона также будет нуль, т.е

1) В ур-ніи (a) величина J_x, вообще говоря, перемѣнная. В частном случаѣ призматическаго бруска $J = const.$

2) Для упрощенія вычисленій начало коор-т предположим в точкѣ B и слѣд. плечо момента будет x, а не $(l-x)$

при абсциссѣ $x=l$, $y'=y=0$, а в таком случаѣ из выраженія (α) слѣдует: $EJ_1 y' = 0 = 2Pl^2 + C_1$ или $C_1 = -2Pl^2$

$EJ_1 y = 0 = \frac{4}{3}Pl^3 - 2Pl^3$ или $C_2 = \frac{2}{3}Pl^3$

Подставляя полученныя величины для произвольных постоянных в ур-іе [α(2)], мы получаем общее выраженіе для ур-ія изгиба: $EJ_1 y = \frac{4}{3}Pl\sqrt{l}\cdot x^{3/2} - 2Pl^2 x + \frac{2}{3}Pl^3$

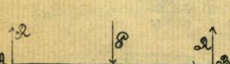
Наибольшая стрѣла прогиба будет для точки B и ея величина получится, если в послѣднее ур-іе подставим $x=0$. Получим:

$$y = f = \frac{2Pl^3}{3EJ},$$

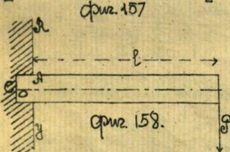
т.е. стрѣла прогиба в два раза больше нежели для призматическаго бруска с сѣченіем aH.

Реакція опор и защемляющій момент.

Из теоретической механики извѣстно, что если данный брусок лежит на двух опорах и на него дѣйствует изгибающая сила P, то в точках A и B появляются силы ||ныя и обратно направленныя силѣ P. Эти силы называются реакціями опор. В данном случаѣ онѣ опредѣляются (фиг. 157) просто по правилу разложенія ||ных сил. Посмотрим, чему равна реакція в брускѣ закрѣпленном одним концом в стѣну (фиг. 158). Как извѣстно для равновѣсія даннаго тѣла нужно, чтобы сумма проекцій всѣх дѣйствующих сил на координатныя оси равнялась нулю. Напишем такое условіе для оси y-ов, т.е.



Фиг. 157

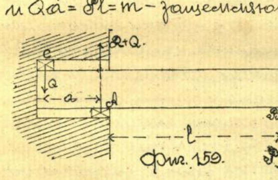


Фиг. 158.

$$\Sigma_y P = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

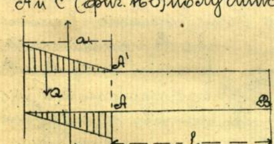
На тѣло дѣйствует только одна сила P, ||ная оси y-ов и неравная нулю, поэтому чтобы условіе (a) было выполнено, необходимо предположить, что существует еще какая то сила R, уравновѣшивающая силу P, т.е. $P+R=0$. Точка приложенія этой реакціи находится гдѣ либо между A и C, так как реакція представляет собою взаимодѣйствіе матеріала,

окружающаго защемленный конец, на брусок. Но присутствіе такой силы R, приложенной между A и C не может удержать брусок в равновѣсіи, ибо должно быть удовлетворено условіе, чтобы сумма моментов всѣх сил относительно произвольной точки должна равнялись нулю. Отсюда нетрудно заключить, что кромѣ реакціи R на защемленный конец должна дѣйствовать еще пара сил. Эта пара сил дает момент, уравновѣшивающій момент внѣшних сил, приложенных к бруску и носящій названіе защемляющаго момента. Представим себѣ случай защемленія, когда брусок опирается на подкладки в точках A и C. Нетрудно видѣть, что в данном случаѣ реакціей в точкѣ A будет сила $R+Q$, гдѣ $R=P$ и $Qa = Pl = m$ — защемляющему моменту (фиг. 159).



Фиг. 159.

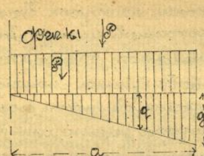
В общем случаѣ закрѣпленія конца, когда брус опирается на опору не в одной точкѣ, наибольшее сжатіе получится в точках A и C. С большой степенью достовѣрности можно допустить, что распредѣленіе напряженія на A и C (фиг. 160) получится по закону прямой линіи.



Фиг. 160.

Приложим в центрѣ защемленной части двѣ силы P и −P. Тогда защемляющій момент $m = \frac{1}{3}Qa = P(l + a/2)$, а давленіе со стороны балки на стѣну в нижней грани сложится из давленія силою P и неравномѣрно распредѣленной нагрузки q[1] равнодѣйствующей Q. Если ширина балки = b, то давленіе на 1 кв. ед в опорной части будет: $k = P/ab + q$, причем наибольшаго значенія оно достигнет у края стѣны (фиг. 161), гдѣ $q = q_1$, т.е. $k_{max} = \frac{P}{ab} + q_1$. Величина q_1 найдется так. Найдя значенія $Q = \frac{3P}{a}(l + a/2)$, на-

[1] q — представляет перемѣнную ординату нагрузки.



Фиг. 161

пишем выраженіе Q через q, так что $Q = \frac{q \cdot ab}{2}$, а отсюда $q = \frac{6P}{a^2 b}(l + a/2)$ и $K_{max} = \frac{P}{ab}\left\{1 + \frac{3(2l+a)}{a}\right\}$

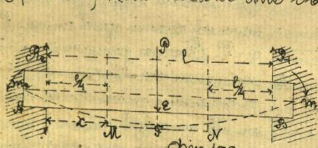
В дальнѣйшем изложеніи будем принимать способ защемленія указанный на фиг. 159.

Балки статически неопредѣлимыя.

При рѣшеніи вопросов в теоріи сопротивленія матеріалов необходимо прежде всего найти всѣ, внѣшним образом приложенныя системы сил. В число их, кромѣ данных, входят силы реакціи. В тѣх случаях, когда для нахожденія сил реакціи достаточно условій дает статика, балки называются статически опредѣлимыя. В других случаях, когда статика не может доставить необходимое и достаточное количество ур-ій равновѣсія, приходится прибѣгать к теоріи упругости. Разсмотрим нѣсколько примѣров рѣшенія вопроса, так называемых, статически неопредѣлимых балок.

Примѣр 1-ый. Призматическая балка, закрѣпленная обоими концами в стѣны, нагружена сосредоточенной силой приложенной в срединѣ между опорами (фиг. 162). Как только что было выведено — в точках A и B появляются реакціи опор R_1 и R_2 и защемляющіе моменты m_1 и m_2.[x)] Статика нам дает условіе равновѣсія сил:

$$P - R_1 - R_2 = 0 \quad \ldots \quad (a)$$



Фиг. 162.

Но т.к. изгибающая сила в данном случаѣ приложена посрединѣ, то реакціи равны $R_1 = R_2 = P/2$. Другое

x) Вообще говоря, появляются в реакціи, а именно еще двѣ горизонтальных H_1 и H_2 в данном случаѣ равных между собою. Величина их для разсматриваемых случаев статически неопредѣлимых балок очень незначительна и мы не принимаем их в разсчет.

условіе равновѣсія, именно сумма моментов относительно произвольной точки равна нулю, сводится к первому. В самом дѣлѣ, защемляющіе моменты в точках A и B равны между собой, т.е. $m_1 = m_2$. Напишем, что сумма моментов всѣх сил относительно точки A равна нулю $\Sigma M_A = \frac{Pl}{2} - R_1 l + m_1 - m_2 = 0$, оно дает $R_1 = \frac{P}{2}$. Так. обр. из условій статики нельзя найти неизвѣстный защемляющій момент. Для его опредѣленія воспользуемся тѣми свѣдѣніями, которыя дала до сих пор теорія изгиба. Начало координат положим в точкѣ A. Общее ур-іе кривой изгиба (для лѣвой половины)

$$EJy'' = M_x = -\frac{Px}{2} + m_1 \quad \ldots \ldots \quad (c)^{1)}$$

Интегрируя это ур-іе два раза получаем:

$$\left.\begin{aligned} EJy' &= -\frac{Px^2}{4} + m_1 x + C_1 \\ EJy &= -\frac{Px^3}{12} + \frac{m_1 x^2}{2} + C_1 x + C_2 \end{aligned}\right\} \cdots (d)$$

Для опредѣленія постоянных воспользуемся тѣм обстоятельством, что в мѣстах закрѣпленія прогиба нѣт, т.е. при $x = 0$ и $y = 0$. Кромѣ того благодаря защемленію, первый элемент кривой горизонтален и слѣд. $y' = 0$. Поэтому ур-ія (d) примут вид:

$$EJy' = -\frac{Px^2}{4} + m_1 x; \quad EJy = -\frac{Px^3}{12} + \frac{m_1 x^2}{2}$$

Т.к. сила приложена в срединѣ (в E), то в этой точкѣ кривая дѣлится на двѣ симметричныя части. Общая касательная к кривой (к обѣим частям) в точкѣ F будет $\parallel^{\text{на}}$ оси бруска, слѣд. для этой точки также первая производная обращается в нуль, т.е. при $x = l/2$, $y' = 0$, а потому

$$EJy' = 0 = -\frac{Px^2}{4} + m_1 x \Big|_{x = l/2}$$

подставляя $x = \frac{l}{2}$, имѣем:

$$-\frac{Pl^2}{16} + m_1 \frac{l}{2} = 0 \quad \text{откуда} \quad m_1 = \frac{2Pl^2}{16l} = \frac{Pl}{8} = m_2$$

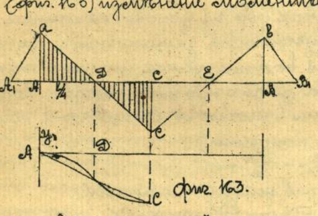
Для опредѣленія изгибающаго момента M_x стоит только в ур-іе $M_x = -\frac{Px}{2} + m_1$ подставить найденное значеніе m_1 т.е.

$$M_x = -\frac{Px}{2} + \frac{Pl}{8} \quad \ldots \ldots \quad (e)$$

Этот момент зависит от перемѣннаго x и постоянной $\frac{Pl}{8}$; слѣд. всегда возможно найти значеніе x при котором $M_x = 0$.

1) Знак перед лѣвой частью берем (+), ибо расположеніе кривой изгиба неизвѣстно.

Полагая в (е) $M_x = 0$, находим, что $x = l/4$. Слѣд., на разстояніи $x = l/4$ от точки A, изгибающій момент M_x, а слѣд. и напряженіе матеріала (нормальное) обращается в нуль. При увеличеніи x — момент M_x становится отрицательным. Графически (фиг. 163) измѣненіе момента представится прямой aDC. Раньше было получено, что $M_x = EJ \, 1/\rho_x$, очевидно, что при $M_x = 0$ $\rho_x = \infty$, т.е. на кривой изгиба в точкѣ D должна существовать точка перегиба и выпуклая часть переходит в вогнутую.



Фиг. 163.

Вслѣдствіе полной симметричности нагрузки, правая часть изогнется так же как и лѣвая и в точкѣ E, отстоящей на $x = 3/4\, l$ от A будет подобная же точка перегиба. Это можно показать аналитически, если написать ур-іе кривой изгиба для правой половины балки. Наибольшее значеніе M_x равное $\frac{Pl}{8}$ получаем в точках A, C и B. Точки A, B и C являются поэтому опасными сѣченіями.

Наибольшая стрѣла прогиба будет в точкѣ F и находится из ур-ія $y = \frac{1}{EJ}\left\{\frac{Px^3}{12} + \frac{mx^2}{2}\right\}$ если подставить $m = \frac{Pl}{8}$ и $x = \frac{l}{2}$, то

$$f_{max.} = \frac{1}{EJ}\,\frac{Pl^3}{192} \quad \ldots \ldots \quad (I)$$

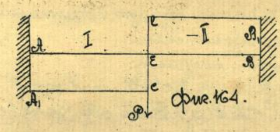
Для стрѣлы прогиба балки, лежащей свободно на двух опорах было получено:

$$f = \frac{1}{48} \cdot \frac{Pl^3}{EJ} \quad \ldots \quad (II)$$

слѣд. в послѣднем случаѣ стрѣла прогиба больше в 4 раза, чѣм для балки с защемленными концами.

Діаграмма срѣзающей силы ΣP построится так же как и для балки свободно лежащей на двух опорах. Как в 1ой (фиг 164) так и во II части срѣзающая сила будет постоянна по величинѣ. Знак мѣняется при переходѣ через точку E. На участках A_1A и BB_1 линія изгибающих моментов будет A_1a и B_1b (фиг. 163)[1)]

1) Участки A_1A и BB_1 суть мѣста защемленія; очевидно $Aa = Cc = Bb = \frac{Pl}{8}$



Фиг. 164.

Примѣр 2ой. На призматическую балку одним концом закрѣпленную в стѣнѣ, а другим лежащую свободно на опорѣ (ось балки горизонтальна) дѣйствует на разстояніи a от закрѣпленнаго конца сосредоточенная сила P (фиг. 165)

Фиг. 165.

Условія статики дают:

$$\Sigma Y = P - R_1 - R_2 = 0,$$

$$\Sigma M_a = Pa - R_1 l - m = 0,$$

тогда как в данном случаѣ неизвѣстных три R_1, R_2 и m.

Возьмем сѣченіе mn' на разстояніи x от точки A. Изгибающій момент $M_x = P(a-x) - R_1(l-x)$ и ур-іе кривой изгиба будет $EJy'' = P(a-x) - R_1(l-x) \ldots \ldots (a)$

Это послѣднее ур-іе будет ур-іем для части AF. Кривая изгиба будет состоять из двух частей AF и FB, которыя плавно сливаются в точкѣ F. Ур-іе кривой изгиба для части FB будет имѣть вид:

$$EJy_1'' = -R_1(l-x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

Интегрируя ур-ія (a) и (b) по два раза будем имѣть слѣдующія четыре ур-ія.

$$EJy' = Pax - \tfrac{1}{2}Px^2 - R_1 lx + \tfrac{1}{2}R_1x^2 + C_1 \quad \ldots \quad (c)$$

$$EJy = \tfrac{1}{2}Pax^2 - \tfrac{1}{6}Px^3 - \tfrac{1}{2}R_1lx^2 + \tfrac{1}{6}R_1x^3 + C_1x + C_2 \quad \ldots \quad (d)$$

$$EJy_1' = -R_1lx + \tfrac{1}{2}R_1x^2 + C_1' \quad \ldots \ldots \quad (e)$$

$$EJy_1 = -\tfrac{1}{2}R_1lx^2 + \tfrac{1}{6}R_1x^3 + C_1'x + C_2' \quad \ldots \ldots \quad (f)$$

Для опредѣленія постоянных примем во вниманіе слѣдующія два обстоятельства: 1) что прогиба в A нѣт и 2) тангенс угла наклона в той же точкѣ равен нулю, т.е. при $x = 0$, $y = 0$ и $y' = 0$. Подставляя в первыя два уравненія (c) и (d) значенія $x = 0$, получим: $C_1 = C_2 = 0$, а эти ур-ія примут вид:

$$EJy' = Pax - \tfrac{1}{2}Px^2 - R_1lx + \tfrac{1}{2}R_1x^2 \quad \ldots \quad (c_1)$$

$$EJy = \tfrac{1}{2}Pax^2 - \tfrac{1}{6}Px^3 - \tfrac{1}{2}R_1lx^2 + \tfrac{1}{6}R_1x^3 \quad \ldots \quad (d_1)$$

Для опредѣленія постоянных в послѣдних двух ур-іях (e) и (f) имѣем условія, что при $x = l$ (точка B) прогиб $= 0$,

из ур-iя (f) при $x=0$
$0=-\frac{1}{2}R_1l^3+\frac{1}{6}R_1l^3+C'_1l+C'_2$ откуда $C'_2=\frac{1}{3}R_1l^3-C'_1l$.
Кромѣ того, обѣ кривыя имѣютъ общую касательную въ точкѣ F т.е. при $x=a$, слѣдовательно:

$EJy'=EJy'_1$; изъ этого получаемъ:

$Pa^2-\frac{1}{2}Pa^2-R_1la+\frac{1}{2}R_1a^2=-R_1la+\frac{1}{2}R_1a^2+C'_1$, откуда $C'_1=\frac{1}{2}Pa^2$, а слѣдов. $C'_2=\frac{1}{3}R_1l^3-\frac{1}{2}Pla^2$. Так. обр. ур-iя (e) и (f) для части FB обращаются въ:

$$EJy'_1=-R_1lx+\frac{1}{2}R_1x^2+\frac{1}{2}Pa^2 \quad \dots \quad (e_1)$$

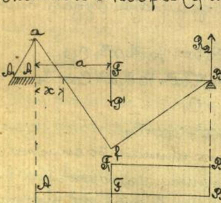
$$EJy_1=-\frac{1}{2}R_1lx^2+\frac{1}{6}R_1x^3+\frac{1}{2}Pa^2x+\frac{1}{3}R_1l^3-\frac{1}{2}Pla^2 \quad \dots \quad (f_1)$$

Помощью ур-iй (e_1-f_1) возможно опредѣлить каждую изъ реакцiй и защемляющiй моментъ.
Т. к. въ точкѣ F обѣ кривыя имѣютъ общую ординату, то полагая $x=a$, можно приравнять правыя части уравненiй (e_1 и f_1), получимъ:

$$\frac{1}{2}Pa^3-\frac{1}{6}Pa^3-\frac{1}{2}R_1la^2+\frac{1}{6}R_1a^3=-\frac{1}{2}R_1la^2+\frac{1}{6}R_1a^3+\frac{1}{2}Pa^3+\frac{1}{3}Rl^3-\frac{1}{2}Pla^2$$

откуда $R_1=\frac{1}{2}l^3Pa^2(3l-a)$ и $R_2=P-R_1=\frac{1}{2}l^3P\{2l^3-3la^3+a^3\}$ и наконецъ $m_1=R_1l-Pa=\frac{1}{2}l^2Pa\{3la-a^2-2l^2\}$

Зная величину реакцiй и защемляющiй моментъ легко вычислить стрѣлу прогиба въ любомъ сѣченiи балки, а также найти наибольшiй моментъ и срѣзающую силу. Кривая изгибающихъ моментовъ приметъ видъ ломанной A_1aDfB (фиг. 166). Въ точкѣ D имѣемъ $M_x=0$ и слѣд. $\rho=\infty$. Абсцисса AD найдется изъ ур-iя $M_x=0$, гдѣ M_x взято для 1ой части, т.е. $M_x=-R_2(l-x)+P(a-x)=0$. Дiаграмма срѣзающихъ силъ изображена ниже и представляется ломанной $AA_1F_2F_1B_1B$ причемъ $BB'=R_2$ и $F_1F_2=P$

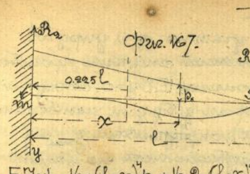


Фиг. 166

Примѣръ 3ій Балка AB (фиг. 167), защемленная концомъ A въ стѣнѣ; конецъ B лежитъ свободно на опорѣ. Грузъ распредѣленъ по закону прямой линiи съ наибольшей ординатой $AC=p_1$. Статика даетъ два ур-iя:

$\Sigma Y=\frac{1}{2}p_1l-R_1-R_2=0$; $\Sigma M_a=\frac{1}{6}p_1l^2-R_1l-m$.

Для произвольнаго сѣченiя на разстоянiи x отъ стѣны



Фиг. 167.

имѣемъ: $M_x=\frac{1}{6}p_x(l-x)^2-R_1(l-x)$ и ур-iе кривой изгиба $EJy''=\frac{1}{6}p_x(l-x)^2-R_1(l-x)$, но т.к. $p_x=\frac{1}{l}p_1(l-x)$, то $EJy''=\frac{1}{6}p_1(l-x)^3-R_1(l-x)$. Интегрируя 2 раза, имѣемъ:

$$EJy'=-\frac{1}{24}(l-x)^4p_1+\frac{1}{2}R_1(l-x)^2+C_1$$

$$EJy=\frac{1}{120l}p_1(l-x)^5+\frac{1}{6}R_1(l-x)^3+C_1x+C_2$$

Полагая $x=0$, находимъ $y'=0$, почему $C_1=\frac{1}{24}p_1l^3-\frac{1}{2}R_1l^2$.
Полагая $x=l$, имѣемъ $y=0$ и слѣд. $C_2=-C_1l=\frac{1}{2}R_1l^3-\frac{1}{24}p_1l^4$, а потому:

$$EJy=\frac{1}{120l}p_1(l-x)^5-\frac{1}{6}R_1(l-x)^3+x\left(\frac{1}{24}p_1l^3-\frac{1}{2}R_1l^2\right)+\frac{1}{2}R_1l^3-\frac{1}{24}p_1l^4$$

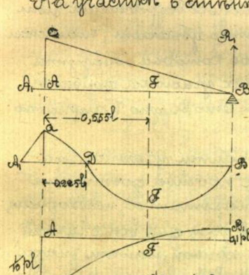
Полагая $x=0$, найдемъ $y=0$ и слѣд.

$$R_1=\frac{1}{10}p_1l \quad \text{и} \quad R_2=\frac{2}{5}pl$$

Изгибающiй моментъ обращается въ нуль при $x=l$, т.е. въ сѣченiи B и при $x=l(1-\sqrt{0.6})=0{,}225l$, гдѣ и расположена точка перегиба „D".
Наибольшая стрѣла прогиба ~~получается~~ получается для $x>0$, при которомъ $y'=0$, т.е. изъ условiя

$$-\frac{p_1(l-x)^4}{24l}+\frac{p_1l}{20}(l-x)^2+\frac{p_1l^3}{24}-\frac{p_1l^3}{20}=0 \quad \text{имѣемъ } x=0{,}55l.$$

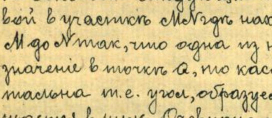
Дiаграмма моментовъ представится кривыми 3го порядка DFB и aD, при чемъ D — точка перехода, гдѣ $M_x=0$.
На участкѣ въ стѣнѣ линiя моментовъ будетъ прямая A_1a (фиг. 168). Дiаграмма ΣP (ниже) представится двумя параболами B_1FA_1, которыя получаются дифференцированiемъ выраженiя для M_x. Отрѣзокъ $BB_1=R_1$ и $AA_1=R_2$. Въ точкѣ F, гдѣ M_x достигаетъ maximum'а, срѣзывающая сила обращается въ нуль.



Фиг. 168.

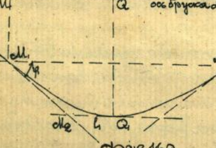
При разсчетѣ балокъ на изгибъ весьма часто надо знать наибольшую стрѣлу прогиба. Въ томъ случаѣ, когда внѣшнiя силы заданы такимъ образомъ, что получается всего один участок для упругой кривой, нахожденіе наибольшей стрѣлы прогиба весьма просто, а именно полагая $EJy' = 0$, опредѣляем то значеніе x, при котором y будет наибольшим и, вставляя в ур-іе $EJy = f(x)$, опредѣляем $y_{max} = f$.

Но когда внѣшнія силы разбивают ось на цѣлый ряд упругих кривых, отысканіе наибольшаго значенія для стрѣлы прогиба усложняется, ибо неизвѣстно вперед на каком участкѣ находится этот maximum. Чтобы опредѣлить искомый участок, поступают на основаніи слѣдующих соображеній. Ординаты кривой в участкѣ MN гдѣ находится f_{max} измѣняется от M до N так, что одна из них получает наибольшее значеніе в точкѣ Q, то касательная в Q_1 будет горизонтальна т. е. угол, образуемый ею с осью бруска, обращается в нуль. Очевидно, слѣд., если для сѣченія M угол φ (фиг. 169) образуемый касательной M_1M_2 с осью x-ов мы считаем положительным, тогда φ от M до Q убывает и для точек лежащих правѣе Q дѣлается отрицательным. Во всяком другом участкѣ упругой кривой ордината y только возрастает или только убывает, тангенсы углов, которые образуют касательныя в конечных сѣченіях участка должны имѣть одинаковые знаки, как это видно например на фиг. 170 в точках P_1 и Q_1



Фиг. 169

Таким обр., если требуется найти участок гдѣ стрѣла прогиба достигает своего maximum'a, необходимо, составив ур-ія для всѣх частей упругой кривой, найти знаки тангенсов в точках, которые представляют границы участков. Та часть упругой кривой, для которой знаки тан-

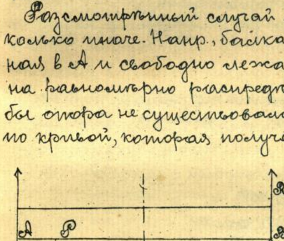


Фиг 170.

генсов в ея крайних сѣченіях будут разноименные, содержит в себѣ f_{max}.

Может быть случай, что таких участков окажется не один, а больше; тогда придется в каждом из них найти соотвѣтствующую наибольшую ординату и из всѣх полученных найдем абсолютный maximum.

Разсмотрѣнный случай может быть рѣшен и нѣсколько иначе. Напр., балка AB (фиг. 171), защемленная в A и свободно лежащая на опорѣ B, нагружена равномѣрно распредѣленным грузом pl. Если бы опора не существовала, то балка прогнулась бы по кривой, которая получается из ур-ія:



Фиг. 171

$EJy'' = \frac{1}{2}p(l-x)^2$, откуда имѣем: $EJy' = \frac{1}{6}p(l-x)^3 + C_1$

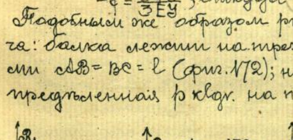
$EJy = \frac{1}{24}p(l-x)^4 + C_1x + C_2$. Полагая $x = 0$ находим $y = 0$ и $y' = 0$, а слѣд. $C_1 = \frac{1}{6}pl^3$ и $C_2 = -\frac{1}{24}pl^4$. Стрѣла прогиба в точкѣ B будет потому

$$f = \frac{1}{EJ}\left\{\frac{pl^4}{6} - \frac{pl^4}{24}\right\} = \frac{pl^4}{8EJ}$$

При наличности опоры в B прогиба быть не может, а потому реакція R_1 по величинѣ должна равняться силѣ достаточно большой, чтобы вызвать в свою очередь обратный прогиб, равный f. Другими словами сила R_1 должна удовлетворить равенство.

$$-f = \frac{R_1 l^3}{3EJ}, \text{ откуда } R_1 = -\frac{3}{8}pl$$

Подобным же образом рѣшается слѣдующая задача: балка лежит на трех опорах A, B и C с пролетами $AB = BC = l$ (фиг. 172); нагрузка равномѣрно распредѣленная p клгр. на п. ед.. Реакціи в крайних опорах равны между собой, вслѣдствіи симметріи расположенія. Статика дает условіе равновѣсія $R_2 + 2R_1 = 2pl$. Предполагая, что средняя опора



Фиг. 172.

отсутствуетъ, получаемъ прогибъ въ точкѣ B равнымъ

$$f = \frac{10}{48} \cdot \frac{pl^4}{EJ}$$

Если въ точкѣ B приложимъ силу R_2, направленную вверхъ и способную уничтожить такой прогибъ, то очевидно, эта сила будетъ равна искомой реакціи. Но сосредоточенная сила приложенная въ серединѣ между опорами, вызываетъ прогибъ равный

$$f_1 = \frac{R_2(2l)^3}{48EJ}, \text{ слѣд. имѣемъ } f = f_1 = \frac{R_2(2l)^3}{48EJ} = \frac{10pl^4}{48EJ},$$

$$\text{откуда } R_2 = \frac{5}{4}pl$$

Эту же задачу можно рѣшить общимъ путемъ. Вслѣдствіе того, что $R_1 = R_3$ и $AB = l = BC$, полагая начало координатъ въ B, найдемъ, что ур-іе кривой изгиба для обоихъ участковъ получитъ одинаковый видъ:

$$EJy'' = -R_1(l-x) + \tfrac{1}{2}p(l-x)^2$$

Двукратное интегрированіе даетъ:

$$EJy' = \tfrac{1}{2}R_1(l-x)^2 - \tfrac{1}{6}(l-x)^3p + C_1 \;;$$

$$EJy = -\tfrac{1}{6}R_1(l-x)^3 + \tfrac{1}{24}(l-x)^4p + C_1x + C_2$$

Т. к. при $x = l$, $y = 0$, то $C_2 = -C_1l$. Съ другой стороны, вслѣдствіи симметріи при $x = 0$, $y' = 0$, а потому $C_1 = \tfrac{1}{6}pl^3 - \tfrac{1}{2}R_1l^2$, окончательно имѣемъ:

$$EJy = -\tfrac{1}{6}R_1(l-x)^3 + \tfrac{1}{24}p(l-x)^4 + \left(\tfrac{1}{6}pl^3 - \tfrac{1}{2}R_1l^2\right)x - \tfrac{1}{8}pl^4 + \tfrac{1}{2}R_1l^3$$

Но при $x = 0$, $y = 0$, а потому имѣемъ:

$$R_2 = 2pl - 2R_1 = \frac{5}{4}pl.$$

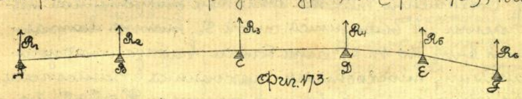
Неразрѣзныя балки.

Неразрѣзными балками называются сплошныя балки, свободно лежащія больше чѣмъ на двухъ опорахъ. Перекрытіе нѣсколькихъ пролетовъ одной балкой дастъ почти всегда нѣкоторый выигрышъ въ вѣсѣ и меньшій прогибъ по сравненію съ перекрытіемъ тѣхъ же пролетовъ рядомъ отдѣльныхъ балокъ, поэтому сплошная балка пользуется довольно большимъ распространеніемъ въ мостовомъ дѣлѣ. Въ строительномъ дѣлѣ тоже весьма часто встрѣчается примѣненіе сплошныхъ неразрѣзныхъ балокъ въ видѣ напр., половыхъ или потолочныхъ балокъ, подпертыхъ рядомъ колоннъ и т. п.

Къ неразрѣзнымъ балкамъ относится только что

описанный случай бруска лежащаго на трехъ опорахъ. Въ виду простой нагрузки, а также вслѣдствіе симметричности ея при равенствѣ пролетовъ, нахожденіе реакціи опоръ получается довольно просто. Вопросъ значительно усложняется, когда пролеты и нагрузки не симметричны, а въ особенности, когда число пролетовъ велико. Общій пріемъ рѣшенія, который показанъ былъ въ вышеприведенныхъ примѣрахъ, становится неудобнымъ по причинѣ утомительности рѣшенія большого числа довольно сложныхъ ур-ій. Ниже излагается методъ Clapeyron'а, такъ называемая теорема о трехъ моментахъ.

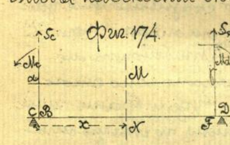
Для опредѣленія реакцій опоръ въ неразрѣзанной балкѣ, возьмемъ слѣдующій случай. Балка лежитъ на n опорахъ, слѣд. перекрываетъ $n-1$ пролетовъ. Опоры лежатъ на разныхъ уровняхъ (фиг. 173), на-



Фиг. 173

грузка внѣшняя совершенно произвольная; поперечное сѣченіе балки постоянно лишь въ предѣлахъ пролета. Вынесемъ одинъ пролетъ CD въ сторону такимъ образомъ, чтобы плоскости сѣченій αB, γF лежали (фиг. 174) — первая правѣе опоры C, — вторая — лѣвѣе опоры D на весьма близкихъ, отъ соотвѣтственныхъ опоръ, разстояніяхъ. Очевидно, чтобы вынесенная часть оставалась въ равновѣсіи, въ точкѣ C долженъ появится моментъ M_c, уравновѣшивающій моменты всѣхъ внѣшнихъ силъ[1] расположенныхъ по лѣвую сторону даннаго пролета.

Фиг. 174

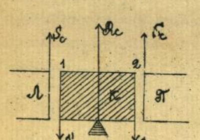


Подобно этому въ D будетъ дѣйствовать моментъ M_d, моменты M_c и M_d представляютъ собой изгибающіе моменты для сѣченія αB и γF. Вслѣдствіе того, что сѣченія эти приходятся надъ опорами,

1) Включая, слѣд., и силы опорныхъ реакцій

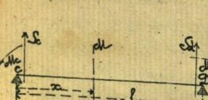
моментами M_c, M_d, ... дают названіе опорных моментов. Кромѣ того, т. к. при изгибѣ в каждом сѣченіи развиваются срѣзающія силы, перпендикулярныя к оси, то кромѣ опорных моментов, силами взаимодѣйствія отброшенных частей балки являются силы S_c в сѣченіи αB и S_d в сѣченіи γF.

Представим себѣ мысленно, что около какой нибудь опоры C с двумя плоскостями 1 и 2 (фиг. 175) по обѣ стороны опоры, на весьма близком разстояніи друг от друга вырѣзана часть балки К. Тогда взаимодѣйствіе правой отброшенной „П" на часть „К" заштрихованную; кромѣ изгибающаго момента выразится силой S_c, направленной, очевидно, вниз. Совершенно также дѣйствіе отброшенной лѣвой части „Л" выразится силой S'_c, также направленной вниз. Но т. к. часть балки, вырѣзанная упомянутыми плоскостями, находится в равновѣсіи, то должно существовать равенство: $R_c = S_c + S'_c$, т. е. реакція опоры равна суммѣ срѣзывающих сил, дѣйствующих в сѣченіях расположенных около данной опоры. Так. обр. вопрос об опредѣленіи величины реакціи сводится к опредѣленію срѣзывающих усилій.



Фиг. 175

Возьмем на разстояніи x от опоры C (фиг. 176) сѣченіе MN. Изгибающій момент относительно этого сѣченія (если будем брать силы, расположенныя по лѣвую сторону), будет равен опорному моменту M_c, сложенному с моментом m_x внѣшних сил на участкѣ CM - и с моментом силы S_c, т. е.



Фиг. 176

$$M_x = M_c + m_x - S_c x \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Если отнесем этот момент к опорѣ D, т. е положим $x = l$, получим, очевидно, зависимость:

$$M_d = M_c - S_c l + m_d \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

гдѣ m_d - момент заданных внѣшних сил на пролетѣ CD относительно точки D. Опредѣляя из выраженія (b) величину S_c, найдем:

$$S_c = 1/l\,(M_c - M_d + m_d) \quad \ldots\ldots \quad (I)$$

и подставляя найденное значеніе в выраженіе (a) получим величину изгибающаго момента в формѣ:

$$M_x = M_c - 1/l\,(M_c - M_d + m_d)\,x + m_x \quad \ldots\ldots \quad II$$

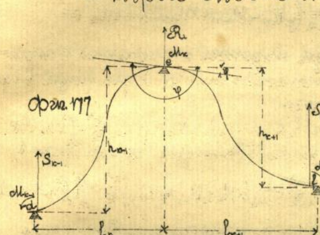
Срѣзывающая сила S_x в сѣченіи MN, очевидно, будет равна силѣ S_c, сложенной с суммой внѣшних сил (P_x) на участкѣ CM, взятой с обратным знаком т. е.

$$S_x = -S_c + P_x = -1/l\,(M_c - M_d + m_d) + P_x$$

откуда $S_d = -S_c + \sum_{x=0}^{x=CD} p = -1/l\,(M_c - M_d + m_d) + \sum_0^l p \quad \ldots \quad (III)$

Теорема Clapeyron'a или теорема о трех моментах.

Пусть имѣем 3 опоры (фиг. 177) - $(k-1)$, k и $(k+1)$, вынесенныя отдѣльно из балки, лежащей на n опорах и def - направленіе упругой кривой послѣ деформаціи; h_{k-1} и h_{k+1} представляют пониженіе (или превышеніе) опор d и f относительно e.



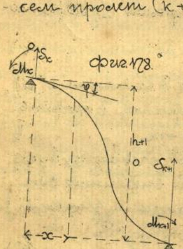
Фиг. 177

Нагрузка балки может вообще состоять из вертикальных сосредоточенных и распредѣленных сил. Но так как вопрос в общем случаѣ рѣшается довольно трудно, то сначала выведем эту теорему только для распредѣленнаго груза, закон распредѣленія котораго вполнѣ произволен. В опорах $(k-1)$, k и $(k+1)$ дѣйствуют соотвѣтствующіе опорные моменты: M_{k-1}, M_k, M_{k+1} и в крайних сѣченіях кромѣ того срѣзывающія силы: S_{k-1} и S_{k+1} [2]) Выне-

[2]) В сѣченіях около какой либо m-й опоры дѣйствуют срѣзыва-

[1]) При этом внѣшнія силы считаются положительными, если они направлены вниз, срѣзывающія силы наоборот

-сем пролет (к+1) в сторону (фиг. 178) и, вырѣзая балку нѣ-стами весьма близко лежащими около опоры, возьмем сѣченіе на разстояніи x от средней опоры к.



фиг. 178.

Изгибающій момент M_x для этого сѣченія будет равен: $M_x = M_k - S_k x + m_x$. В этом выраженіи m_x представляет момент внѣшней нагрузки на участкѣ x относительно выбраннаго сѣченія. Согласно выраженія, $S_k = \frac{1}{l_{k+1}}(M_k - M_{k+1} + m_{k+1})$ имѣем:

$$M_x = M_k - \frac{1}{l_{k+1}}(M_k - M_{k+1} + m_{k+1})x + m_x.$$

Если модуль упругости будет E, момент инерціи сѣченія в данном пролетѣ J_{k+1}, то ур-іе упругой кривой будет:

$$M_k - \frac{1}{l_{k+1}}(M_k - M_{k+1} + m_{k+1})x + m_x =$$

$$= EJ_{k+1}\frac{d^2y_{k+1}}{dx^2},$$ гдѣ индексы относятся к номеру пролета. Проинтегрировав это ур-іе два раза в предѣлах от 0 до x, имѣем:

$$EJ_{k+1}\left(\frac{dy_{k+1}}{dx} - tg\,\varphi\right) = M_k x - \frac{1}{l_{k+1}}(M_k - M_{k+1} + m_{k+1})\frac{x^2}{2} + \int_0^x m_x\,dx$$

(гдѣ $tg\,\varphi$ — представляет значеніе 1ой производ. ординаты при $x = 0$)

$$EJ_{k+1}(y_{k+1} - x\,tg\,\varphi) = M_k\frac{x^2}{2} - \frac{1}{l_{k+1}}(M_k - M_{k+1} + m_{k+1})\frac{x^3}{6} + \int_0^x\left(\int_0^x m_x\,dx\right)dx$$

Второй интеграл представляет алгебраическое ур-іе упругой кривой в пролетѣ (к+1). Относя его к точкѣ (к+1), мы получим превышеніе или пониженіе опоры (к+1) над опорой к, т.е. при $x = l_{k+1}$, $y_{k+1} = h_{k+1}$ и интеграл примет вид:

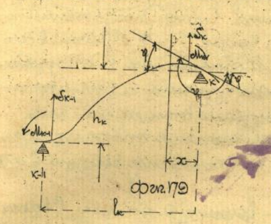
$$EJ_{k+1}(h_{k+1} - l_{k+1}\,tg\,\varphi) = M_k\,\tfrac{1}{2}\,l_{k+1}^2 - \frac{1}{l_{k+1}}(M_k - M_{k+1} + m_{k+1})\frac{l_{k+1}^3}{6} + \int_0^{l_{k+1}}\int_0^{l_{k+1}}(m_x\,dx)\,dx$$

Умножив все ур-іе на $\frac{6}{l_{k+1}J_{k+1}}$, получим:

$$6E\left\{\frac{h_{k+1}}{l_{k+1}} - tg\,\varphi\right\} = \frac{3M_k l_{k+1}}{J_{k+1}} - (M_k - M_{k+1} + m_{k+1})\frac{l_{k+1}}{J_{k+1}} + \frac{6}{J_{k+1}l_{k+1}}\int_0^{l_{k+1}}\int_0^x (m_x\,dx)\,dx \quad \ldots (c)$$

-кція силы S_m и S_m причем знак (') относится к силѣ, лежащей лѣвѣе опоры. Точно также напр. m'_x представляет сумму моментов внѣшних сил пролета (к) относительно опоры (к-1)

Перейдем теперь к пролету к, причем теперь угол касательной с осью x, $\varphi_1 = 180° + \varphi$ (фиг. 179). Что же касается силы S'_k то, очевидно, величина ея будет $S'_k = \frac{1}{l_k}(M_k - M_{k-1} + m'_k)$, а изгибающій момент:



фиг. 179

$$M_x = M_k - \frac{1}{l_k}(M_k - M_{k-1} + m'_k)x + m'_x = EJ_k y''$$

Интегрируя это ур-іе 2 раза в предѣлах от 0 до x, замѣтим прежде, что $tg\,\varphi_1 = tg(180° + \varphi) = -tg\,\varphi$, получим

$$EJ_k\left\{\frac{dy_k}{dx} + tg\,\varphi\right\} = M_k x - \frac{1}{l_k}\{M_k - M_{k-1} + m'_k\}\frac{x^2}{2} + \int_0^x m'_x\,dx$$

$$EJ_k\{y_k + x\,tg\,\varphi\} = \tfrac{1}{2}M_k x^2 - \frac{1}{l_k}\{M_k - M_{k-1} + m'_k\}\frac{x^3}{6} + \int_0^x\int_0^x (m'_x\,dx)\,dx$$

Относя послѣднее ур-іе к опорѣ (к-1) получим ординату y_k, выражающую превышеніе или пониженіе опоры (к) над опорой (к-1), т.е. при $x = l_k$, $y = h_{k-1}$, а интеграл обращается в:

$$EJ_k(h_{k-1} + l_k\,tg\,\varphi) = M_k\frac{l_k^2}{2} - \frac{1}{l_k}\{M_k - M_{k-1} + m'_k\}\frac{l^3}{6} + \int_0^{l_k}\int_0^x (m'_x\,dx)\,dx$$

Умножая затѣм все ур-іе на $\frac{6}{J_k l_k}$, получим:

$$6E\left\{\frac{h_{k-1}}{l_k} + tg\,\varphi\right\} = 3M_k\frac{l_k}{J_k} - \{M_k - M_{k-1} + m'_k\}\frac{l_k}{J_k} + \frac{6}{J_k l_k}\int_0^{l_k}\int_0^x (m'_x\,dx)\,dx \quad \ldots (d)$$

Сложим теперь почленно (c) и (d):

$$6E\left\{\frac{h_{k+1}}{l_{k+1}} + \frac{h_{k-1}}{l_k}\right\} = \frac{2M_k l_{k+1}}{J_{k+1}} + \frac{2M_k l_k}{J_k} + \frac{M_{k+1}l_{k+1}}{J_{k+1}} + \frac{M_{k-1}l_k}{J_k} - \frac{m'_k l_k}{J_k} +$$

$$+ \frac{6}{l_{k+1}J_{k+1}}\int_0^{l_{k+1}}\int_0^x (m_x\,dx)\,dx + \frac{6}{J_k l_k}\int_0^{l_k}\int_0^x (m'_x\,dx)\,dx \quad \ldots \ldots (IV)$$

В этом ур-іи всѣ члены кромѣ M_k, M_{k-1}, M_{k+1}, являются извѣстными. Так. обр. ур-іе (IV) связывает три опорных момента: M_{k-1}, M_k и M_{k+1} и выражает собою теорему Клапейрона или, как часто ее называют, теорему о трех моментах.

Т. к. ур-іе (IV) связывает два сосѣдних пролета, то подобных зависимостей можно составить n-2, если число опор равно n. Моменты M_1 и M_n в крайних опорах будут равны нулю, если балка не свѣшивается за эти опоры. В противном случаѣ M_1 и M_n надо считать извѣстными[1]. Слѣд. неизвѣстных опорных моментов всегда будет $(n-2)$. Имѣя всего $n-2+2=n$ зависимостей, связывающих n опорных моментов с данными нагрузками и размѣрами, опредѣляем совмѣстным рѣшеніем всѣ $M_1 \dots M_n$ м-ов. Найдя же значеніе опорных моментов легко получить и величины реакцій в опорах.

В общем видѣ ур-іе (IV) – выраженіе данное Clapeyron'ом – довольно сложно для манипуляцій с ним.

Практически вопрос рѣшается гораздо проще в обыкновенных случаях. Во-первых, за весьма рѣдким исключеніем, опоры располагаются на одном горизонтѣ, почему величины $h_k=h_{k+1}=h_{k-1}=0$ обращаются в нуль. Кромѣ того, в большинствѣ случаев данная балка по всему протяженію дѣлается одинакового поперечнаго сѣченія, т.е. $J_1=J_2=\dots J_n=const.$

Приняв два указанных упрощенія, предположим, как частный случай, что внѣшнія силы равномѣрно распредѣлены по отдѣльным пролетам балки. В таком случаѣ члены m_{k+1}, m'_k, m_x принимают весьма простой вид. Пусть нагрузка задана величиною p klgr. на пог. ед. Тогда:

$$m_{k+1}=\tfrac{1}{2}p_{k+1}l_{k+1}^2, \quad m'_k=\tfrac{1}{2}p_k l_k^2,$$

а потому интересующая нас зависимость принимает слѣдующую простую форму:

$$M_{k-1}l_k+2M_k(l_k+l_{k+1})+M_{k+1}l_{k+1}=\tfrac{1}{2}p_{k+1}l_{k+1}^3+\tfrac{1}{2}p_k l_k^3-\tfrac{1}{4}p_{k+1}l_{k+1}^3-$$

$$-\tfrac{1}{4}p_k l_k^3=\tfrac{1}{4}\left(p_{k+1}l_{k+1}^3+p_k l_k^3\right) \quad \dots \dots (36)$$

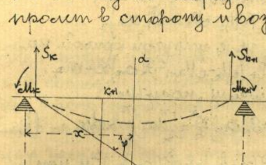
Если нагрузка p – постоянна по всей длинѣ балки, то ур-іе (36) еще упрощается:

$$M_{k-1}l_k+2M_k(l_k+l_{k+1})+M_{k+1}l_{k+1}-\tfrac{p}{4}\left(l_{k+1}^3+l_k^3\right)=0.$$

1) В самом дѣлѣ, пусть балка свѣшивается, на величину l_0 и несет нѣкоторую нагрузку (фиг. 180). Не трудно видѣть, что опорный момент ея равен моменту груза на участкѣ l_0 относительно опоры.

Нагрузка сосредоточенная.

Разсмотрим горизонтально лежащую многоопорную балку одинаковаго сѣченія; в каждом пролетѣ приложены по одной сосредоточенной силѣ. Вынесем $k+1^{ый}$ пролет в сторону и возьмем сѣченіе $\alpha\alpha$ (фиг. 181)



Фиг. 181

Согласно изложенному выше здѣсь будут два участка упругих кривых a_{k+1} и $b_{k+1}=l_{k+1}-a_{k+1}$. Диффер. ур-іе кривой изгиба для второго участка будет:

$$EJy''_{k+1}=M_x=M_k-S_k x+m_x=$$

$$M_k-\frac{1}{l_{k+1}}(M_k-M_{k+1}+m_{k+1})x+m_x \quad \dots \dots (g)$$

Здѣсь очевидно $m_x=P_{k+1}(x-a_{k+1})$ и $m_{k+1}=m_x\big|_{x=l_{k+1}}=P_{k+1}(l_{k+1}-a_{k+1})$

т.е. $m_{k+1}=P_{k+1}b_{k+1}$

Легко видѣть, что член m_x имѣет реальное значеніе лишь в предѣлах от a_{k+1} до l_{k+1} и при всѣх значеніях x-са от 0 до a_{k+1} он обращается в нуль, ибо уже при $x=a_{k+1}$ имѣем

$$m_x\big|_{x=a_{k+1}}=P(x-a_{k+1})=0.$$

Поэтому при интегрированіи ур-ія (g) в предѣлах от 0 до x послѣдній член может интегрироваться лишь от a_{k+1} до x. Поэтому имѣем:

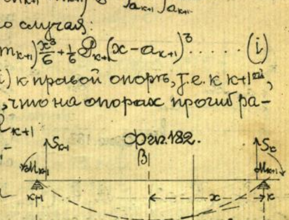
$$EJ(y_{k+1}-x\,tg\varphi)=M_k\frac{x^2}{2}-\frac{1}{l_{k+1}}(M_k-M_{k+1}+m_{k+1})\frac{x^3}{6}+\int_{a_{k+1}}^{x}dx\int_{a_{k+1}}^{x}m_x dx$$

или для разсматриваемаго случая:

$$EJ(y_{k+1}-x\,tg\varphi)=M_k\frac{x^2}{2}-\frac{1}{l_{k+1}}(M_k-M_{k+1}+m_{k+1})\frac{x^3}{6}+\frac{1}{6}P_{k+1}(x-a_{k+1})^3 \quad \dots \dots (i)$$

Относя полученное ур-іе (i) к правой опорѣ, т.е. к $k+1^{ой}$, и принимая во вниманіе, что на опорах прогиб равен нулю, найдем при $x=l_{k+1}$

Фиг. 182.



$$-EJl_{k+1}tg\varphi=\tfrac{1}{3}M_k l_{k+1}^2+\tfrac{1}{6}M_{k+1}l_{k+1}^2-$$

$$-\tfrac{1}{6}P_{k+1}b_{k+1}l_{k+1}^2+\tfrac{1}{6}P_{k+1}(l_{k+1}-a_{k+1})^3 \text{ или}$$

$$-tg\varphi=\frac{1}{6EJ}\Big\{2M_k l_{k+1}+M_{k+1}l_{k+1}-$$

$$-\frac{1}{l_{k+1}}P_{k+1}b_{k+1}\left(l_{k+1}^2-b_{k+1}^2\right)\Big\} \quad \dots \dots (k)$$

Переходим к пролету l_k (фиг. 182) возьмем сѣченіе $\beta\beta$ на разстояніи x от правой опоры. Тогда изгибающій момент M_x напишется: (для сил лежащих правѣе сѣченія) $M_x = M_k - S'_k x + m_x = M_k - S'_k x + P(x - b_k)$, но

$$S'_k = 1/l_k (M_k - M_{k-1} + m_k) = 1/l_k (M_k - M_{k-1} + P_k a_k),$$

а потому дифференціальное ур-іе упругой кривой на участкѣ a_k будет: $EJ y''_k = M_k - 1/l_k (M_k - M_{k-1} + P_k a_k) x + m_x$

Разсуждая подобно предыдущему, получим:

$$EJ(y_k - x\,tg\varphi_1) = M_k \frac{x^2}{2} - \frac{1}{l_k}(M_k - M_{k-1} + P_k a_k)\frac{x^3}{6} + \int_{b_k}^{x} dx \int_{b_k}^{x} m_x dx \quad \ldots (l)$$

или т. к. $\int_{b_k}^{x} dx \int_{b_k}^{x} m_x dx = \int_{b_k}^{x} dx \int_{b_k}^{x} P_k (x - b_k) = 1/6 P_k (x - b_k)^3$ и при $x = l_k$, $y_k = 0$ найдем, относя полученный интеграл (l) к лѣвой опорѣ $k-1$

$$-EJ l_k\, tg\varphi_1 = M_k \frac{l_k^2}{2} - \frac{1}{l_k}(M_k - M_{k-1} + P_k a_k)\frac{l_k^3}{6} + \frac{1}{6}P(l_k - b_k)^3 \quad \ldots (m)$$

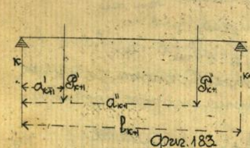
Легко видѣть, что $tg\varphi_1 = -tg\varphi$, а слѣдов. из (m):

$$tg\varphi = \frac{1}{6EJ}\left\{2M_k l_k + M_{k-1} l_k - \frac{1}{l_k} P_k a_k (l_k^2 - a_k^2)\right\}, \quad \ldots (n)$$

Складывая выраженія (n) и (k) почленно, найдем:

$$M_{k-1} l_k + 2M_k (l_k + l_{k+1}) + M_{k+1} l_{k+1} = \frac{1}{l_k} P_k a_k (l_k^2 - a_k^2) + \frac{1}{l_{k+1}} P_{k+1} b_{k+1} \cdot (l_{k+1}^2 - b_{k+1}^2) \quad \ldots (37)$$

Если в пролетѣ находится болѣе нежели один груз, то вопрос рѣшается совершенно подобным же образом. В самом дѣлѣ, пусть в пролетѣ l_{k+1} приложены два сосредоточенных груза P'_{k+1} и P''_{k+1} на разстояніи a'_{k+1} и a''_{k+1} от лѣвой опоры (k) (фиг. 183). Если приложен один груз P'_{k+1}, то при всѣх прочих равных условіях будут дѣйствовать опорные моменты M'_{k-1}, M'_k и M'_{k+1} связанные условіем (37)



Фиг. 183.

$$M'_{k-1} l_k + 2M'_k (l_k + l_{k+1}) + M'_{k+1} l_{k+1} = \frac{1}{l_k} P_k a_k (l_k^2 - a_k^2) + \frac{1}{l_{k+1}} P''_{k+1} b''_{k+1} (l_{k+1}^2 - b''^2_k) \quad \ldots (r)$$

Очевидно, что вслѣдствіе независимости дѣйствія сил, результирующіе моменты будут $M_k = M'_k + M'_k + M''_k$ и т. д., а потому найдем, складывая (p) и (r).

$$M_{k-1} + 2M_k (l_k + l_{k+1}) + M_{k+1} l_{k+1} = \frac{1}{l_k} P_k a_k (l_k^2 - a_k^2) +$$

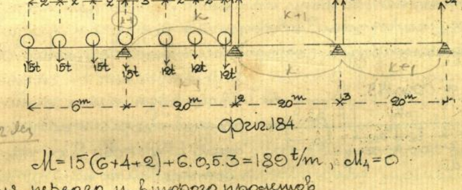
$$+ \frac{1}{l_{k+1}} P'_{k+1} b_{k+1} (l_{k+1}^2 - b_{k+1}^2) + \frac{1}{l_{k+1}} P''_{k+1} b_{k+1} (l_{k+1}^2 - b''^2_{k+1}),$$

и вообще будем имѣть зависимость:

$$M_{k-1} l_k + 2M_k (l_{k+1} + l_k) + M_{k+1} l_{k+1} = \sum \frac{P_k a_k (l_k^2 - a_k^2)}{l_k} + \sum \frac{P_{k+1} b_{k+1} (l_{k+1}^2 - b_{k+1}^2)}{l_{k+1}}$$

Не трудно придти к заключенію, что если кромѣ сил сосредоточенных надо принять во вниманіе и силы распредѣленныя по какому либо заданному закону, то в правой части будут добавлены соотвѣтственные члены. Напр. при нагрузкѣ равномѣрно распредѣленной $1/4\, p_k l_k^3 + 1/4\, p_{k+1} l_{k+1}^3$ и т. д.

Для примѣра возьмем такой случай: сплошная балка перекрывает 4 пролета по 20 mtr. каждый и свѣшивается с лѣвой крайней опоры на 6^m. Груз паровоза и тендера расположен, как указано на фиг. 184. Нагрузка оси паровоза 15 t. и тендера 12 t. вѣс погонной единицы (1 mtr. длины моста = 0,5 t.), найти реакціи опор. Имѣем



Фиг. 184

$M_1\ M_2\ M_3$

$$M = 15(6 + 4 + 2) + 6 . 0{,}5 . 3 = 189\ t/m, \quad M_4 = 0$$

Для перваго и второго пролетов

$$189 . 20 + 2M_2 (20 + 20) + M_3 20 = \frac{1}{20} . 12\{3(20^2 - 3^2) + (20^2 - 5^2)5 + 7(20^2 - 7^2)\} + \frac{0{,}5}{2} 20^3$$

Для второго и третьяго пролетов:

$$M_2 20 + 2M_3 (20 + 20) = \frac{0{,}5 . 20^3}{2} \text{ или}$$

$80 M_2 + 20 M_3 = 1517$ откуда $M_2 = 13{,}56\,t$.

$20 M_2 + 80 M_3 = 2000$ " $M_3 = 21{,}61\,t$.

Переходим к опредѣленію срѣзывающих сил

S'_1 = суммѣ сил, лежащих лѣвѣе, т. е. $= 3 . 15 + 6 . 0{,}5 = 48\,t$.

$S'_2 = 1/l_2 (M_1 - M_2 + m_2) = 1/20 (189 - 13{,}6 + 12(17 + 15 + 13) + 20 . 0{,}5 . 10) = 40{,}77\,t$

$S_2 = -S_1 + 3 . 12 + 20 . 0{,}5 = -40{,}77 + 46 = 5{,}23\,t$

$S_2 = 1/l_2 (M_2 - M_3 + m_3) = 1/20\,(13{,}6 - 21{,}6 + 20 \cdot 10 \cdot 0{,}5) = 4{,}60\,t.$
$S_3 = -S_2 + 20 \cdot 0{,}5 = -4{,}6 + 10 = 5{,}4\,t.$
$S_3' = 1/l_4 (M_3 + m_4) = 1/20\,(21{,}6 + 20 \cdot 0{,}5 \cdot 10) = 6{,}08\,t.$
$S_4' = -S_3 + 20 \cdot 0{,}5 = -6{,}08 + 10 = 3{,}92\,t$
$S_4 = 0$

Складывая соотвѣтствующія срѣзывающія силы находим:

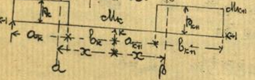
$$\begin{aligned} R_1 &= S_1' + S_1 = 88{,}77\,t \\ R_2 &= S_2' + S_2 = 9{,}83\,t \\ R_3 &= S_3' + S_3 = 11{,}48\,t \\ R_4 &= S_4' + S_4 = 3{,}92\,t \\ &\text{Всего } 114\,t \end{aligned}$$

Принимая во вниманіе, что 4ое колесо паровоза поставлено непосредственно над первой опорой необходимо увеличить R_1 на $15\,t$, т.е.

$R_1 = 88{,}77 + 15 = 103{,}77\,t$, при чем $\Sigma R = 129\,t$, что как раз равно заданной нагрузкѣ.

Если многопролетная балка имѣет равномѣрно распредѣленную нагрузку не по всей длинѣ пролета или пролетов, а лишь на части одного или каждого из них, то рѣшеніе находится порядком, указанным для нагрузок сосредоточенными грузами. Берем в пролетѣ $k+1$ сѣченіе $\beta\beta$ на разстояніи x от средней опоры и напишем ур-іе $EJ y''_{k+1} = M_k - S_k x + m_x$, послѣ двойного интегр. имѣем.

Фиг. 185.



$$EJ(y_{k+1} - x\,tg\varphi) = M_k \frac{x^2}{2} - S_k \frac{x^3}{6} + \int_{a_{k+1}}^{x}\left\{\int_{a_{k+1}}^{x} 1/2\, p_{k+1} x^2 dx\right\} dx$$

Аналогично для лѣвого пролета:

$$EJ(y_{k+1} + x\,tg\varphi) = M_k \frac{x^2}{2} - S_k' \frac{x^3}{6} + \int_{b_k}^{x}\left\{\int_{b_k}^{x} 1/2\, p_k\, dx\right\} dx$$

Вставляя вмѣсто S_k и S_k' их выраженія и производя интегрированіе правых членов, найдем:

$$EJ(y_{k+1} - x\,tg\varphi) = M_k \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6 l_{k+1}}\left\{M_k - M_{k+1} + 1/2\, p_{k+1} b_{k+1}^2\right\} x^3 + 1/24\, p_{k+1}(x^4 - a_{k+1}^4)$$

$$EJ(y_{k+1} - x\,tg\varphi) = M_k \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6 l_k}\left\{M_k - M_{k+1} + 1/2\, p_k a_k^2\right\} x^3 - 1/4\, p_k (x^4 - b_{k+1}^4)$$

Полагая в 1-м ур-іи $x = l_{k+1}$ и 2-м $x = l_k$, найдем складывая их почленно:

$$M_{k-1} l_k + 2M_k(l_{k+1} + l_k) + M_{k+1} l_{k+1} = 1/4\, p_k a_k^2 l_k + 1/4\, p_{k+1} b_{k+1}^2 l_{k+1} - 1/8\, p_k (l_k^4 - b_k^4)1/l_k - \frac{1}{8 l_{k+1}} p_{k+1}(l_{k+1}^4 - a_{k+1}^4).$$

Если $l_{k+1} = l_k$, $a_k = b_k = a_{k+1}$ и $p_k = p_{k+1}$, то получим:

$$M_{k-1} + 2M_k + M_{k+1} = \frac{1}{4l^2}\left\{2a^2 l^2 - (l^4 - a^4)\right\}.$$

Построеніе діаграммы изгибающих моментов для многопролетной сплошной балки, как для всякой статически неопредѣлимой не может быть выполнено помощью одного лишь графическаго метода.

Приходится заранѣе опредѣлить опорные моменты и при выполненіи діаграммы, считать их уже извѣстными. Пусть для балки ABCDE[1] найдены эти моменты: M_a, M_b, M_c, M_d и M_e (фиг. 186), откладывая их в выбранном масштабѣ, а именно $M_a = 0$, $M_b = BB_1$, $M_c = CC_1$ и т.д.; строим ломанную $AB_1C_1D_1E$. Затѣм вычерчиваем кривыя изгибающих моментов AaB, BbC, CcD, DdE для каждаго пролета, считая внѣшнюю нагрузку как бы дѣйствующую на двухопорную балку т.е. полагая, что имѣем отдѣльныя балки AB, BC, CD и DE, каждая подвержена своей нагрузкѣ. Вычитая ординаты кривой AaBbCcDdE из $AB_1C_1D_1E$ получаем моментную результирующую площадь, заштрихованную на фигурѣ. Точка перегиба m, n, p и q в которых изгибающій момент обращается в нуль, указывают переход изгибающаго момента из положительнаго в отрицательный и обратно. Проф. Мор дает другой способ построенія діаграммы изгибающих моментов при помощи, так называемых, третных точек; останавливаться на нем мы не будем.

Что касается срѣзающей силы ΣP, то діаграмма ея послѣ нахожденія реакцій в опорах, находится весьма просто общим пріемом. Между прочим слѣдует отмѣтить, что при рѣшеніи многоопорных балок, построеніе діаграм для M_x и ΣP особенно желательно, ибо, уменьшая значительно число вычисленій, сразу опредѣляется то сѣченіе балки, гдѣ слѣдует произвести провѣрку напряженій.

Выше указывалось, что многопролетныя сплошныя

1) См. стр. 161.

балки получаются обычно легче двухопорных. Для примѣра возьмем слѣдующій случай. Требуется перекрыть прямоугольное пространство длиною 24 mt. и шириною 16 mt. Поперечныя балки лежат друг от друга на разстояніи 4 m. и кодпираются посрединѣ двумя колонками каждая, образуя 4 пролета по 4 m. Вѣс потолка и его нагрузка составляют 500 klg. на 1 кв. mt. площади пола. Нагрузка на каждую балку будет около $4 \times 16 \times 500 = 32000$ klg. или 2000 klg. на пог. mt. Вслѣдствіе симметріи можно сказать, что среднія опорные моменты будут между собою равны, а т. к. крайніе обращаются в нуль, то имѣем: $5M = \frac{1}{2} p l^2 = 16000$ klg/met., откуда опорный момент на колоннѣ будет $M = 3200$ klg/met.

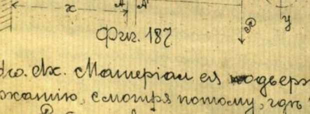
Если бы каждый пролет перекрывался отдѣльными разрѣзными балками, то имѣли бы:

$$M_{max} = 4000 \text{ klg/met.}$$

слѣд., во втором случаѣ поперечное сѣченіе, а стало быть и вѣс балки получается больше. Наибольшіе изгибающіе моменты в сплошных балках обычно получаются в сѣченіях над опорами, тогда как в разрѣзных они приходятся в пролетѣ. Это обстоятельство слѣдует отнести к преимуществу сплошных перекрытій.

Работа внутренних сил при изгибѣ.

Разсмотрим наиболѣе простой случай: брусок закрѣплен одним концом в стѣну, на другой конец дѣйствует сосредоточенная сила P (фиг. 187). Проведем сѣченія AB и A_1B_1 на разстояніи dx друг от друга. Возьмем в сѣченіи площадку $d\omega$, выдѣлим элем. призму с объемом



Фиг. 187

$d\omega . dx$. Матеріал ея подвержен растяженію или сжатію, смотря потому, гдѣ расположена эта призма. Работа внутренних сил при растяженіи (сжатіи)

отнесенная к 1 куб. ед. равна $\frac{k^2}{2E}$, гдѣ k – напряженіе матеріала. Если площадка взята на разстояніи y от нейтральнаго слоя, то $k = \frac{M_x y}{J}$; работа внутр. сил в разсматриваемом элементѣ будет $t = \frac{dx . d\omega}{2E} k^2$. Полная же работа балки получится суммированіем, т. е.

$$T = \int_0^\omega \int_0^l \frac{dx . d\omega}{2E} k^2 \qquad (a)$$

Называя напряженіе матеріала в крайнем (наружном) волокнѣ через k_1 для сѣченія AB и через k_b для опаснаго сѣченія получим:

$k : k_1 = y : e$ и $k_1 : k_b = (l - x) : l$, откуда и $k = \frac{k_b (l-x) y}{l . l}$

$$T = \int_0^\omega \int_0^l \frac{k_b^2 (l-x)^2 . y^2}{2 l^2 e^2 E} d\omega . dx = \frac{k_b^2}{2 l^2 e^2 E} \int_0^\omega d\omega y^2 \int_0^l (l-x)^2 dx =$$

$$= \frac{k_b^2 J l^3}{6 l^2 e^2 E} = \frac{k_b^2 J l}{2E . 3e^2} \qquad (38)$$

Для бруска с прямоугольным сѣченіем $\omega = ah$, имѣем:

$$T = \frac{4ah^3 l}{12 . 3h^2} \cdot \frac{k_b^2}{2E} = \frac{ahl}{9} \cdot \frac{k_b^2}{2E} = \frac{V}{9} \cdot \frac{k_b^2}{2E} \qquad (39)$$

Для цилиндрическаго с діаметром d, имѣем:

$$T = \frac{4 \pi d^4 l}{64 . 3 . d^2} \cdot \frac{k_b^2}{2E} = \frac{\pi d^2 l}{48} \cdot \frac{k_b^2}{2E} = \frac{V}{12} \cdot \frac{k_b^2}{2E} \qquad (40)$$

Выраженіе (a) дает работу напряженій растяженія и сжатія, т. е. нормальных. Полная же работа внутренних сил получится, если прибавить сюда еще работу касательных напряженій.

Послѣдняя может быть найдена слѣдующим путем. Называя через k_s напряженіе дѣйствующее на разстояніи y от нейтральнаго слоя в нѣкотором сѣченіи, найдем, что для безконечно малого объема $d\omega . dx$ работа касательнаго напряженія будет $d\omega . dx \frac{k_s^2}{2G}$. Вставляя сюда значеніе k_s и производя интегрированіе по длинѣ и по протяженію поперечнаго сѣченія, получим работу в объемѣ всего бруска в видѣ:

$$T_s = \frac{1}{2G} \int_0^l \int_0^\omega \left\{ \frac{\frac{dM_x}{dx} \int_y^e y d\omega}{u J} \right\}^2 d\omega . dx \qquad (41)$$

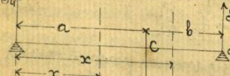
Так для сѣченія прямоугольника с основаніем a и высотою h, найдем:

$$T=\frac{1}{2G}\int_0^l\int_0^\omega\left\{\frac{\frac{dM_x}{dx}(h^2-4y^2)}{8u.J}\right\}^2 d\omega.dx$$

Как указывалось выше, работа внѣшних сил при той или другой деформации бруска, расходуется на преодолѣние работы внутренних напряжений, сопротивление воздуха, поднятие температуры и т. д. Ввиду того, что всѣ послѣдния обстоятельства требуют весьма ничтожнаго расхода внѣшней энергии, можно с весьма малой погрѣшностью положить, что работа внѣшних сил тратится цѣликом на работу деформации. В таком случаѣ вмѣсто того, чтобы выражать послѣднюю через напряжение, возможно написать ее через внѣшния заданныя силы, при чем получается другая зависимость, иногда болѣе удобная. В самом дѣлѣ, из выражения (а) имѣем, замѣняя к через изгибающий момент M_x:

$$T=\int_0^l\int_0^\omega\frac{dx.d\omega}{2E}\cdot\frac{M_x^2y^2}{J^2}=\frac{1}{2EJ}\int_0^l M_x^2dx\ldots(42)$$

Напр.: для балки, лежащей на двух опорах (фиг. 188) и нагруженной в С сосредоточенной силой P имѣем:



Фиг 188.

$$T=\frac{1}{2EJ}\left\{\int_a^l[R_2(l-x)]^2dx+\int_0^a R_1^2x^2dx\right\}$$

Первый интеграл относится к участку CB и второй — к AC.

Т. к. $R_1=\frac{Pb}{l}$ и $R_2=\frac{Pa}{l}$, то находим: искомая работа нормальных напряжений равна:

$$T=\frac{P^2a^2(l-a)^2}{6EJl}$$

Что касается работы T_c касательных напряжений, то благодаря входящему в выражение статическому моменту, нельзя написать общий вид, не задавая форму попереч. сѣчения. Численныя значения T и T_s весьма отличаются друг от друга; можно сказать à priori; что работа касательных напряжений во много раз меньше работы нормальных. Возьмем для примера только что разсмотрѣнную балку; она имѣет два участка: в ..., а именно $AC-\Sigma P=R_1=\frac{Pb}{l}$

и во втором $\Sigma P=-R_2=\frac{Pa}{l}$, пусть далѣе сѣчение балки прямоугольное с основанием u и высотою h, тогда очевидно:

$$T_s=\frac{\left(\frac{Pb}{l}\right)^2}{2G}\int_0^a dx\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\left\{\frac{h^2-4y^2}{8J}\right\}^2u\,dy+\frac{\left(\frac{Pa}{l}\right)^2}{2G}\int_a^l dx\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\left\{\frac{h^2-4y^2}{8J}\right\}^2u\,dy.$$

Произведя интегрирование в указанных предѣлах и дѣлая упрощения найдем:

$$T_s=\frac{P^2h^5u.a.b}{120.J^2Gl}=\frac{P^2h^5ua(l-a)}{120.J^2G.l}$$

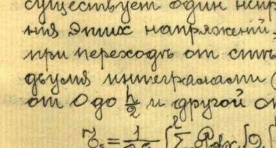
Вставляя вмѣсто J его величину $J=\frac{uh^3}{12}$ найдем:

$T:T_s=4/3\frac{ab}{h^2}$, если принять, что $G=0{,}8\,E$.

Когда сила приложена по-срединѣ балки, то

$$T:T_s=1/3\left(\frac{l}{h}\right)^2$$

Возьмем слѣдующий примѣр. Балка длиною l met. задѣлана одним концом в стѣну (фиг. 189) и нагружена равномѣрно; сѣчение симметричное, двутавровое. Работа T внутренних сил (напряжений нормальных) будет:



Фиг. 189.

$$T=\int_0^l\frac{M_x^2}{2EJ}dx=\frac{1}{2EJ}\int_0^l\left\{p\frac{(l-x)^2}{2}\right\}^2dx=\frac{p^2l^5}{40EJ}$$

Работа T_s касательных напряжений в виду того, что при заданной формѣ поперечнаго сѣчения не существует один непрерывный закон распредѣления этих напряжений, а измѣнение его происходит при переходѣ от стѣнки к полкѣ, выразится двумя интегралами (по поперечному сѣчению) один от 0 до $\frac{h}{2}$ и другой от $h/2$ до $H/2$, а именно:

$$T_s=\frac{1}{2G}\int_0^l\Sigma P dx\left\{2\int_0^{h/2}\left[\frac{(h^2-4y^2)}{8J}\right]^2u\,dy+\int_{h/2}^{H/2}\left[\frac{H^2-4y^2}{8J}\right]^2u\,dy\right\}$$

причем в первом интегралѣ (в скобках) вмѣсто u надо вставить δ, во втором интегралѣ — B.

Положим, что $H=3/2\,h$ и $B=4\delta$, тогда:

$$T_b:T_s\cong 4{,}56\left(\frac{l}{H}\right)^2,$$

если опять принято, что $G = 0{,}8E$.

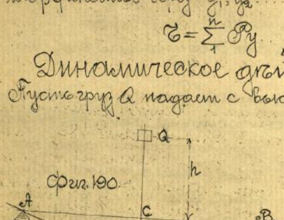
Обыкновенно, когда вычисленіе не требует особой точности, полагают, что работа внѣшних сил равна работѣ только нормальных напряженій.

Если дѣйствуют только сосредоточенныя силы, то работа их, а слѣд., и внутренних сил может быть выражена как сумма произведеній из величины силы на перемѣщеніе ея точки приложенія по направленію дѣйствія силы, т. е. на соотвѣтствующую ординату упругой кривой. Называя силы через $P_1, P_2, \dots P_n$ и ординаты через $y_1, y_2 \dots y_n$ имѣем:

$$\mathcal{T} = \sum_1^n P y.$$

Динамическое дѣйствіе внѣшней силы.

Пусть груз Q падает с высоты h (фиг. 190) на средину балки, $L = 2l$, лежащей на 2х опорах и производит прогиб f.



Фиг. 190.

Работа внѣшней силы, очевидно будет $\mathcal{T} = Q(h+f)$. Если бы груз дѣйствовал статически, то стрѣла прогиба была бы $f_0 = \frac{Ql^3}{6EJ}$. Работа в таком случаѣ напишется в видѣ:

$$\mathcal{T}_0 = \int_0^{f_0} Q\,df = \int_0^{f_0} 1/l^3\, 6EJ f_0\, df = \frac{3}{l^3} EJ f_0^2$$

Такова же будет работа внутренних сил, т. е. напряженій. Но сила Q, приложенная динамически вызывает деформацію $f_1 > f_0$. Работа внутренних сил будет $\mathcal{T}_1 = 3/l^3\, EJ f_1^2$, а так как по нашим допущеніям она равна работѣ груза Q, то имѣем:

$$3/l^3\, EJ f_1^2 = Q(h+f_1)$$

отсюда получаем:

$$f = \frac{l^3 Q}{6EJ} \pm \sqrt{\left[\frac{l^3 Q}{6EJ}\right]^2 + 2h\frac{l^3 Q}{6EJ}} = f_0 \pm \sqrt{f_0^2 + 2hf_0} \quad \dots \quad (43)$$

Полученное выраженіе для динамической стрѣлы прогиба совершенно аналогично выраженію (5), которое

было получено для удлиненія при динамическом растяженіи. Разсужденіями подобными тѣм какія были приведены в этом параграфѣ, можно показать и здѣсь, что брусок, если предѣл упругости не перейдем по достиженію стрѣлою значенія f, начнет выпрямляться; вслѣдствіе этого груз в момент, когда ось сдѣлается прямой, пріобрѣтает скорость $v = \sqrt{2gh}$ и поднимается на первоначальную высоту и явленіе повторится. Если же груз остается соединенным с балкой, то будет имѣть мѣсто колебательное движеніе с центром, отстоящим от оси балки на величину f_0. Конечно практически и здѣсь нельзя наблюдать явленіе в описанной формѣ по тѣм же причинам, о которых упоминалось в главѣ о растяженіи. Но кромѣ того здѣсь надо обратить вниманіе на то, что балка на опорах лежит свободно и при перемѣщеніи груза вверх, ему придется увлекать за собою и балку. Если же поставить треніе на опорах, то работа тренія на них будет увеличена. Если в выраженіи (43) сдѣлать $h = 0$ т. е. допустить, что груз, не падая с высоты, дѣйствует динамически, то найдем, что $f_1 = 2f_0$. Но так как:

$$f_1 = \frac{Ql^3}{6EJ} = \frac{Q.l.l^2}{2.3.EJ} = \frac{Ml^2}{3EJ} = \frac{kl^2}{3Ee} \quad \text{и соотвѣтственно}$$

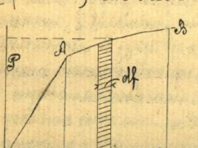
$$f_0 = \frac{k_0 l^2}{3Ee}$$

Слѣдовательно $k = 2k_0$ т. е. в предѣлах упругости при динамическом дѣйствіи силы напряженія возрастают вдвое. Это обстоятельство необходимо принимать во вниманіе при разсчетах.

Явленіе за предѣлом упругости.

Зависимость между деформаціей и внѣшними силами за предѣлом упругости при изгибѣ, дѣлается болѣе сложной, так же как это наблюдается для растяженія и крученія. Пропорціональность между дѣйствующей нагрузкой и стрѣлами прогиба исчезает

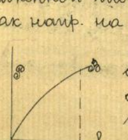
Если откладывать по оси ординат внѣшнія силы, а по оси абсцисс соотвѣтствующія деформаціи (f), то получается діаграмма вообще в видѣ (фиг. 191). Точка A является и здѣсь предѣлом пропорціональности. Кривая AB различна для разных матеріалов и способов нагрузки и поперечных форм бруска и общаго аналитическаго вида получить для нея нельзя.



Фиг 191

Легко видѣть, что площадь діаграммы дает работу внѣшней силы, как и в случаях растяженія и крученія. В самом дѣлѣ, взяв отрѣзок df по оси абсцисс, найдем, что заштрихованная площадка равна произведенію $P\cdot df$, а вся площадь $OABbO = \int_0^f P\,df$ выразит собою работу силы P.

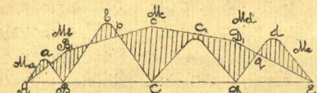
Матеріалы малооднородные, как чугун, камень, нѣкоторые сплавы дадут діаграмму без рѣзко выраженной точки A, предѣла пропорціональности как напр. на фиг. 192.



Фиг 192.

Наблюденія показывают, что за предѣлом упругости, стрѣла прогиба состоит из двух частей, остающейся и исчезающей, причем послѣдняя измѣняется пропорціонально деформирующей нагрузки. Напряженіе так же как и деформаціи измѣняются за предѣлом упругости не по закону простой пропорціональности. Поэтому зависимость $M = \frac{Jk}{y}$ справедливая только до предѣла пропорціональности не может имѣть мѣста при остающихся деформаціях. Дѣйствительно, предотавим себѣ, что брусок получил уже остающуюся стрѣлу прогиба. Это очевидно совпадает с тѣм, что волокна наиболѣе удаленныя от нейтральнаго слоя, находятся под напряженіями перешедшими предѣл упругости.

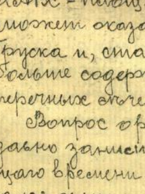
Но т. к. по мѣрѣ приближенія к нейтральному слою напряженія падают до нуля, то мы должны необходимо придти к заключенію, что одновременно часть волокон подвергается напряженію не доходящим еще до предѣла упругости.



Фиг. 186.

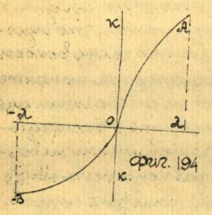
Слѣд. говорить о распредѣленіи напряженій по закону прямой линіи невозможно, а потому невозможна зависимость $M = \frac{Jk}{y}$.

Кромѣ того для матеріалов, для которых сопротивляемость растяженію и сжатію не одинакова, получим, что и напряженія в крайних волокнах неодинаковы. Пусть $\alpha\alpha$ (фиг. 193) нѣкоторое сѣченіе балки. Наибольшее напряженіе растяженія $k_z = \alpha C$ и сжатію $k = E\alpha$. Закон распредѣленія напряженій выразится кривой $CBADE$. Если поперечное сѣченіе имѣет горизонтальную ось симметріи, то из условія, что сумма проекцій всѣх сил, приложенных к части правой (или лѣвой) бруска должна равняться нулю, получим, что площадь αABC = площ. αADE. При этих условіях точка A может оказаться выше или ниже осевой линіи бруска и, стало быть, нейтральный слой не будет больше содержать в себѣ центры тяжести поперечных сѣченій.



Фиг. 193.

Вопрос о распредѣленіи напряженій при изгибѣ давно занимает изслѣдователей, но до настоящаго времени не рѣшен. Главным образом подвергался опытам чугун, из одного и того же матеріала заготовлялись бруски на растяженіе и сжатіе и изгиб. Доводя растягиваемые и сжимаемые бруски до разрушенія, строят діаграммы, которыя представляются кривыми OA — для растяженія и OB для сжатія (фиг. 194). Т. к. при разрушеніи чугунных балок на изгиб, прежде всего наблюдается разрыв волокон в растянутой части, то не трудно по данной діаграммѣ BOA построить кривую напряженій матеріала в изогнутом брускѣ (в опасном сѣченіи) в момент начала разрушенія и затѣм подсчитать момент внутренних сил (нормальных напряженій). Наблюденія показали, что полученный таким образом момент не равен дѣйствующему внѣшнему моменту, который легко находится по нагрузкѣ машины. Весьма вѣроятно, что причина этого несовпаденія лежит в разности условій, в которых находится матеріал при растяженіи (сжатіи) отдѣльных брусков и при растяженіи (сжатіи) в массѣ изгибаемой балки. Но, конечно, вполнѣ возможно и другое объясненіе, как напр., перекашиваніе поперечных сѣченій, вліяніе касательных напряженій и т. д.



Фиг. 194

Разсчетныя ур-ія при изгибѣ.

Выше было найдено соотношеніе $K = \frac{Ey}{\rho}$, дающее величину напряженія в растянутой (сжатой) части для волокна, отстоящаго на разстояніи y от нейтральнаго слоя. С другой стороны существует зависимость $M_x = \frac{EJ}{\rho}$. Исключеніем ρ из этих двух ур-ій получается ур-іе:

$$M_x = \frac{J}{y} K_b$$

связывающее между собою величины изгибающаго момента, внутренняго (нормальнаго) напряженія и размѣра бруска. Полученная зависимость дает возможность найти, так наз., прочные размѣры бруска при заданной системѣ внѣш-

них сил и качеств матеріала. Само собою понятно, что при разсчетах необходимо принимать во вниманіе опасное сѣченіе, для котораго изгибающій момент M_x, а слѣд. и величина внутренняго напряженія K_b достигает maximum'a. Из изложеннаго выше извѣстно, что K_b будет наибольшим для внѣшних волокон, почему величинѣ y надо придавать значеніе e — разстояніе наиболѣе удаленнаго волокна от нейтральнаго слоя. Соотношеніе $\frac{J}{e}$ называется модулем или моментом сопротивленія и обозначается буквою W.

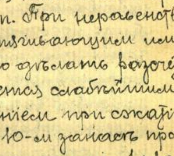
Итак имѣем:

$$M_{max} = W \cdot K_b.$$

Если матеріал, как напр., желѣзо прочно сопротивляется растяженію и сжатію, то под K_b можно полагать допускаемое напряженіе сжатых или растянутых волокон.

Другое явленіе наблюдается для таких матеріалов, как напр. чугун, дерево и т. п. При неравенствѣ внутренняго сопротивленія растягивающим или сжимающим силам, необходимо дѣлать разсчет на сопротивленіе, которое является слабѣйшим. Так напр., безопасным напряженіем при сжатіи для дуба можно принять (при 10-м запасѣ прочности) 0,6 klgr. на m/m^2, а при растяженіи 1 klgr. Поэтому опредѣляя размѣр поперечнаго сѣченія, надо пользоваться формулой: $0{,}6 = \frac{M}{W}$. Для чугуна наблюдаем явленіе обратное, для обыкновеннаго сѣраго чугуна $K_z = 3$ klgr. (при 4-м запасѣ) и $K = 10$ klgr. на сжатіе. Поэтому при разсчетѣ надо принимать первую цифру.

Напр., для тавровой балки с сѣченіем поперечным, указанным на фиг. 195, подверженной изгибу равномѣрно распредѣленным грузом в 1200 klgr. при разстояніи между опорами 1000 m/m имѣем: $J = 3144400\ m/m^4$. $M_{max} = 300000$ klg. m/m



Фиг. 195.

и $e_1 = 32{,}2$ m/m, $e_2 = 67{,}8$ m/m. Напряженіе к крайних волокон полки

$$k = \frac{300000 . 32{,}2}{3144400} = 3{,}08 \text{ klg. } m/m^2$$

для узкой стороны

$$k = \frac{300000 . 67{,}8}{3144400} = 6{,}45 \quad ''$$

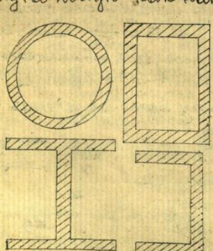
Из этих цифр видно, что широкое ребро должно быть подвержено растяженію, а узкое сжатію.

Опредѣлив прочные размѣры по разсчетному ур-ю $W_{k_b} = M_{max}$ дѣлают провѣрку на скалывающія силы. Напр. для разсмотрѣнного сѣченія k_s в нейтральном слоѣ:

$$K_s = \frac{\Sigma P \int_0^e y\,d\omega}{J_z\, u} = \frac{1200 . 20 . 80 . 40}{20 . 6710000} = 0{,}56 \text{ klgr.}$$

что вполнѣ достаточно, ибо для чугуна можно принять: $k_s = 1{,}92$ klgr. на m/m^2

Как указывалось выше, внутреннее напряженіе при изгибѣ $k_b = \frac{yE}{S}$ для данного поперечного сѣченія есть величина перемѣнная для различных y — разстояній от нейтральнаго слоя. Напряженіе частиц, лежащих близь послѣдняго, весьма мало, вслѣдствіе чего эта часть матеріала почти не оказывает вліянія на сопротивленіе бруска, подвергнутаго изгибающему дѣйствію внѣшних сил. Поэтому весьма часто при проектированіи деталей машин и других сооруженій, поперечному сѣченію придают не сплошную форму, а полую как напр., на фиг. 196. Возьмем для примѣра, так называемое, коробочное сѣченіе, примѣняющееся постоянно при сооруженіи мостов с большими пролетами и сравним вѣс с сплошным сѣченіем того же модуля сопротивленія при постоянном отношеніи высот к основанію (фиг. 197). Для коробчатой формы

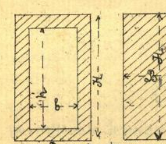


Фиг. 196

$$W = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$$

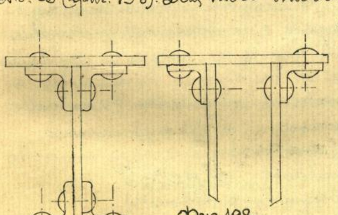
для сплошного:

$$W_1 = \frac{B_1 H_1^2}{6}$$



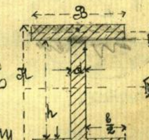
Фиг. 197

Пусть $H : B = H_1 : B_1 = 2$ и $H = 400$, $h = 300$; $B = 200$, $b = 150$ $W = 3650000$. Слѣд. $W_1 = W = 3650000 = 1/6\, B_1 H_1^2 = \frac{H_1^3}{12}$, и $H_1 = 352$, а $B_1 = 176$. Если бы вѣс куб. ед. матеріала равен δ klgr, то вѣс ед. длины балки полаго сѣченія будет $G = (BH - bh)\delta$; вѣс сплошного $G_1 = B_1 H_1 \delta$ или $G : G_1 = 35 : 62 = 0{,}565$, т.е. сплошная балка на 43,5% тяжелѣе полой при одинаковой сопротивляемости изгибу. Но в виду малого сѣченія по нейтральному слою, касательныя напряженія в послѣднем для полой балки будут значительнѣе, почему при разсчетѣ провѣрка на скалываніе безусловно необходима. При больших величинах высоты H, коробчатыя, тавровыя и др. подобныя сѣченія составляются из желѣзных листов, соединенных угольками на заклепках. В этом случаѣ необходимо опредѣлить напряженіе касательных напряженій в пл-сти срѣзанія заклепок, AB. CD (фиг. 198). Для того чтобы показать, как велико бывает касательное напряженіе, приведем числовой примѣр.



Фиг. 198.

Дана двутавровая балка с поперечными размѣрами (фиг. 199) $H = 400$ m/m; $h = 360$ m/m $B = 150$ m/m; $b = 135$ m/m $a = 15$ m/m. Для нѣкотораго сѣченія скалывающая сила равна $\Sigma P = 20000$ klgr. Опредѣлить касательныя усилія в слоях I, II и III $\|^{ых}$ нейтральному слою. Для данной формы поперечного сѣченія момент инерціи



Фиг. 199

$J = 1/12\,(BH^3 - bh^3) = 275120000.$

Для слоя I - выражение:

$$\frac{\int_y^e y\,d\omega}{u} = \frac{\int_{100}^{200} y\,d\omega}{u} = \frac{10.150.195}{150} = 1950 \text{ и } u = 150$$

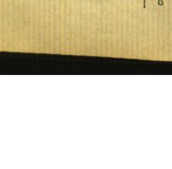
для II

$$\frac{\int_y^e y\,d\omega}{u} = \frac{\int_{180}^{200} y\,d\omega}{u} = \frac{20.150.190}{15} = 38000 \text{ и } u = 15$$

для III сечения $\frac{\int y\,d\omega}{u}$ состоит из двух частей полки А и средней части А, поэтому имеем:

$$\frac{\int_{180}^{200} y\,d\omega + \int_0^{180} y\,d\omega}{u} = \frac{20.150.190 + 15.180.90}{15} = 54200 \quad u = 15$$

В виду того, что момент инерции возрастает весьма быстро с увеличением высоты, следует придавать поперечным сечениям форму, имеющую большие размеры в плоскости изгиба. Но здесь помимо того условия, что сечение по нейтральному слою не должно быть очень мало, во избежание возникновения значительных касательных напряжений, необходимо помнить следующее. Модуль сопротивления, который входит в ур-е прочности при изгибе, возрастает менее быстро, нежели момент инерции; кроме того наибольшее значение последнего не всегда совпадает с наибольшим значением модуля сопротивления. Пусть требуется из круглого бруска с диаметром d вырезать призматический прямоугольного сечения при условии 1) наибольшего модуля сопротивления и 2) наибольшего момента инерции (фиг. 200)



Фиг. 200.

Имеем: $d^2 = a^2 + b^2$

1) Модуль сопротивления

$$W = \frac{ab^2}{6} = \frac{a(d^2 - a^2)}{6};$$

первая производная:

$$\frac{dW}{da} = \frac{d^2 - 3a^2}{6}$$

Т. к. вторая производная $\frac{d^2W}{da^2} < 0$, то из условия $\frac{dW}{da} = 0$ определяем, что $W_{max.}$ будет при $b : a = \sqrt{2}$

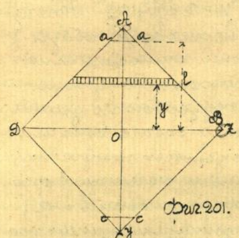
2) Момент инерции сечения:

$$J = \frac{ab^3}{12} = \frac{b^3\sqrt{d^2 - b^2}}{12}$$

Так как вторая производная $\frac{d^2J}{db^2} < 0$, то приравнивая $\frac{dJ}{db}$ нулю получим условие $6d^2 - 8b^2 = 0$ откуда:

$J_{max.}$ при $b : a = \sqrt{3}$.

Иногда оказывается выгодным в данном сечении уменьшить высоту, причем момент инерции уменьшится, а модуль сопротивления возрастает; напр., квадратное сечение, если изгиб производится в пл-сти одной из диагоналей (фиг. 201)



Фиг. 201.

Момент инерции полного квадрата:

$$J_z = \int_0^\omega d\omega . y^2 = \int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{+\frac{a}{\sqrt{2}}} 2z . y^2 . dy,$$

а т. к. ур-е стороны квадрата АВ будет:

$$y\frac{\sqrt{2}}{a} + z\frac{\sqrt{2}}{a} = 1$$

то

$$J_z = \int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{+\frac{a}{\sqrt{2}}} \left\{\frac{a}{\sqrt{2}} - y\right\} 2y^2 dy =$$

$$= \left| \frac{2ay^3}{3\sqrt{2}} - \frac{2y^4}{4} \right|_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{+\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{a^4}{12}$$

если у ребер А и С срезаны призмы, то момент инерции шестиугольника DaaBcc будет:

$$J'_z = \int_{-b}^{+b} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - y\right) 2y^2 dy = \left| \frac{2ay^3}{3\sqrt{2}} - \frac{2y^4}{4} \right|_{-b}^{+b} = \frac{4ab^3}{3\sqrt{2}} - b^4.$$

Модуль сопротивления полного квадрата будет

$$W = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Модуль сопротивления срезанного квадрата:

$$W' = \frac{4ab^2}{3\sqrt{2}} - b^3$$

Наибольшее значение W' будет при b, которое определится условием: $\frac{dW'}{db} = \frac{8ab}{3\sqrt{2}} - 3b^2 = 0$ откуда

$b = \frac{8a}{9\sqrt{2}}$ и $W'_{max.} \cong \frac{a^3\sqrt{4}}{11,47}$, т. е. $W'_{max} > W_{max}$.

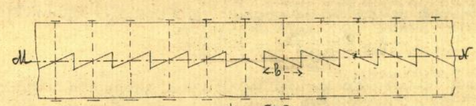
Составныя балки.

а) Деревянныя балки.

Если при перекрытии пролетов деревянными балками, имѣющіеся в распоряженіи брусья или бревна оказываются недостаточными с точки зрѣнія сопротивленія изгибающим моментам, то прибѣгают к укладкѣ двойных или тройных балок. Чаще всего при этом балки имѣют прямоугольное поперечное сѣченіе; пусть размѣры его будут a и h.

Двѣ балки положенныя друг на друга дадут общій модуль сопротивленія $W = 2\frac{ah^2}{6} = \frac{ah^2}{3}$. При изгибѣ такой двойной балки происходит обязательно сдвиженіе концов нижней относительно верхней. Допустим, что оба бруска, образующіе двойную балку, связаны между собою по длинѣ таким образом, что упомянутаго сдвига быть не может. Очевидно, что при этих условіях получается как бы одна балка с поперечным сѣченіем в формѣ прямоугольника, у котораго основаніе $= a$, а высота $h_1 = 2h$. Модуль сопротивленія теперь должен быть иной, а именно: $W_1 = \frac{a(2h)^2}{6} = 2\frac{ah^2}{3}$, отношеніе W_1 к W равно двум, т.е. дѣлая по длинѣ связь между составляющими брусьями, мы при том же количествѣ матеріала увеличиваем сопротивляемость балки вдвое. Если вмѣсто двух положим без связи n брусьев, они дадут модуль сопротивленія $W' = n\frac{ah^2}{6}$. Тѣ же n брусьев при наличности взаимной связи между собою по длинѣ дадут сопротивленіе: $W_n = \frac{1}{6}a(nh)^2 = \frac{1}{6}n^2ah^2$, т.е. $W_n : W = n$ в n раз больше; отсюда ясно преимущество составных балок перед простыми.

Взаимная связь между лежащими друг на другѣ брусьями составной балки может быть выполнено помощью зубцов и шпонок, при этом устанавливается ряд болтов, стягивающих брусья между собою. Соединеніе помощью косых зубцов показано на фиг. 202, для балки имѣющей наибольший изгибающій момент по срединѣ и лежащей на 2^{х} опорах. Зубья имѣют скосы от средины в разныя стороны, потому что, при указанных условіях, касательныя напряженія в среднем сѣченіи



Фиг 202

мѣняют свой знак. Разсчет начинается с провѣрки нормальных напряженій по наибольшему изгибающему моменту M_{max}. В направленіи по оси балки, зубцы подвергаются скалывающим усиліям, вызываемым касательными напряженіями. При небольшой величинѣ выступа зубца можно принять, что каждый из них подвергается срѣзу в плоскости $\|$^{ой} основанію. Если балка нагружена по срединѣ сосредоточенным грузом P, то при длинѣ ея l имѣем величину касательнаго напряженія в нейтральном слоѣ (т.е. в пл-сти соприкасанія брусьев) постоянную и равную $k_s = \frac{3P}{8ah}$. При длинѣ зуба $\underline{b}$, находим условіе прочности на высотѣ средней пл-сти MN (фиг. 202): $\frac{3Pb}{8h} = \frac{1}{2}bak'_s$ или $\boxed{k'_s = 2k_s}$, отсюда видно, что возникаемое напряженіе в пл-сти зубца, совпадающей с нейтральным слоем, вдвое больше нежели k_s. Необходимо, что оно не превосходило допустимаго, напр., для сосны не болѣе $k_s = 0{,}5$ клгр. на $^m/_m{}^2$. Кромѣ того замѣчаем, что длина зуба не имѣет значенія, это совершенно понятно, т.к. срѣзающая сила по всей длинѣ балки остается постоянной, мѣняя лишь знак в среднем сѣченіи, гдѣ $k_s = 0$. Но с другой стороны скалывающее усиліе передается от зубца на зубец при помощи давленія друг на друга их торцовых (вертикальных) поверхностей. Называя высоту зубца через d и полагая, что давленіе это распредѣлено равномѣрно с напряженіем q клгр. на кв. ед. найдем равенство:

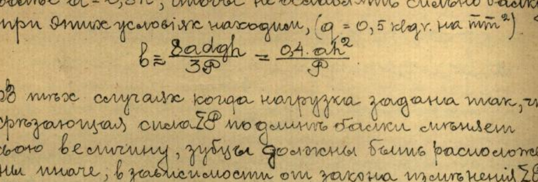
$$adq = k_s . b . a = \frac{3}{8}\frac{Pb}{h}$$

Величина q берется не болѣе 0,25 – 0,5 клгр на $^m/_m{}^2$

для сосновой балки. Высота зуба дѣлается не болѣе $d = 0,3h$, чтобы не ослаблять сильно балку; при этихъ условіяхъ находимъ, ($q = 0,5$ клгр. на mm^2)

$$b \approx \frac{8adqh}{3\mathfrak{P}} = \frac{0,4 \cdot ah^2}{\mathfrak{P}}.$$

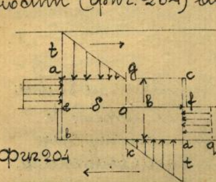
Въ тѣхъ случаяхъ когда нагрузка задана такъ, что срѣзающая сила $\Sigma\mathfrak{P}$ по длинѣ балки мѣняетъ свою величину, зубцы должны быть расположены иначе, в зависимости от закона измѣненія $\Sigma\mathfrak{P}$. Указанный способ сращиванія имѣетъ сравнительно мало распространенія. Гораздо чаще встрѣчается соединеніе брусков помощью шпонок (фиг. 203),



Фиг. 203.

причем точно также устанавливается связь помощью болтов. Шпонки обыкновенно дѣлаются из дуба как матеріала болѣе прочнаго нежели сосна. В пл-сти нейтральнаго слоя шпонки подвергаются срѣзу; если назовем силу срѣзающую через S, то условіе прочности напишется так: $S = a\delta k_s$, гдѣ δ – толщина шпонки и k_s напряженіе; об опредѣленіи силы S будет сказано ниже, очевидно, что величина s зависит от закона измѣненія $\Sigma\mathfrak{P}$ и размѣщенія шпонок. Но кромѣ срѣзающей силы, шпонка подвергается еще сжатію на своих боковых поверхностях. Здѣсь слѣдует замѣтить, что волокна шпонки обычно направлены $\parallel^{\text{но}}$ пл-сти соприкасанія брусьев, но перпендикулярно оси бруса, так что торцы остаются не нагруженными. При изгибѣ замѣчается стремленіе соединенных брусьев к сдвиженію их друг относительно друга. Пусть верхній брус стремится двигаться слѣва на право, а нижній наоборот.

При этих условіях, очевидно, нагружаются поверхности (фиг. 204) ae и fd. Так. обр. образуется пара сил, которая стремится вращать шпонку по часовой стрѣлкѣ, что вызывает давленіе поверхности шпонки ac на верхнюю балку и поверхности bd на нижнюю. Закон распредѣленія давленія на этих поверхностях неизвѣстен;

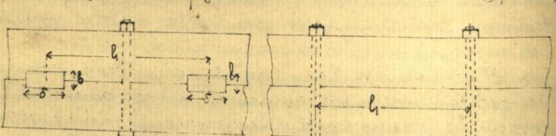


Фиг. 204

можно с увѣренностью говорить лишь о том, что при вращеніи шпонки по часовой стрѣлкѣ, угол a поднимается вверх, а угол c стремится опуститься. Сообразно с этим надо ожидать, что на поверхности ab наибольшее сжатіе будет у точки a. Точка c вслѣдствіе пониженія разгружается вовсе. Т. к. явленіе не должно имѣть мѣсто за предѣлом упругости, то всѣ деформаціи надо считать исчезающими. При этих условіях можно допустить, что напряженіе сжатія (смятія), достигая наибольшаго значенія у точки a, падает по закону прямой линіи и у средней точки g обращается в нуль; часть поверхности gc разгружена. Само собою понятно, что на нижней поверхности наблюдаем ту же картину. Переходя к боковым граням шпонки ae и fd и замѣчая, что вслѣдствіе того же вращенія шпонки, наибольшее давленіе придется в точкѣ e (соотвѣтственно в f). Вввиду того, что высота <u>b</u> обыкновенно не велика, можно принять с небольшой погрѣшностью, что давленіе на разсматриваемых поверхностях распредѣлено равномѣрно с напряженіем q клгр. на m/m^2 поверхности. На верхней и нижней поверхности шпонки наибольшее давленіе (в a и d) назовем через t, клгр. на m/m^2. Условіе равновѣсія шпонки против вращенія ея, очевидно, будет: сумма моментов приложенных к ней сил относительно для сосновой балки. Высота зуба дѣлается не болѣе $d = 0,3h$, чтобы не ослаблять сильно балку; при этихъ условіяхъ находимъ, ($q = 0,5$ klgr. на mm^2)

$$b \approx \frac{8adqh}{3\mathcal{P}} = \frac{0{,}4 \cdot ah^2}{\mathcal{P}}.$$

Въ тѣхъ случаяхъ когда нагрузка задана такъ, что срѣзающая сила $\Sigma\mathcal{P}$ по длинѣ балки мѣняетъ свою величину, зубцы должны быть расположены иначе, въ зависимости отъ закона измѣненія $\Sigma\mathcal{P}$. Указанный способ сращиванія имѣетъ сравнительно мало распространенія. Гораздо чаще встрѣчается соединеніе брусков помощью шпонок (Фиг. 203),



Фиг. 203.

причемъ точно также устанавливается связь помощью болтовъ. Шпонки обыкновенно дѣлаются изъ дуба как матеріала болѣе прочнаго нежели сосна. Въ пл-сти нейтральнаго слоя шпонки подвергаются срѣзу; если назовемъ силу срѣзающую через S, то условіе прочности напишется такъ: $S = a\delta k_s$, гдѣ δ — толщина шпонки и k_s напряженіе; объ опредѣленіи силы S будетъ сказано ниже, очевидно, что величина S зависитъ отъ закона измѣненія $\Sigma\mathcal{P}$ и размѣщенія шпонок. Но кромѣ срѣзающей силы, шпонка подвергается еще сжатію на своихъ боковыхъ поверхностяхъ. Здѣсь слѣдуетъ замѣтить, что волокна шпонки обычно направлены $\|^{\text{но}}$ пл-сти соприкасанія брусьев, но перпендикулярно оси бруса, такъ что торцы остаются не нагруженными. При изгибѣ замѣчается стремленіе соединенныхъ брусьев к сдвиженію ихъ другъ относительно друга. Пусть верхній брус стремится двигаться слѣва на право, а нижній наоборотъ.

При этихъ условіяхъ, очевидно, нагружаются поверхности (Фиг. 204) ac и fd. Так. обр. образуется пара силъ, которая стремится вращать шпонку по часовой стрѣлкѣ, что вызываетъ давленіе поверхности шпонки ac на верхнюю балку и поверхности bd на нижнюю. Законъ распредѣленія давленія на этихъ поверхностяхъ неизвѣстенъ;

Фиг. 204

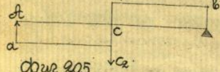
можно с увѣренностью говорить лишь о томъ, что при вращеніи шпонки по часовой стрѣлкѣ, угол a поднимается вверхъ, а угол c стремится опуститься. Сообразно с этимъ надо ожидать, что на поверхности ab наибольшее сжатіе будетъ у точки a. Точка c вслѣдствіе пониженія разгружается вовсе. Т. к. явленіе не должно имѣть мѣсто за предѣлом упругости, то всѣ деформаціи надо считать исчезающими. При этихъ условіяхъ можно допустить, что напряженіе сжатія (смятія), достигая наибольшаго значенія у точки a, падаетъ по закону прямой линіи и у средней точки g обращается в нуль; часть поверхности gc разгружена. Само собою понятно, что на нижней поверхности наблюдаемъ ту же картину. Переходя к боковымъ гранямъ шпонки ae и fd и замѣчая, что вслѣдствіе того же вращенія шпонки, наибольшее давленіе придется в точкѣ e (соотвѣтственно в f). Въ виду того, что высота $\underline{b}$ обыкновенно не велика, можно принять с небольшой погрѣшностью, что давленіе на разсматриваемыхъ поверхностяхъ распредѣлено равномѣрно с напряженіемъ q klgr. на m/m^2 поверхности. На верхней и нижней поверхности шпонки наибольшее давленіе (в a и d) назовемъ через t, klgr. на m/m^2. Условіе равновѣсія шпонки противъ вращенія ея, очевидно, будетъ: сумма моментовъ приложенныхъ к ней силъ относительно оси О равна нулю. Называя по прежнему ширину балки через a, найдем: $qa\frac{b}{2}\frac{b}{4} = t_1\frac{a\delta}{4}\cdot\frac{2}{3}\delta$ или $q\frac{b^2}{4} = t_1\frac{\delta^2}{6}$, отсюда имѣем:

$$\delta : b = \sqrt{\frac{6}{4}\cdot\frac{q}{t}}$$

$\frac{qab^2}{2\cdot 8} = \frac{t_1 a\delta^2}{4\cdot 2\cdot 3}$

Напряженіе q для дуба надо принять не болѣе 0,4 klgr. на $^m/_m{}^2$. Здѣсь взято q меньше нежели в прошлом примѣрѣ для сосны лишь потому, что сжатіе сосны (балки) производится вдоль волокна, а у дуба (боковая поверхность шпонки) перпендикулярно волокнам, чему дерево вообще сопротивляется слабѣе. Что касается напряженія t_1, что оно должно быть выбрано для сосны, ибо она и дуб здѣсь (поверхности ac и bd) находятся в одинаковых условіях, можно принять $t_1 = 0,20$ klgr. на $^m/_m{}^2$. Тогда получим ~ $\delta : b = 1,73$. Возвращаясь к условію прочности шпонки против срѣзанія, замѣчаем, что сила s очевидно равна $s = q\frac{ab}{2}$, а потому получим: $q\frac{ab}{2} = \delta . a . k_s$ и считая для $k_s = 0,1$ klgr. на $^m/_m{}^2$ и $q = 0,4$ klgr. на $^m/_m{}^2$, найдем $\delta : b = 2$, что обычно и принимается. Переходим к вопросу о размѣщеніи шпонок вдоль балки. Для рѣшенія его необходимо прежде всего знать закон измѣненія срѣзающей силы ΣP, т.е. расположенія балки на опорах и внѣшнюю нагрузку.

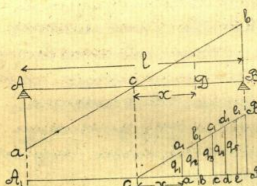
Пусть дана балка (фиг. 205) лежащая на двух опорах и нагруженная по срединѣ сосредоточенным грузом P. Діаграмма срѣзающей силы представится ломанной AaC_2C_1bB т.е. $\Sigma P = const.$ для каждой половины балки. Шпонки поэтому должны быть распредѣлены равномѣрно друг от друга. Т.к. высота h составных брусьев считается извѣстной (опредѣляется из условія прочности изгибающему моменту), то высота шпонки будет $b = 0,3h$, ширина $\delta = 0,6h$. Число n шпонок в каждой половинѣ найдется из условія, чтобы вся скалывающая сила, дѣйствующая по нейтральному слою вдоль половины балки была



Фиг 205

компенсируема сопротивленіем соотвѣтственных шпонок срѣзанію. Касательное напряженіе будет $k_s = \frac{\Sigma P\int_0^h y\,d\omega}{a J} = \frac{3P}{8ah}$, а скалывающая сила $s = k_s\frac{al}{2} = \frac{3Pl}{16h}$ и слѣд. на δ. $k_s = \frac{3}{16}\cdot\frac{Pl}{h}$ откуда, при $k_s = 0,1$ klgr. на $^m/_m{}^2$, $n = \frac{25}{8ah^2}Pl$. Пусть $P = 3000$ klgr., $l = 6000\,^m/_m$, $a = 200\,^m/_m$, $h = 300\,^m/_m$, тогда $b = 90\,^m/_m$, $\delta = 180\,^m/_m$ и $n = 3$ шпонки, а всего 6 штук расположенных друг от друга на одинаковом разстояніи. Болты располагаются между шпонками через одну или двѣ шпонки. В опасном сѣченіи шпонок не устанавливают. За опорами должны находится болты. Разстояніе между осями шпонок в нашем случаѣ равно 1000 $^m/_m$; если желательно чтобы шпонки пришлись над опорами, число их придется увеличить на одну.

Пусть для той же балки дана нагрузка равномѣрно распредѣленная. В этом случаѣ срѣзающая сила будет измѣняться по закону прямой линіи; діаграмма ея выразится ломанной $AaCbB$ (фиг. 206).



Фиг. 206.

Очевидно, что и касательное напряженіе в нейтральном слоѣ будет убывать по направленію от опоры к среднему сѣченію балки; а потому и шпонки придется располагать так, чтобы разстояніе их между собою убывали от средины балки к опорам.[1] Если начало координат назначим в точкѣ C, то для нѣкотораго сѣченія D касательное напряженіе будет равно, очевидно, $k_s = \frac{3}{8}\cdot\frac{px}{ah}$, если p — нагрузка в klgr. на 1 пог. met. длины балки. Слѣд. k_s измѣняется также по закону прямой линіи; пользуясь этим, можно так. обр. намѣтить мѣста расположенія шпонок. Отложив в точкѣ B, отрѣзок $B_1B_2 = k_s\Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{3pl}{16ah}$, прямая C_1B_2 даст закон измѣ-

[1] Равномѣрнаго распредѣленія шпонок можно достичь и в этом случаѣ, но при условіи, что ширина их возрастает от C к A и B, в практикѣ δ берется постоянным по длинѣ.

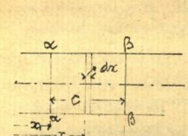
нения касательнаго напряженія. Пусть первая шпонка лежит в a на разстояніи x_1, которое найдется так; шпонка a должна выдерживать скалывающую силу $S_1 = \frac{1}{2} k_s x a = \delta a k'_s$, гдѣ k'_s допустимое напряженіе шпонки на срѣзаніе $k'_s = 0{,}1$ kilgr. Но $k_s = \frac{3px_1}{8ah}$, а потому $x_1 = 0{,}566\, a\sqrt{h/p}$.

Слѣдующая шпонка лежит в b на таком разстояніи x_2, чтобы скалывающая сила на участкѣ ab равнялась также сопротивленію шпонки на срѣз; другими словами необходимо, чтобы площадь трапеціи $aa'bb'$ равнялась площади тр-ка $C_1 a a_1$ т. е. $\frac{1}{2}(q_1+q_2)(x_2-x_1) = \frac{1}{2} q_1 x_1$, откуда $x_2 = x_1\sqrt{2}$.

Примѣняя подобное же разсужденіе к точкѣ C, мѣсту нахожденія третьей шпонки, получим условіе: $\frac{1}{2}(q_2+q_3)(x_3-x_2) = q\frac{x_1}{2}$ или $x_3 = x_1\sqrt{3}$. Для шпонок 4ой, 5ой и т. д. найдем $x_4 = 2x_1$, $x_5 = x_1\sqrt{5}$ и т. д.

Пусть балка нагружена равномѣрно распредѣленным грузом $p = 1000$ kilgr. на 1 пог. mtr. далѣе $l = 6$ mt. $a = 200$ m/m, $h = 300$ m/m. Размѣры шпонок будут тѣ же. Разстояніе их от средняго сѣченія будут: $x_1 = 1680$ m/m, $x_2 = 2350$ m/m и $x_3 = 2900$ m/m. Число шпонок получается также равным шести, ибо хотя нагрузка здѣсь вдвое больше, но скалывающая сила на половинѣ балки получается такой же величины. Болты и здѣсь располагаются между шпонками. Задаваясь шпонками меньшаго размѣра получим соотвѣтственно большее число их.

Если сдвигающая сила ΣP измѣняется по оси балки по болѣе сложному закону нежели линейная зависимость, то указанный способ является весьма сложным. Приведем потому общій метод, который является пригодным при всякаго рода внѣшних нагрузках. Представим себѣ два сѣченія α и β, отстоящих друг от друга на нѣкотором конечном разстояніи C и от начала координат на x_1 и x_2. Балка подвержена изгибу нѣкоторой произвольной внѣшней нагрузкой (фиг. 207) будет дѣйствовать изгибающій мо-



Фиг. 207.

мент M_α, в сѣченіи β — M_β. Опредѣлим как велика сила производящая скалываніе по нейтральному слою между этими сѣченіями. Возьмем между ними на разстояніи x от начала координат два сѣченія на разстояніи dx, в таком случаѣ получим напряженіе:

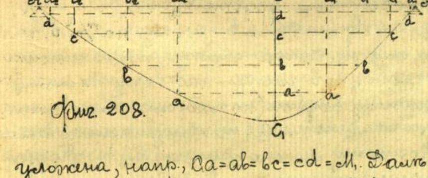
$$k_s = \frac{\frac{dM_x}{dx}\int_0 y\,d\omega}{J\,u}$$

Для призматической балки имѣем: $k_s = \frac{dM_x}{dx} A$, гдѣ $A = \frac{\int_0^e y\,d\omega}{J u}$. Скалывающая сила на участкѣ dx будет: $dS = k_s \cdot a \cdot dx$, а на участкѣ $\alpha\beta = C$ получим:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} a A \frac{dM_x}{dx}\,dx = aA(M_c - M_\alpha).$$

Но с другой стороны сопротивленіе шпонки срѣзанію есть величина постоянная и равная S, а потому имѣем: $S = a\delta k'_s$. Так. обр. становится ясно, что необходимо балку разбить на такіе участки, чтобы разность моментов в конечных сѣченіях этих участков была бы постоянная и равная $M_1 = M_\beta - M_\alpha = \delta k'_s : A$.

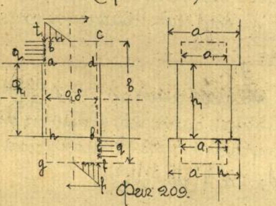
Пусть балка AB несет на себѣ такую нагрузку, для которой кривая изгибающих моментов будет AC_1B (фиг. 208). Опредѣлив величину $M_1 = \frac{\delta k'_s}{A}$ откладываем ее в масштабѣ моментов от точки C_1 к C столько раз, сколько она может быть



Фиг. 208.

уложена, напр., $Ca = ab = bc = cd = M_1$. Далѣе проводим через точки a, b, c и d прямыя $\parallel^{ныя}$ оси балки до пересѣченія с кривой AC_1B в точках aa, bb, cc, dd; наконец, из послѣдних опускаем перпендикуляры на ось балки, тогда точки a_1, c_1, b_1, a_1, a_2, b_2, c_2 и d_2 укажут мѣсто расположенія шпонок, ибо разность изгибающих моментов между двумя сосѣдними сѣченіями всегда будет равна M_1, а слѣд. шпонки будут напряжены одинаково.

Иногда дѣлают составныя балки так, что брусья наложены друг на друга с просвѣтом; получаемая, так называемая, прорѣзная балка. Возьмем как и раньше два бруса с сѣченіем $a.h$ и высотою просвѣта h_1 (фиг. 209). Момент W или модуль сопротивленія такого сѣченія, очевидно, будет такой:



Фиг. 209.

$$W=\frac{J}{e}=\frac{\frac{a(h_1+2h)^3}{12}-\frac{ah_1^3}{12}}{h+\frac{h_1}{2}}=$$

$$=\frac{ah}{2h-h_1}\left\{3h_1^3+6hh_1+4h^2\right\}\frac{1}{3}$$

Обыкновенно принимают $h_1=h$, тогда имѣем:

$$W=\frac{13}{2}ah^2$$

слѣд. в 8,66 раз больше модуля одинарной и 2,17 раза больше модуля двойной сращеной балки.

Относительные размѣры шпонки могут быть найдены из слѣдующих соображеній аналогичных тѣм, которыя имѣли мѣсто при разсмотрѣніи простой двойной балки. Для равновѣсія шпонки имѣем $\Sigma M_0=0$, но

$$\Sigma M_0=q\frac{b-h_1}{2}a_1\frac{b+h_1}{4}-t_1a_1\frac{\delta}{4}\frac{2}{3}\delta=0$$

Положим, что величина врубки $\frac{b-h_1}{2}=0{,}1h$ и $h_1=h$, тогда при $q=0{,}4$ klgr. на $^m/_m{}^2$ и $t_1=0{,}2$ klgr. на $^m/_m{}^2$ $\delta:h=0{,}812$.

Обыкновенно, для удобства сборки, тѣло шпонки дѣлается в свободной части нѣсколько тоньше, точно также ширину врубки (по сторонѣ балки) дѣлается нѣсколько меньше $\underline{a}$, приблизительно около $0{,}8a=a_1$. Поэтому можно принять $\delta\cong h$. Провѣрки на срѣзаніе излишни, ибо, во 1), поперечное сѣченіе шпонки в нейтральном слоѣ больше нежели в мѣстѣ врубки и, во 2), волокна в шпонкѣ направлены перпендикулярно нейтральному слою, а потому сопротивленіе перерѣзыванію возрастает. Весьма часто в прорѣзных балках шпонки дѣ-

лаются из того же матеріала как и балка, т.е. сосны. Болты обыкновенно ставят по обѣ стороны каждой шпонки.

Если в составную балку входит три или больше отдѣльных брусьев, то опредѣленіе относительных размѣров шпонок не измѣняется и их можно для непрорѣзной балки принять как $\delta:b=2$. Расположеніе шпонок в том случаѣ, если они расположены в одних вертикальных сѣченіях (друг над другом) совершенно подобно тому, как это указывалось для двойной составной балки. Отличіе, конечно, будет заключатся в том, что при нечетном числѣ составляющих брусьев, нейтральный слой будет проходить через ось средняго бруска и так. обр. максимальныя касательныя напряженія на шпонки передаваться не будут. Если почему либо не желают ослаблять сѣченіе средней балки, то шпонки располагаются в шахматном порядкѣ или, как говорят, вперевязку. Распредѣленіе их не представляет, послѣ сказаннаго, большого затрудненія.

Болты, которые служат лишь для связи, обыкновенно затягиваются весьма сильно (до отказа) и в пл-стях соприкасанія поэтому возникает сила тренія. В разсчет ее мы не принимаем, а потому можно сказать, что построенная по приведенным выше соображеніям, балка будет нѣсколько прочнѣе нежели это предполагается теоретически.

При помощи одного тренія возможно совершенно компенсировать сдвигающую силу по пл-сти соприкасанія брусьев. Если установить вдоль балки достаточное число болтов и, стянув брусья, вызвать значительное давленіе, то сила тренія может получится весьма значительная.

Обратимся к примѣру, который мы разсматривали выше. Балки двойныя из брусьев $a.h=200.300$ $^m/_m$, длиною $l=6^m$, груз $P=3000$ klgr. сосредоточенный, приложен по срединѣ. При этом скалывающая сила, приходящаяся на половину длины балки будет:

$S = \frac{3}{16} \cdot \frac{Pl}{h} = 10250$ клгр. Полагая, что коэффиціент тренія f при отсутствіи смазки равен 0,3, найдем, что брусья должны быть нажаты друг на друга с силою ~ 34170 клгр. или давленіе в плоскости соприкасанія должно быть равно $q = 0{,}114$ клгр. на $^{m}/_{m}{}^{2}$. Допустим, что болты имѣют в рѣзьбѣ 20$^{m}/_{m}$ діаметром, можно принять число болтов = 12. Хотя теоретически вопрос разрѣшается очень просто, хотя в дѣйствительности коэффиціент тренія сухого дерева по сухому дереву можно считать больше нежели 0,3, тѣм не менѣе составныя балки на одних болтах неприменяются в отвѣтственных случаях. Это объясняется, во 1), тѣм, что нельзя быть увѣренным в постоянствѣ затяжки болтов, которая может уменьшится, напр., вслѣдствіе сильнаго сжатия дерева под шайбами. Если же давленіе в мѣстѣ соприкасанія брусьев уменьшится, то по причинѣ уменьшенія силы тренія, сдвигающая сила передастся на болты, которые, изгибаясь, сильно сминают свои гнѣзда.

в) Балки желѣзныя.

Иногда, если в наличности не имѣется сплошной балки, достаточнаго профиля, приходится соединять двѣ балки меньшаго размѣра.

Напр., требуется по разсчету балка с модулем сопротивленія $W = 60{,}0\,^{c}/_{m}{}^{3}$, а имѣется на лицо лишь тавровое желѣзо № 10/10. Модуль сопротивленія относительно оси $||^{ой}$ полки будет приблизительно 24,7. Двѣ балки, сложенныя полками дадут модуль 49,4$^{c}/_{m}{}^{3}$. Если эти балки склепать полками, то общій модуль будет 67,2$^{c}/_{m}{}^{3}$, т.е. больше чѣм достаточный. Сила тренія, развиваемая нажатіем балок, благодаря заклепкам, настолько велика, что она одна могла бы уравновѣсить силу скалывающую, но обычно, при разсчетѣ полагают, что заклепки подвергаются и срѣзанию и по этому условію, выбрав діаметр заклепок, опредѣляют число их.

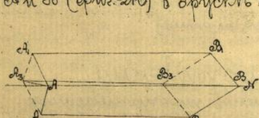
Способ опредѣленія размѣщенія заклепок ничѣм не отличается по существу от способа размѣщенія што-

нок, но в дѣйствительности шаг заклепочнаго шва (разстояніе между осями сосѣдних заклепок) берется по всей балкѣ одинаковый и размѣр его принимается по наиболѣе опасному мѣсту. Мы не будем дальше разсматривать этот вопрос, т. к. подробное изученіе относится к курсу деталей машин.

Сложное сопротивленіе

Разсмотрѣнныя до сих пор явленія, так называемых, простых сопротивленій: растяженія (сжатія), сдвига, крученія и изгиба, могут часто комбинироваться различным образом. Так напр., брусок может одновременно подвергаться крученію и изгибу, крученію и сдвигу, растяженію, изгибу и крученію и т.д. Принято такіе случаи характеризовать названіем сложного сопротивленія. Как увидим ниже всѣ случаи сложнаго сопротивленія сводятся к явленію растяженія и сдвига, которые можно назвать элементарными формами. Дѣйствительно, уже крученіе и изгиб представляют собою сложныя формы сдвига, сдвига и растяженія. Как бы ни были приложены внѣшнія силы, всегда возможно их разбить на такіе системы, из которых одни вызывают деформацію сдвига, другія деформацію растяженія. Вопрос, при изученіи сложнаго сопротивленія сводится к опредѣленію каким образом деформируется брусок при одновременном дѣйствіи этих систем. В основу разсужденія и здѣсь кладется закон Гука (простой пропорціональности), выражающій связь между деформаціей и внутренним напряженіем. Это понятно само по себѣ, ибо, если слагающія деформаціи подчиняются всѣ одному закону, то этому закону подчиняется и результирующая. Эта результирующая деформація находится при помощи теоремы о независимости дѣйствія сил, которая заключается в том, что если нѣкоторая сумма сил R_1 вызывает в брускѣ деформацію удлиненія (или сжатія) l_1, другая система R_2, дѣйствуя независимо от первой вызывает деформацію i_2, то третья система R_3, представляющая равнодѣйствующую двух первых, вызовет напряженіе $i_3 = i_1 \pm i_2$.

Пусть под дѣйствіем системы сил R_1 частицы A и B (фиг. 210) в брускѣ перемѣстятся в A_1 и B_1. Под дѣйствіем системы R_2 (по прекращеніи дѣйствія системы R_1) частицы перемѣстятся в A_2, B_2. Если обѣ системы R_1 и R_2 будут приложены одновременно, то частицы должны перемѣститься в A_3, B_3 [1])



Фиг. 210

Предположим, что явленіе происходит до предѣла упругости и, слѣд., величины перемѣщеній весьма малы, можно допустить, что положенія A_1B_1, A_2B_2 почти $\parallel^{ы}$ AB. Тогда имѣем, проектируя стороны четырехугольников ABA_1B_1 и ABA_2B_2 на AB

$$A_1B_1 + BB_1\cos B_1BM = AB + AA_1\cos A_1AM$$
$$A_2B_2 + BB_2\cos B_2BM = AB + AA_2\cos A_2AM$$
$$A_3B_3 + BB_3\cos B_3BM = AB + AA_3\cos A_3AM$$

откуда
$$\frac{A_1B_1 - AB}{AB} = \frac{AA_1\cos A_1AM - BB_1\cos B_1BM}{AB} = i_1$$
$$\frac{A_2B_2 - AB}{AB} = \frac{AA_2\cos A_2AM - BB_2\cos B_2BM}{AB} = i_2$$
$$\frac{A_3B_3 - AB}{AB} = \frac{AA_3\cos A_3AM - BB_3\cos B_3BM}{AB} = i_3$$

Но с другой стороны, проэкція діагонали прямоугольника на какое либо направленіе равна суммѣ проэкцій сторон на тоже направленіе, а потому складывая два первых ур-ія почленно получим:

$$i_1 + i_2 = \frac{AA_1\cos A_1AM + AA_2\cos A_2AM}{AB} - \frac{BB_1\cos B_1BM + BB_2\cos B_2BM}{AB} = \frac{AA_3\cos A_3AM - BB_3\cos B_3BM}{AB} = i_3$$

Т. е. относительныя деформаціи, вызываемыя порознь системами R_1 и R_2 при дѣйствіи этих систем одновременно, складываются алгебраически. Не трудно

[1]) по діагонали параллелограмма, построеннаго на AA_1, AA_2 и на BB_2 и BB_1

видѣть, что результирующее перемѣщеніе, вызываемое совокупным дѣйствіем систем R_1 и R_2 получится если обѣ системы будут замѣнены равнодѣйствующей системой сил R_3.

На основаніи сказаннаго во всѣх случаях гдѣ заданная система (или одна сила) приложена так, что непосредственно трудно опредѣлить соотвѣтствующую деформацію, возможно тогда эту систему разложить на слагающія; найдя деформаціи, вызываемыя каждой системой отдѣльно, складываем их алгебраически. Умножая равенство $i_3 = i_2 \pm i_1$ на величину модуля упругости E, найдем выраженіе для результирующаго напряженія,

$$K'''_z = K'_z + K''_z$$

Если имѣются двѣ системы сил вызывающих в части данного элемента напряженіе сдвига K'_s и K''_s, направленныя друг к другу под углом α, то результирующее напряженіе будет найдено геометрическим сложеніем т. е.

$$K'''^2_s = K'^2_s + K''^2_s \pm 2K'_sK''_s\cos\alpha$$

При наличности одноименнаго дѣйствія напряженій нормальных и касательных, результирующее напряженіе (и деформація) находятся иначе, о чем будет изложено ниже.

1) Призматическій брусок закрѣплен одним концом в стѣну и нагружен силою P, причем она приложена в центрѣ тяжести поперечнаго сѣченія и направленіе ея составляет угол α с осью бруска. Плоскость (чертежа), содержащая силу P и ось бруска, содержит также одну из главных осей (фиг. 211). Опредѣлим наибольшее напряженіе матеріала. Разложим данную силу на двѣ: одну P_1, направленную по оси бруска, а другую P_2 ей $\perp^{ую}$. Под

Фиг. 211

дѣйствіем силы $P_1 = P\cos\alpha$ брусок растягивается и, если площадь поперечнаго сѣченія бруска ω, то напряженіе матеріала, возбуждаемое силой P_1, будет:

$$K'_z = \frac{P\cos\alpha}{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Под дѣйствіем же силы $P_2 = P\sin\alpha$ данный брусок изгибается. Возьмем сѣченіе mn, отстоящее на разстояніи x от мѣста закрѣпленія; изгибающій момент для этого сѣченія $M_x = P_2(l-x)$

Пусть момент инерціи поперечнаго сѣченія бруска будет J и разстояніе наиболѣе удаленнаго слоя от оси $= e$, тогда модуль сопр. ія $W = \frac{J}{e}$, а напряженіе волокна

$$K''_z = \frac{M_x}{W} = \frac{P_2(l-x)}{W}$$

Но изгибающій момент M_x - величина перемѣнная, а потому и напряженіе K''_z будет также величиной перемѣнной. При разсчетѣ же надо брать наибольшее напряженіе матеріала, которое, очевидно, выразится (при $x=0$) так:

$$K''_z = \frac{P_2 l}{W} = \pm\frac{P\sin\alpha \cdot e \cdot l}{J} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

знак (+) относится к напряженію верхних волокон.

На основаніи теоремы о независимости дѣйствія сил, истинное напряженіе матеріала в сѣченіи A будет:

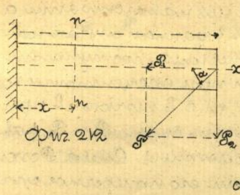
$$K_z = K'_z + K''_z,$$

или вслѣдствіе выраженія (a) и (b):

$$K_z = \frac{P\cos\alpha}{\omega} \pm \frac{P\sin\alpha \cdot e\, l}{J} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

Вопрос о том какой знак надо брать в выраженіи (44), зависит от свойств матеріала и от относительных величин 1 и 2 членов правой части: при одинаковом сопротивленіи растяженію и сжатію необходимо принимать знак (+). Если второй член значительно больше перваго, то при слабом сопротивленіи сжатію берут в разсчет разность, т.е. во вниманіе принимают знак (−)

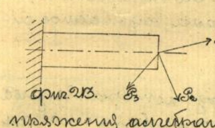
Аналогичное выраженіе получим, если сила дѣйствует как показано на фиг. 212, но при этом длина бруска должна быть не велика, а иначе брусок под дѣйствіем силы $P_1 = P\cos\alpha$, будет не сжиматься а прогибаться. Результирующее напряженіе будет:



Фиг. 212

$$K_\alpha = \frac{P\cos\alpha}{\omega} \mp \frac{P\sin\alpha \cdot e \cdot l}{J}$$

Если на данный брусок дѣйствует одновременно нѣсколько сил, расположенных как указано на фиг. 213, то нужно разложить каждую силу на слагающія вдоль оси бруска и ей $\perp$ ную, затѣм, опредѣляя напряженіе для растягивающих сил и для изгибающих, и складывают эти напряженія алгебраически, причем напряженіе сжатія считают отрицательным.

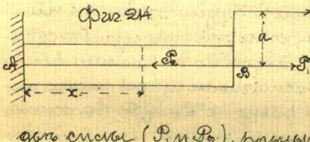


Фиг. 213.

Эксцентрическое растяженіе.

В этом случаѣ дѣйствующая сила $\|$ на оси бруска, но не совпадает с ней, а отстоит от нея на разстояніи $\underline{a}$ (эксцентрицитет) фиг. 214. Чтобы провести, получающуюся при таком дѣйствіи силы, деформацію к извѣстным уже нам формоизмѣненіям, приложим в точкѣ B двѣ силы (P_1 и P_2), равныя силѣ P, т.е. ($P_1 = P_2 = P$) и взаимно противоположныя.

Фиг. 214



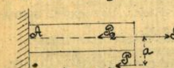
Сила P_1 растягивает данный брусок и вызывает напряженіе $K'_z = \frac{P}{\omega}$, гдѣ ω - площадь поперечнаго сѣченія бруса. Силы P и P_2 составляют пару, дающую, очевидно, круговой изгиб, ибо для произвольнаго сѣченія, на разстояніи x, изгибающій момент равен $M_x = Pa = const$. Напряженіе в сѣченіи A выразится зависимостью $K''_z = \frac{Pae}{J}$. Полное напряженіе матеріала будет:

$$K_z = K'_z + K''_z = \frac{P}{\omega} \pm \frac{P a \cdot e}{J} \quad \ldots\ldots \quad (45)$$

Эксцентрическое сжатіе.

Дан брус, на который дѣйствует сжимающая сила

P_1, ||ая оси, но отстоящая от нея на разстояніи a (фиг. 215)[1]. Чтобы опредѣлить в данном случаѣ напряженіе матеріала, поступают также как и при эксцентрическом растяженіи, т. е. в точкѣ A прикладывают двѣ силы: P_1 и P_2 равныя P и взаимно противоположныя.



Фиг. 215

Сила P сжимает данный брусок и, если его поперечное сѣченіе ω, то напряженіе матеріала, вызываемое силой P_2, будет:

$$k' = \frac{P_2}{\omega}$$

Силы P и P_2 составляют пару, которая вызывает в данном брускѣ деформацію изгиба, а в таком случаѣ внутреннее напряженіе выразится:

$$k'' = \frac{M}{W} = \frac{Pa}{W};$$

а результирующее напряженіе, по теоремѣ о независимости дѣйствія сил, будет:

$$k = k' \pm k'' = \frac{P}{\omega} \pm \frac{Pa}{W} = \frac{P}{\omega} \pm \frac{Pa.e}{J}$$

Т. к. здѣсь разсматривается случай сжатія, то положительной величиной будем считать напряженіе тѣх волокон, которыя при изгибѣ сжимаются. Изслѣдуем подробно выраженіе величины k для волокон растягивающихся напряженіе которых от изгиба равно: $k'' = -\frac{Pa}{W}$. На основаніи вышесказаннаго результирующее напряженіе:

$$k = k' + k'' = \frac{P}{\omega} - \frac{Pa}{W} \quad \dots\dots \quad (в)$$

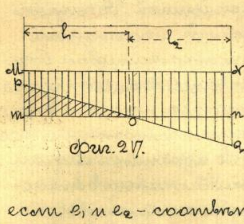
В этом выраженіи двѣ величины соединены знаком (−), поэтому для величины k могут имѣть мѣсто три случая:

1) $k>0$; 2) $k=0$; 3) $k<0$

1-ый случай. Возьмем в испытуемом брускѣ сѣченіе MN (фиг. 216) перпендикулярное осевой линіи. Внутреннія силы распредѣлятся неравномѣрно по площади поперечнаго сѣченія, т. к. в выраженіи (в) член $k' = \frac{P}{\omega}$ постоянный, а k'' — мѣняется с из-

1) Длина бруска предполагается небольшой.

Фиг. 216



Фиг. 217

мѣненіем разстоянія волокон от нейтральнаго слоя. Будем откладывать положительныя напряженія вниз от линіи MN, а отрицательныя (растяженіе) отсчитывать снизу вверх. Пусть ордината Mm (фиг. 217) выражает в извѣстном масштабѣ величину

$$k' = \frac{P}{\omega}$$

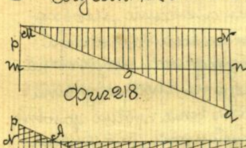
Распредѣленіе этого напряженія выразится прямой mn. Распредѣленіе напряженія k'' вызываемаго изгибом представится прямыми po и oq с крайними отрѣзками

$$\overline{mp} = -\frac{Pae_1}{J} \text{ и } \overline{qn} = \frac{Pae_2}{J},$$

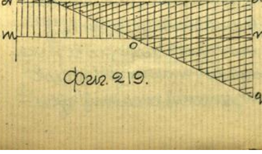
если e_1 и e_2 — соотвѣтственно разстояніе крайних волокон от нейтральнаго слоя; e_1 — растяженія, e_2 — сжатія. Площадь фигуры $MNpoq$ представит распредѣленіе результирующих напряженій по всему поперечному сѣченію, причем наименьшее напряженіе будет в точкѣ M — $\overline{Mp}$ и наибольшее — в N — $\overline{Nq}$.

2-ой случай: $k=0$. При этом $k'=k''$ выражаются одинаковыми отрѣзками $\overline{Mm} = \overline{mM}$. В сѣченіи MN дѣйствует как в 1-ом случаѣ только одно напряженіе сжатія и распредѣленіе его опредѣлится фигурой $MNqoM$ с наибольшей величиной $k = \overline{Nq}$ (фиг. 218).

3-ій случай: $k<0$. В этом случаѣ (фиг. 219) в точкѣ M



Фиг. 218



Фиг. 219

напряженіе растяженія $k'' = \overline{mp}$[1] больше напряженія сжатія $k' = \overline{Mm}$, почему получится результирующее напряженіе $-\overline{Mp} = \overline{Mm} - \overline{mp}$. В точкѣ N имѣется лишь сжатіе:

$$k = \overline{nN} + \overline{nq} = \overline{Nq}.$$

В точкѣ A, гдѣ напряженіе

1) В абсолютном значеніи.

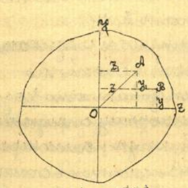
растяженія и сжатія равны по величинѣ, результирующее напряженіе обращается в нуль. Слѣд., точка A принадлежит нейтральному слою.

Эксцентрическое сжатіе в брусьях, состоящих из слоев $\perp^{\text{ах}}$ осевой линіи. Ядро сѣченія.

Если брусок состоит из слоев, расположенных $\perp^{\text{но}}$ осевой линіи, то он сопротивляется сжимающим усиліям почти также как и сплошной. В случаѣ появленія растягивающих усилій, послѣдним должен сопротивляться не только матеріал бруска, но и матеріал связующаго вещества, если таковое имѣется. Если этого вещества нѣт, то брусок не может сопротивляться даже ничтожным растягивающим напряженіям. В практикѣ случаи слоях брусьев встрѣчаются исключительно в строительном дѣлѣ: каменныя фабричныя трубы, каменныя колонны, опорные быки, своды и т. д. Во всѣх этих сооруженіях матеріалом служит камень искусственный (кирпич, бетонныя или цементныя плиты) или естественный. В слоях между рядами камня находится связующій элемент известь, цемент, глина и т. д., матеріал обладающій небольшим сопротивленіем растяженію, к этому надо прибавить, что сила сцѣпленія между камнем и связующим матеріалом тоже не велика. На основаніи этих соображеній, в поименованных выше нельзя допускать возникновенія растягивающих напряженій; другими словами, необходимо соблюдать условіе, чтобы на всей площади любого поперечнаго сѣченія, возбуждались только напряженія сжатія. Не трудно видѣть, что результирующая напряженій зависит кромѣ всѣх прочих условій, от величины a — плеча изгибающей пары, т. е. эксцентриситет; вслѣдствіе этого для каждаго сѣченія имѣет значеніе не только величина силы, но и точка ея приложенія. Чтобы не происходило, так называемое раскрытіе шва, minimum напряженія сжатія долженъ

жен быть больше или, в крайнем случаѣ, равен нулю[1]

Разсмотрим общій случай, когда форма поперечнаго сѣченія произвольна (фиг. 220).



Фиг. 220

Пусть сила приложена в точкѣ A, опредѣляемой координатами y, z, в системѣ главных осей YOZ и направлена $\perp^{\text{но}}$ пл-сти чертежа. Данную силу можно замѣнить через равную ей силу, приложенную в центрѣ O и через пару с моментом $P.OA$. Эту послѣднюю в свою очередь разбиваем на двѣ слагаемыя пары, расположенныя в пл-стях глав. осей. Момент пары, лежащей в пл-сти OY будет $= Py$, а пары, расположенной в пл-сти OZ, момент равен Pz. В таком случаѣ результирующее напряженіе в нѣкоторой точкѣ B с координатами z и y выразится:

$$K = K' + K'' + K''' = \frac{P}{\omega} + \frac{Py_1}{W_z} + \frac{Pz_1}{W_y} =$$

$$= P\left\{\frac{1}{\omega} + \frac{y_1 y}{J_z} + \frac{z_1 z}{J_y}\right\} \ldots\ldots\ldots (c)\text{[2]}$$

Моменты инерціи J_y и J_z можно замѣнить через произведеніе площадей поперечнаго сѣченія на квадрат соотвѣтственных радиусов инерціи R_y, R_z, т. е. написать: $J_y = \omega R_y^2$, $J_z = \omega R_z^2$

Вводя эти выраженія в ур-іе (c) имѣем:

$$K = \frac{P}{\omega}\left\{1 + \frac{yy_1}{R_z^2} + \frac{zz_1}{R_y^2}\right\} \ldots\ldots (d)$$

Т. к. за предѣльную величину для напряженія K принят нуль, то выраженіе (d) по сокращеніи на P/ω примет вид:

$$1 + \frac{yy_1}{R_z^2} + \frac{zz_1}{R_y^2} = 0 \ldots\ldots (46)$$

что представляет ур-іе прямой линіи.

Так. обр. в сѣченіи находится нѣкоторая прямая,

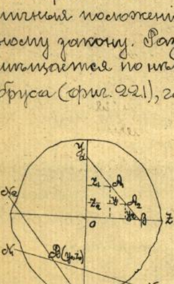
[1] В предположеніи, что сжимающія усилія положительны

[2] Здѣсь W_y и W_z — модуль сопр. по отношенію к осям: OY и OZ.

обладающая свойствами, что напряженія в частицах, лежащих на этой прямой, равны нулю. Очевидно, что прямая есть ничто иное как нейтральная линія, причем положеніе ея зависит вполнѣ от точки приложенія силы, т.е. координат z_1 y_1.
Если эта точка A или, как принято ее называть, полюс, перемѣщается по нѣкоторой кривой, то нейтральная линія занимает послѣдовательно различныя положенія, подчиняясь нѣкоторому опредѣленному закону. Разсмотрим случай, когда полюс перемѣщается по нѣкоторой прямой $\alpha\beta$ лежащей в сѣченіи бруса (фиг. 221), главныя оси OZ и OY. Прямая $\alpha\beta$ дана уравненіем

$$1-\frac{y}{m}-\frac{z}{n}=0,$$

гдѣ $m=\overline{O\alpha}$ и $n=\overline{O\beta}$.



Фиг. 221

Предположим, что в данный момент сила приложена в точкѣ A, вполнѣ опредѣленной координатами y_1, z_1: ур-іе, соотвѣтствующей нейтральной линіи напишется так:

$$1+\frac{yy_1}{R_z^2}+\frac{zz_1}{R_y^2}=0 \quad \ldots\ldots (e)$$

Пусть затѣм полюс перемѣстится в точку A_2 с координатами y_2, z_2; ур-іе соотвѣтствующей нейтральной линіи будет:

$$1+\frac{yy_2}{R_z^2}+\frac{zz_2}{R_y^2}=0 \quad \ldots\ldots (f)$$

Но если точки A_1 и A_2 лежат на прямой $\alpha\beta$, то их координаты удовлетворяют ея ур-ію т.е. имѣем:

$$1-\frac{y_1}{m}-\frac{z_1}{n}=0 \quad и \quad 1-\frac{y_2}{m}-\frac{z_2}{n}=0 \quad ,$$

откуда

$$z_1=n\left(1-\frac{y_1}{m}\right) \quad и \quad z_2=n\left(1-\frac{y_2}{m}\right)$$

Эти величины подставляем в ур-іе (e) и (f), находим:

$$1+\frac{yy_1}{R_z^2}+\frac{z}{R_y^2}n\left(1-\frac{y_1}{m}\right)=0 \quad и \quad 1+\frac{yy_2}{R_z^2}+\frac{z}{R_y^2}n\left(1-\frac{y_2}{m}\right)=0$$

Рѣшая уравненія эти относительно y и z, получим

$$y=-\frac{R_y^2}{m}=y_0; \qquad z=-\frac{R_z^2}{n}=z_0$$

Величины y_0, z_0 удовлетворяют ур-іям (e) и (f) и слѣд.

представляют коор-ты точки пересѣченія нейтральных линій NN_1 и NN_2. Если взять на прямой $\alpha\beta$ третью точку A_3, тѣми же разсужденіями можно показать, что соотвѣтственная нейтральная линія пройдет через точку $B(y_0, z_0)$. Другими словами, при перемѣщеніи полюса по линіи $\alpha\beta$, соотвѣтственныя линіи вращаются около общей для всех точки $B(y_0, z_0)$.
Не трудно доказать, что если точку B принять за полюс, то линія $\alpha\beta$ будет соотвѣтствующей ему нейтральной линией.
В самом дѣлѣ, ур-іе нейтральной линіи для полюса $B(y_0, z_0)$ будет:

$$1+\frac{y_0y}{R_z^2}+\frac{zz_0}{R_y^2}=0$$

Подставляя величины y_0 и z_0 имѣем:

$$1+\frac{y}{R_y^2}\left\{-\frac{R_y^2}{m}\right\}+\frac{z}{R_z^2}\left\{-\frac{R_z^2}{n}\right\}=0$$

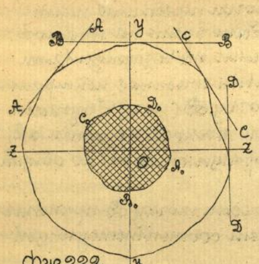
откуда по сокращеніи, получим:

$$1-\frac{y}{m}-\frac{z}{n}=0$$

что представляет ур-іе прямой $\alpha\beta$.
Итак, если полюс перемѣщается по нѣкоторой прямой $\alpha\beta$, то нейтральная линія вращается около нѣкоторой точки B, которая — обратно — представляет полюс данной прямой $\alpha\beta$.

Выше было сказано, что для предупрежденія раскрытія шва нужно, чтобы крайнія волокна были сжаты или, в крайнем случаѣ, чтобы напряженіе в них равнялось нулю. Послѣднее условіе, очевидно, соотвѣтствует требованію, чтобы нейтральная линія проходила по касательной к данному сѣченію. В случаѣ $k>0$ нейтральная линія выходит за предѣлы поперечнаго сѣченія и при $k<0$ пересѣкает его.

Так. обр., если задано сѣченіе, то можно опредѣлить тѣ точки его, в которых приложенныя силы раскрытіе шва не производят. Проведем касательныя AA, BB, CC … к контуру сѣченія и найдем для них соотвѣтственные полюсы (фиг. 222) A_0, B_0, C_0 … Не



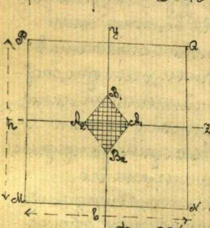
Фиг. 222.

трудно видѣть, что часть сѣченія ограниченная кривой $A_0B_0C_0D_0$ представляет из себя мѣсто, обладающее слѣдующими свойствами: если сила приложена гдѣ либо к его контуру, то нейтральный слой будет касателен к контуру поперечнаго сѣченія; если же полюс будет лежать внутри $A_0B_0C_0D_0$, то нейтральный слой отходит за предѣлы поперечнаго сѣченія. Часть сѣченія $A_0B_0C_0D_0$ носит специальное названіе ядра сѣченія. Отысканіе этого ядра имѣет существенное значеніе для частей сооруженія, в которых можно ожидать раскрытіе шва.

Построеніе ядра сѣченія для правильной формы.

Общій способ нахожденія ядра сѣченія состоит в том, что к контуру сѣченія проводят касательныя, которыя выразят собой нейтральныя линіи. Отыскивая затѣм для них соотвѣтствующіе полюсы и соединяя их, мы получим контур ядра сѣченія.

Примѣр 1-ый. Дан прямоугольник (фиг. 224) $MNPQ$ и требуется опредѣлить его ядро сѣченія. Пусть нейтральная линія совпадает со стороной PQ; найдем координаты соотвѣтственнаго полюса B_2. Для этого предположим сначала наоборот, что полюс перемѣщается по линіи PQ, ур-іе которой, очевидно, будет $2y=h$. При таком перемѣщеніи, как было указано, нейтральныя линіи будут вращаться около точки,



Фиг. 224.

представляющей полюс для линіи PQ.

Когда полюс будет в точкѣ P, координаты которой $y=h/2$, $z=-b/2$, ур-іе нейтральной линіи будет:

$$1+\frac{yh}{2R_z^2}-\frac{zb}{2R_y^2}=0$$

При положеніи полюса в Q с координатами $y=h/2$ и $z=b/2$, ур-іе нейтральной линіи перейдет в

$$1+\frac{yh}{2R_z^2}+\frac{zb}{2R_y^2}=0$$

Для нахожденія точки пересѣченія этих прямых необходимо рѣшить совмѣстно их ур-ія относительно y и z; получаем:

$$y=-\frac{2R_z^2}{h}=-\frac{h}{6} \text{ и } z=0 \text{ ибо } R_z=\sqrt{\frac{J_z}{\omega}}=\sqrt{\frac{bh^3}{12bh}}=\frac{h}{\sqrt{12}}$$

Итак, полюс B_2 имѣет координаты $y=-h/6$ и $z=0$. Для перехода нейтральной линіи (при движеніи ея по контуру сѣченія) из PQ в QN; она вращается около точки Q, при этом полюс будет перемѣщаться по прямой, которая будет имѣть вид:

$$1+\frac{hy}{2R_z^2}+\frac{bz}{2R_y^2}=1-\frac{y}{m}-\frac{z}{n}$$

Не трудно видѣть, что здѣсь $m=-h/6$ и $n=-b/6$. Так. обр. в четвертом квадрантѣ ядро сѣченія приметъ вид прямоугольнаго треугольника OA_1B_2 и, слѣд., для всего сѣченія оно представится параллелограммом $A_1B_1A_2B_2$.

Из сказаннаго можно заключить, что в прямоугольном сѣченіи эксцентриситет, во избѣжаніе раскрытія шва не должен превышать 1/6 части длины стороны ||-ой оси, на которой находится точка приложенія силы.

Примѣр 2-ой. Опредѣлить ядро сѣченія правильнаго 6-тиугольника (сторона его $=a$, фиг. 225)

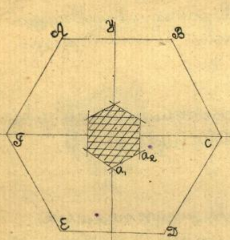
Проведем координатныя оси OZ и OY [1])

Разсматривая сторону AB как нейтральную линію, заставим ее вращаться послѣдовательно около точек A и B. Координаты этих точек будут:

[1]) Как извѣстно для правильн. многоугольников всѣ оси суть главныя.

A — $z = -a/2$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

B — $z = a/2$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}a$



Фиг. 225.

Вставляя эти значенія в ур-іе (46) и принимая во внимание, что для правильнаго 6-ка имѣем:

$$J_z = J_y = \frac{5\sqrt{3}}{16}a^4 = \omega R^2, \quad \omega = \frac{3\sqrt{2}}{2}a^2$$

и слѣд. $R^2 = \frac{5}{24}a^2$

найдем:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + \frac{2{,}4\sqrt{3}\,y}{a} + \frac{2{,}4z}{a} = 0 \\ 1 + \frac{2{,}4\sqrt{3}\,y}{a} - \frac{2{,}4z}{a} = 0 \end{array}\right\} \ldots (g)$$

Откуда точка a_1 пересѣченія этих прямых т. е. полюс стороны AB будет имѣть координаты

$$z = 0, \quad y = -\frac{a}{2{,}4\sqrt{3}}$$

Легко видѣть, что ядро сѣченія будет 6-тиугольник со сторонами

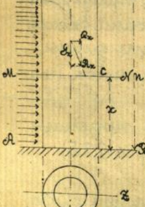
$$b = \frac{a}{2{,}4\sqrt{3}}$$

Коорд-ы вершины a_2 найдутся как коорд-ы точки пересѣченія прямой a_1a_2 (второе из ур-ій (g)) и нейтральной линіи a_2a_3 — соотвѣтствующей полюсу F т. е. имѣющей ур-іе

$$1 - \frac{24z}{5} = 0 \ldots\ldots (h)$$

Разрѣшая совокупно второе из ур-ій (g) и (h) находим коорд-ы точки a_2:

$$y = -\frac{a}{48\sqrt{3}}; \quad z = \frac{a}{4{,}8}$$



Фиг. 226

Примѣр 3-ій. Имѣется призматическая башня (фиг. 226) высотою h^m, подверженная горизонтальному давленію вѣтра с силою q клгр. на кв. мтр. Желательно опредѣлить: будут ли раскрытіе швa в сѣченіи MN на высотѣ x над землею?

Разсматривая часть башни CD, замѣчаем, что она подвержена дѣйствію горизонтальной силы, равной произведенію из давленія вѣтра q клг

на площадь S_x — проэкціи башни $(h-x)$ метров высотою на плоскость $\perp$-ую направленію вѣтра, т. е. $Q_x = qS_x$ и силѣ собственнаго вѣса G_x. Обѣ силы можно считать приложенными на оси башни на разстояніи $1/2(h-x)$ от сѣченія NM; онѣ дают равнодѣйствующую $R_x = \sqrt{Q_x^2 + G_x^2}$, продолжая направленіе R_x до пересѣченія с пл-стью MN, замѣчаем точку встрѣчи; если она лежит внутри ядра сѣченія или на его контурѣ, то раскрытіе шва в сѣченіи MN не будет.

Аналогичным способом производится провѣрка фабричных труб, которыя при небольшом поперечном сѣченіи обладают значительной высотой. Если труба, как это, обыкновенно, имѣет мѣсто на практикѣ, суживается от основанія к вершинѣ, то точка приложенія равнодѣйствующей будет от разсматриваемаго сѣченія не на разстояніи $1/2(h-x)$, а ближе, именно, на разстояніи центра тяжести трапеціи от ея широкаго разстоянія; трапеція эта получается от пересѣченія трубы вертикальной пл-стью, перпендикулярной направленію силы вѣтра.

Косой изгиб.

До сих пор разсматриваемые случаи изгиба призматических брусков, а также и тѣл формы равнаго сопротивленія, предполагали, что дѣйствующая нагрузка лежит в пл-сти проходящей через ось бруска и одну из главных осей поперечнаго сѣченія. При таких же условіях кривая изгиба (упругая кривая) располагается в той же пл-сти или, как принято выражаться, пл-сти дѣйствія сил и изгиба совпадают. Для бруска, у котораго поперечныя сѣченія имѣют безконечно большое число главных осей (напр. круг, квадрат) сила, направленная перпендикулярно к оси, всегда производит плоскій изгиб. Другое явленіе наблюдается в том случаѣ, если внѣшняя сила лежит в пл-сти содержащей ось бруска, но не совпадающей ни с одной из главных осей поперечнаго сѣченія.

Стат XIII. Сопрот. мат. ч. I. проф. И. И. Бобарыков.

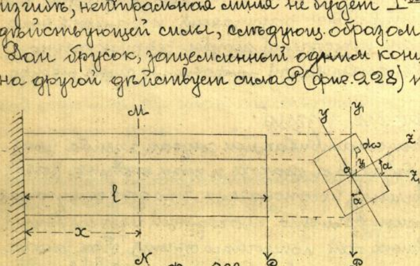
Плоскость дѣйствующей силы (пл-сть дѣйствія) будетъ наклонена под нѣкоторымъ угломъ к пл-сти, в которой лежит изогнутая ось бруска (пл-сть изгиба). Возьмемъ, положимъ, поперечное сѣченіе в формѣ прямоугольника (фиг. 227). Его главныя оси будут OY и OZ. Если сила (или силы) лежит в пл-сти OY, то нейтральный слой располагается по OZ; обратно, при направленіи силы по OZ, послѣдній расположится по OY. Слѣд. в этом случаѣ направленіе дѣйствія силы $\perp$-но к направленію нейтральной линіи.

Фиг. 227

Если же внѣшнія силы лежат в пл-сти OY', произвольно наклоненной к OY, то новое положеніе нейтральнаго слоя не будетъ OX' $\perp$-ое к OY', а нѣкоторое другое.

Можно доказать это положеніе, т. е. что при косом изгибѣ, нейтральная линія не будет $\perp$-на к пл-сти дѣйствующей силы, слѣдующ. образом.

Дан брусок, защемленный одним концом в стѣну, на другой дѣйствует сила P (фиг. 228) приложенная



Фиг. 228

в центрѣ тяжести сѣченія и направленная вертикально, образуя с одной из главных осей OY угол α. Пусть нейтральная линія в поперечном сѣченіи расположена $\perp$-но направленію силы по OZ_1, составляющей со второй главной осью OZ также угол α. Возьмем произвольное сѣченіе бруска MN, на разстояніи x от мѣста закрѣпленія и в этом сѣченіи элементарную площадку $d\omega$ на разстояніях y_1 и z_1 от осей OY_1 и OZ_1. Разсматривая равновѣсіе правой части $(l-x)$ напишем одно из условій этого равновѣсія, а именно, что сумма моментов относительно оси OY_1 всѣх внѣшних сил $= 0$[1] Момент M_1 нормальных напряженій будет

очевидно равен $\int_0^\omega k_z d\omega . z$, но $k_z = \frac{Ey_1}{\rho}$ и слѣд. $M_1 = \frac{E}{\rho}\int_0^\omega y_1 d\omega z_1$; момент касательных напряженій, равно как и внѣшней силы P, обращается в нуль, а потому получим:

$$\frac{E}{\rho}\int_0^\omega y_1 z_1 d\omega = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^\omega y_1 z_1 d\omega = 0$$

Интеграл представляет из себя центробѣжный момент инерціи относительно OY_1 и OZ_1, а слѣд. эти оси суть главныя, что невозможно, т. к. таковыми являются уже оси OY и OZ.

Займемся теперь разысканіем положенія нейтральной линіи в поперечном сѣченіи при косом изгибѣ. Пусть она в разсматриваемом сѣченіи расположится по линіи NN, образующей с главной осью OZ угол β, очевидно отличный от угла α, под которым наклонена сила к другой главной оси OY

Фиг. 229.

Величина внутренней силы для произвольнаго элемента $d\omega$ на разстояніи e от нейтральной линіи будет

$$t = \frac{Ee}{\rho} d\omega$$

Одно из условій равновѣсія, а именно, сумма моментов относительно главных осей, напишется так: относительно оси OZ момент изгибающей силы P будет: $\int_0^\omega 1/\rho\, E.e.y.d\omega$, слѣд.:

$$P\cos\alpha\,(l-x) - \int_0^\omega 1/\rho\, E.e.y.d\omega = 0,$$

так как момент внутренних сил направлен в противоположную сторону сравнительно с моментом силы $P\cos\alpha\,(l-x)$.

Относительно оси OY по аналогіи составляем:

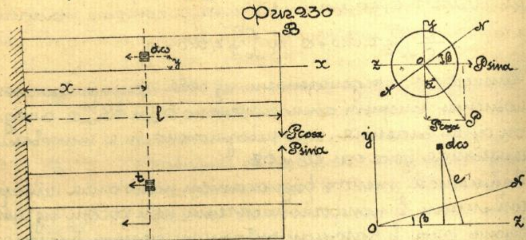
$$P\sin(l-x) + \int_0^\omega 1/\rho\, Eez\,d\omega = 0$$

Здѣсь второй член взят со знаком (+), потому что выраженіе для элементарных моментов дают положительное произведеніе, как это видно из горизонтальной проэкціи на фиг. 230. Разстояніе e – площади $d\omega$ от нейтральнаго слоя может быть выражено

[1] Включая сюда и напряженіе в сѣченіи MN, которыя при разсматриваніи части бруска надо трактовать как внѣшнія.

так: $e = y\cos\beta - z\sin\beta$, а потому подставляя вмѣсто e его значеніе через y и z, найдем [1]

Фиг. 230



$$P\cos\alpha(l-x) - \frac{E}{\varrho}\int_0^\omega (y\cos\beta - z\sin\beta)\,y\,d\omega = 0$$

и

$$P\sin(l-x) + \frac{E}{\varrho}\int_0^\omega (y\cos\beta - z\sin\beta)\,z\,d\omega = 0$$

или

$$P\cos\alpha(l-x) - \frac{E}{\varrho}\left\{\int_0^\omega y^2\cos\beta\,d\omega - \int_0^\omega zy\sin\beta\,d\omega\right\} = 0,$$

т. е.

$$P\cos\alpha(l-x) - \frac{E}{\varrho}\left\{\cos\beta\, J_z - \sin\beta\int_0^\omega zy\,d\omega\right\} = 0,$$

подобно этому же имѣем:

$$P\sin\alpha(l-x) + \frac{E}{\varrho}\left\{\cos\beta\int_0^\omega zy\,d\omega - \sin\beta\, J_y\right\} = 0,$$

но $\int_0^\omega zy\,d\omega = 0$, ибо ось OZ и OY главныя и потому находим:

$$P\cos(l-x) - \frac{E}{\varrho}\cos\beta\, J_z = 0 \text{ и}$$

$$P\sin(l-x) - \frac{E}{\varrho}\sin\beta\, J_y = 0$$

Раздѣлив почленно второе ур-іе на первое, находим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{J_y}{J_z}\operatorname{tg}\beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (47)$$

Выражая главныя моменты инерціи через полуоси эллипса инерціи H_z и H_y получим:

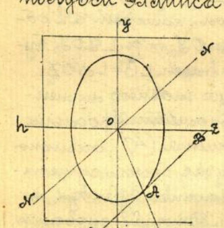
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H_z^2}{H_y^2}\operatorname{tg}\beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (48)$$

Выраженіе (47) показывает, что нейтральная линія и направленіе изгибающей силы (пл-сть дѣйствія)

[1] Если элемент $d\omega$ взять напр. во втором квадрантѣ, то знак момента надо брать (−), но при этом и величина e получит другое выраженіе.

представляет собою два сопряженных діаметра эллипса инерціи (Теорема Bresse)

На этом основаніи, построив эллипс инерціи даннаго сѣченія и, зная направленіе пл-сти дѣйствія, легко найти положеніе нейтральнаго слоя. Для прямоугольнаго сѣченія имѣем $J_z = \frac{ah^3}{12}$; $J_y = \frac{ha^3}{12}$, а потому полуоси эллипса будут:



Фиг. 231.

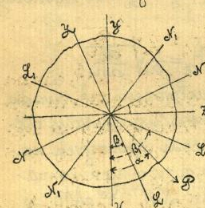
$$H_z = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{12}{ah}}\ ;\quad H_y = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{12}{ah}}.$$

Через точку пересѣченія A, слѣда пл-сти дѣйствія (на пл-сти чертежа) с эллипсом проводим касательную AB, а через центр тяжести O, линію NN $\|$-но AB (фиг. 231). NN будет искомая нейтральная линія. Если бы разложить дѣйствующую силу P на слагающія $\|$-ныя главным осям, то получился бы изгиб того же бруска двумя силами $P_y = P\cos\alpha$ и $P_z = P\sin\alpha$ совпадающими первая с пл-стью, содержащей главную ось OY вторая с пл-стью, содержащей главную ось OZ, каждая из них вызывает плоскій изгиб в своей пл-сти дѣйствія. Написав условіе $\Sigma M_x = 0$ и $\Sigma M_y = 0$ мы пришли бы к тому же результату. Это ясно à priori на основаніи независимости дѣйствія сил.

Т. к., вообще, главные моменты инерціи не равны, то и сопротивленіе бруска изгибу не одинаково по отношенію одной и другой главной оси.

Обычно сопротивляемость растет с увеличеніем момента инерціи, а потому изгиб относительно той оси, относительно которой момент инерціи имѣет наибольшее значеніе будет наиболѣе трудным. Пл-сть изгиба располагается (в случаѣ плоскаго изгиба) $\perp$-но той оси, относительно которой производится изгиб, а стало быть она (пл-сть) содержит в себѣ другую главную ось. Так. обр. для каждаго призматическаго бруска имѣется двѣ пл-сти изгиба, одна пл-сть легчайшаго изгиба, а другая ей ⊥ая — труднѣйшаго. Первая, очевидно, заключает главную ось, относительно которой момент достигает максимальной своей величины, а вторая наоборот.

В общем случаѣ, который только что разсматривался пл-сть изгиба [1] изображается очевидно (фиг. 232) слѣдом LL, ⊥ной к нейтральной линии NN. Угол, который LL образует с осью OY, т. е. $\angle LOY$, будет очевидно равен $\angle\beta = \angle NOZ$.



Фиг. 232

Пусть из двух главных моментов инерции момент J_y больше J_z. Из отношения (47), очевидно, для этого случая будет существовать неравенство $tg\beta < tg\alpha$, а слѣд. $\angle\beta < \angle\alpha$. Другими словами, пл-сть изгиба LL расположена между пл-стью дѣйствія и пл-стью легчайшаго изгиба OY. Полагая, наоборот, что $J_z > J_y$, найдем $tg\beta > tg\alpha$ и $\angle\beta > \angle\alpha$, пл-сть же изгиба L_1L_1 располагается между пл-стью дѣйствія силы P и пл-стью легчайшаго изгиба OZ.

Итак можно сказать: плоскость изгиба всегда уклоняется от пл-сти дѣйствія силы в сторону пл-сти легчайшаго изгиба.

В такой формѣ теорему Bresse формулировал St. Venant. Разсматривая изгиб слагающих P_y и P_z силы P, назовем радиусы кривизны соотвѣтствующих кривых в данном сѣченіи через ρ_y и ρ_z. Тогда можно написать

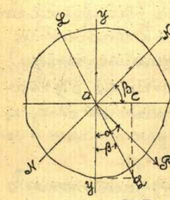
$$P(l-x)\cos\alpha = \frac{E.J_z}{\rho_y};\quad P(l-x)\sin\alpha = \frac{E J_y}{\rho_z}$$

Не трудно найти зависимость между ρ_y, ρ_z и ρ — радиусом кривизны упругой кривой, получающейся под дѣйствіем одной силы P. В самом дѣлѣ, назовем ординату Oa результирующей кривой в пл-сти изгиба (фиг. 233) LL через η, а проэкции этой ординаты ob и oc (на OY, OZ) через y и z. Т. к. абсциссы точек a, b

[1] т. е. пл-сть, содержащая в себѣ элемент кривой изгиба относящійся к данному сѣченію.

и c общія и равны x, то будем имѣть:

$$z = \eta\sin\beta \quad\text{и}\quad y = \eta\cos\beta \quad \ldots\ldots \quad (\kappa)$$



Фиг. 233.

Дифференцируя два ур-ія (κ) получим: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2\eta}{dx^2}\cos\beta$ и $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2\eta}{dx^2}\sin\beta$

Но $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \pm\frac{1}{\rho}$ точно также как:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{1}{\rho} \text{ и } \frac{d^2z}{dx^2} = \pm\frac{1}{\rho};$$

а потому

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}\cos\beta = \pm\frac{1}{\rho_y} \text{ и } \frac{d^2\eta}{dx^2}\sin\beta = \pm\frac{1}{\rho_z},$$

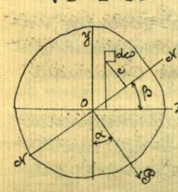
а слѣд. можно написать:

$$1/\rho_y = 1/\rho\cos\beta \text{ и } 1/\rho_z = 1/\rho\sin\beta$$

откуда слѣдует, что ρ_y и ρ_z суть проэкции радиуса кривизны на пл-сть Yox и Zox; другими словами, упругія кривыя, получаемыя при плоском изгибѣ силами P_y и P_z суть проэкции на пл-сти Yox и Zox упругой кривой, которая получается при косом изгибѣ силою P или, что тоже, при одновременном дѣйствіи ея слагающих P_y и P_z; поэтому если бы потребовалось найти стрѣлу прогиба при косом изгибѣ, отыскивают сначала стрѣлы прогиба от составляющих и если онѣ окажутся в одном поперечным сѣчении, результирующую стрѣлу получают, как геометрическую сумму составляющих (ея проэкций). Напр., для прямоугольнаго сѣченія $a \times h$ и одной сосредоточенной силѣ, дѣйствующей на концѣ бруска найдем:

$$f = \sqrt{\left[\frac{1}{3}\frac{P_y l^3}{E J_z}\right] + \left[\frac{1}{3}\frac{P_z l^3}{E J_y}\right]^2} = \frac{4Pl^3}{ahE}\sqrt{\left(\frac{\cos\alpha}{h^2}\right)^2 + \left(\frac{\sin\alpha}{a^2}\right)^2}$$

Внутренния силы.



Фиг. 234.

Для произвольнаго элемента $d\omega$, отстоящаго на разстоянии e от нейтральной линии NN (фиг. 234) нормальное напряженіе найдется как результирующее от дѣйствія сил $P_y = P\cos\alpha$ и $P_z = P\sin\alpha$. Называя момент инерции через J_y и J_z получим, что напряженіе k_y, вызванное силой P_y будет $= \frac{P_y(l-x)e}{J_z}$ и k_z от дѣйствія силы P_z будет равно $k_z = \frac{P_z(l-x)\overline{e}^z}{J_y}$. Не трудно видѣть, что k_y есть напряженіе растяженія, а k_z — сжатія, а потому результирующее напряженіе выразится как $k = k_y - k_z$. Для площадки, лежащей во II квадрантѣ оба напряженія будут растягивающими и, слѣд., здѣсь результирующее напряженіе $k = k_y + k_z$, в III квадрантѣ найдем $k = -k_y + k_z$ и в IV квадрантѣ $k = -k_y - k_z$ а вообще, слѣдовательно:

$$k = \pm(k_y \mp k_z),$$

если знак $(-)$ обозначает сжатіе, а $-(+)$ растяженіе.

Тот же результат может быть получен и на основаніи вышеизложеннаго разсужденія.

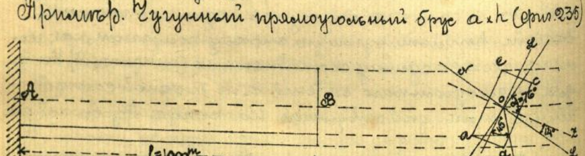
Дѣйствительно, для того же элемента $d\omega$ величина внутренней силы выразится, как $t = \frac{E e\, d\omega}{\rho}$, замѣняя e через y и z получим:

$$t = k\,d\omega = \frac{E\,d\omega}{\rho}(y\cos\beta - z\sin\beta) = d\omega\, E\left(\frac{\cos\beta}{\rho}y - \frac{\sin\beta}{\rho}z\right) = E\,d\omega\left(\frac{y-z}{\rho_y\,\rho_z}\right);$$

но $\frac{1}{\rho}Ey = k_y$ и $\frac{1}{\rho}Ez = k_z$ представляют собою внутреннее напряженіе на 1 кв. ед., вызываемое силами $P_y = P\cos\alpha$ и $P_z = P\sin\alpha$, а потому результирующее напряженіе

$$k = k_y - k_z$$

Примѣр. Чугунный прямоугольный брус $a \times h$ (фиг. 235)



фиг. 235.

длиною $l = 1000\,^m/_m$, нагружен силою $P = 2000$ klgr., направленіе которой с главной осью OY составляет угол $\alpha = 45°$. Допустимое напряженіе 2,5 klgr. Отношеніе $a : h = 0{,}5$. Найти размѣры a и h?

Найдем сначала угол β, образуемый нейтральным слоем с осью OZ. Из выраженія $tg\,\alpha = \frac{J_y}{J_z}tg\,\beta$, при $J_y = \frac{ha^3}{12}$ и $J_z = \frac{ah^3}{12}$ имѣем: $tg\,\alpha = \frac{J_y}{J_z}tg\,\beta = \frac{ha^3}{h^3a}tg\,\beta = \frac{a^2}{h^2}tg\,\beta = (0{,}5)^2\,tg\,\beta = 0{,}25\,tg\,\beta$, откуда $\angle\beta = 76°$.

Так. обр. угол $PON = 45° + 76° = 121° > 90°$. Наибольшій изги-

бающій момент будет для защемленнаго сѣченія $M = 2000 \cdot 1000 = 2000000$ klgr. m/m.

Напряженіе k_y, k_z опредѣляются из выраженія:

$$k_y = \frac{M_y}{W_y} \text{ и } k_z = \frac{M_z}{W_z}, \text{ но } W_y = \frac{ha^2}{6} = \frac{2a^3}{6} \text{ и } W_z = \frac{ah^2}{6} = \frac{4a^3}{6}$$

Слагающіе моменты:

$$M_y = P_y\,1000 = 2000\cos 45° \cdot 1000 = 1400000 \text{ klgr.}$$

$$M_z = P_z\,1000 = 2000\sin 45° \cdot 1000 = 1400000 \text{ klgr.}$$

а в таком случаѣ

$$k_y = \frac{1400000 \cdot 6}{2a^3} \text{ и } k_z = \frac{1400000 \cdot 6}{4a^3}$$

Полное внутреннее напряженіе, равное безопасному напряженію, будет:

$$k = 3 \text{ klgr.} = \frac{1400000 \cdot 6}{a^3}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right\}^{1)} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 1400000}{4a^3} \text{ откуда}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 1400000}{4}} = 128\,^m/_m;\quad h = 2a = 256\,^m/_m$$

В этом примѣрѣ видим подтвержденіе того, что пл-сть изгиба располагается ближе к пл-сти легчайшаго прогиба (OZ), ибо угол $LOZ = 90° - 76° = 14°$.

Что касается касательных напряженій, то они найдутся для разсматриваемаго выше случая косого изгиба весьма просто. Для произвольнаго элемента $d\omega$ с коорд-ами y и z (отнесенным к главным осям сѣченія) найдем, что касательное напряженіе, вызываемое в этом элементѣ силою P_y будет: $k'_s = \frac{P_y\int_y^e y\,d\omega}{u_1 J_z}$ и от силы P_z — $k_z = \frac{P_z\int_z^{e_2} z\,d\omega}{u_2 J_y}$, гдѣ e_1 и e_2, u_1 и u_2 суть разстоянія крайних волокон и размѣры $\|^{ые}$ нейтральным слоям соотвѣтственно для осей OY и OZ. Результирующее напряженіе в каждом данном элементѣ найдется как геометрическая сумма. На элементѣ прилежащем к осевой линіи для бруска с прямоугольным сѣченіем $\omega = ah$ будем имѣть:

$$k_s = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{P}{ah}$$

В тѣх случаях когда на балку дѣйствуют одновременно нѣсколько не лежащих в одной плоскости, то общее рѣшеніе задачи остается тѣм же, а именно, всѣ силы раскладываются на слагающія по направленію

1) Берем знак (+), ибо сопротивленіе чугуна растяженію слабѣе, нежели сжатію.

главных осей, и дѣло сводится к плоскому изгибу.

Сдвиг и крученіе.

Цилиндрическій брусок, закрѣпленный одним концом в стѣну, скалывается в сѣченіи MN (фиг. 236) силами

фиг. 236

$-P_1, P_1$ и скручивается парой (P, P), дѣйствующей в пл-сти конечнаго сѣченія. Деформація при крученіи сводится к деформаціи сдвига и для круглаго бруска постоянна, а потому и напряженіе, вслѣдствіе крученія, k_s' для одного и того же радіуса (разстоянія от оси) постоянно по длинѣ бруска и достигает наибольшаго значенія в наружных волокнах.

В сѣченіи MN к этому напряженію добавляется еще напряженіе k_s'' от сдвига силами $P_1, -P_1$. Предполагая, что это послѣднее распредѣлено в сѣченіи равномѣрно, не трудно найти наибольшее напряженіе, возбуждаемое в брускѣ данной системой сил. Напряженіе k_s', вызываемое парой (P, P) направлено по касательной к окружности; напряженіе от сдвига силы P, направлено вертикально. В какой либо точкѣ D сѣченія, равнодѣйствующая по величинѣ и направленію будет равна діагонали параллелограмма, построеннаго на напряженіях k_s', k_s'', как на сторонах, т. е.

$$k_s = \sqrt{k_s'^2 + k_s''^2 - 2k_s' k_s'' \cos\alpha} \quad \ldots \ldots \quad (49)$$

гдѣ

$$k_s' = \frac{M_k d}{2J_0} \quad \text{и} \quad k_s'' = \frac{P}{\omega}$$

Изслѣдуя выраженіе (49) заключаем, что наибольшее напряженіе матеріала будет в точкѣ A и направлено $\|^{\text{но}}$ оси $Y^{\text{ов}}$, т. к. при $\alpha = 180°$, $\cos\alpha = -1$ и тогда

выраженіе (49) обращается в:

$$k_s = \sqrt{k_s'^2 + k_s''^2 + 2k_s' k_s''} = k_s' + k_s'' \quad \text{или} \quad k_s = \frac{P_1}{\omega} + \frac{Md}{2J_0}$$

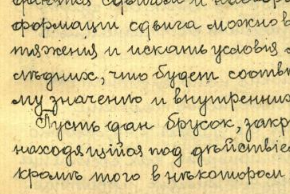
Наименьшее напряженіе матеріала возбуждается в точкѣ A_1 при $\alpha = 0$

$$k_s = \frac{P_1}{\omega} - \frac{Md}{2J_0}$$

Растяженіе и сдвиг (формула St. Venant)

В случаѣ одновременнаго дѣйствія растягивающих (сжимающих) и скалывающих усилій в частицах матеріала возбуждаются внутреннія силы, как нормальныя, так и касательныя. Выше было указано, что между деформаціями растяженія (сжатія) и сдвига, существует взаимная связь и фактически она выражается тѣм, что явленія растяженія сопровождаются сдвигом и наоборот. На этом основаніи деформаціи сдвига можно выразить в деформаціях растяженія и искать условія максимальнаго проявленія послѣдних, что будет соотвѣтствовать максимальному значенію и внутренних напряженій.

Пусть дан брусок, закрѣпленный одним концом и находящійся под дѣйствіем растягивающей силы P, кромѣ того в нѣкотором сѣченіи MN (фиг. 237) приложены срѣзывающія силы P_1, P_1. Из чертежа видно, что в частях бруска 1) от A до MN и 2) от MN до B волокна только растягиваются, в сѣченіи же MN онѣ еще претерпѣвают

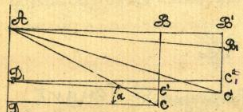


фиг. 237.

сдвиг. Разсѣчем плоскостью RS, составляющей с осью нѣкоторый угол α. Не трудно видѣть, что результирующее относительное удлиненіе элемента, лежащаго в этой плоскости будет ф-ція угла α:

$$i = f(\alpha)$$

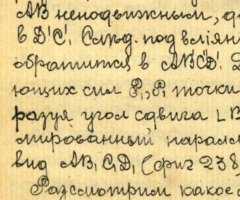
т. к. с измѣненіем положенія пл-сти RS, измѣняется и значеніе для i. Найдя эту функціональную зависимость, можно опредѣлить и то сѣченіе RS, для котораго деформацiя i, а слѣд. и напряженiе будут максимальны. Для этого вырѣжем из данного бруска безконечно малый параллелипед $ABCD$ (фиг.238) и вынесем его в сторону. Под влiянiем дѣйствующих внѣшних сил P_1, P_1 и P параллелипед деформируется. Вслѣдствiе растяженiя силой P, сѣченiе BC перемѣстится в $B'C''$, но благодаря поперечному сжатiю,



Фиг.238

размѣр $BC = AD$ уменьшится. Предполагая волокно AB неподвижным, допустим, что DC перемѣстится в $D'C'$. Слѣд. под влiянiем растяженiя прямоугольник обратится в $AB'C'D'$. Далѣе, под дѣйствiем скалывающих сил P_1, P_1 точки B' и C'' перемѣстятся в B_1, C_1, образуя угол сдвига $\angle B'AB_1 = \angle C_1D'C'' = g$. Так. обр. деформированный параллелипед примет окончательный вид $AB_1C_1D_1$ (фиг 238).

Разсмотрим какое либо волокно, напр., дiагонал AC. Послѣ деформацiи она получила новое положенiе и длину AC_1. Перемѣщенiе точки C в C_1 (фиг. 239) можно разсматривать, как состоящее из трех слагаемых перемѣщенiй: $C'C''$ вслѣдствiе продольного удлиненiя и $C''C$ — как результат сдвига. Если дiагональ AC с перемѣщенiем ея точки C вынесем отдѣльно, то увидим, что деформированная длина будет



Фиг.239

дiагональ AC_1, замыкающей стороной фигуры $ACC'C''C_1$. По свойству замкнутых фигур, проэкцiя одной стороны на какое либо направленiе равна суммѣ проэкцiй всѣх других сторон на тоже направленiе. Спроектируем всѣ стороны фиг. $ACC'C''C_1$ на сторону AC_1, но замѣтим при этом слѣдующее: т.к. все явленiе разсматривается в предѣлах упругости, то очевидно $\angle CAC_1$ будет очень мал и можно принять с нѣкоторой погрѣшностью, что сторона AC проектиру-

ется на AC_1 в натуральную величину. Тогда получим:

$$\overline{AC_1} = \overline{AC} - \overline{CC'}\sin\alpha + \overline{C'C''}\cos\alpha + \overline{C''C_1}\sin\alpha$$

или

$$\overline{AC_1} - \overline{AC} = \overline{CC'}\sin\alpha + \overline{C'C''}\cos\alpha + \overline{C''C_1}\sin\alpha.$$

откуда относительное удлиненiе дiагонали AC:

$$i = \frac{\overline{AC_1}-\overline{AC}}{\overline{AC}} = -\frac{\overline{CC'}\sin\alpha}{\overline{AC}} + \frac{\overline{C'C''}\cos\alpha}{\overline{AC}} + \frac{\overline{C''C_1}\sin\alpha}{\overline{AC}} \quad \ldots (a)$$

но $\overline{BC} = \overline{AC}\sin\alpha$ и $\overline{AB} = \overline{AC}\cos\alpha$ (фиг. 238), опредѣляя отсюда $\overline{AC}$ и подставляя $\overline{AC} = \frac{\overline{BC}}{\sin\alpha}$ в первый член и $\overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{\cos\alpha}$ в остальные два члена второй части ур-iя (a), найдем:

$$i = -\frac{\overline{CC_1}}{\overline{BC}}\sin^2\alpha + \frac{\overline{C'C''}}{\overline{AB}}\cos^2\alpha + \frac{\overline{C''C_1}}{\overline{AB}}\cos\alpha\sin\alpha$$

В этом ур-iи $\frac{\overline{CC'}}{\overline{CB}}$ есть относительное поперечное сжатiе, которое, как извѣстно, выражается через относительное удлиненiе в зависимости от коэфф-та Poissona, т.е. $\frac{\overline{CC'}}{\overline{CB}} = mi$ (здѣсь i — относительное удлиненiе стороны AB или что тоже, стороны CD) и $\frac{\overline{C'C''}}{\overline{AB}} = i_1$, относительное продольное удлиненiе стороны AB, $\frac{\overline{C''C_1}}{\overline{AB}} = g$ — угол сдвига.

В таком случаѣ:

$$i_1 = mi\sin^2\alpha + i\cos^2\alpha + g\sin\alpha\cos\alpha, \text{ но}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos2\alpha}{2}} \text{ и } \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos2\alpha}{2}}$$

поэтому

$$i_1 = -mi\left(\frac{1-\cos2\alpha}{2}\right) + i\left(\frac{1+\cos2\alpha}{2}\right) + \frac{g}{2}\sin2\alpha = i\left(\frac{1-m}{2}\right) + i\cos2\alpha\left(\frac{1+m}{2}\right) + \frac{g}{2}\sin2\alpha$$

Если положим $i\left(\frac{1-m}{2}\right) = A$; $i\left(\frac{1+m}{2}\right) = B$ и $\frac{g}{2} = C$, то

$$i = A + B\cos2\alpha + C\sin2\alpha \quad \ldots\ldots (b)$$

Это ур-iе дает искомую функцiональную зависимость результирующей деформацiи от угла α. Чтобы опредѣлить максимальное значенiе для относительного удлиненiя i_1, дифференцируем ур-iе (b) по α, находим:

$$-2B\sin2\alpha + 2C\cos2\alpha = 0 \text{ или } \frac{2}{\cos2\alpha}(C - B\,tg\,2\alpha) = 0,$$

но это выраженiе может быть справедливо или при $\frac{2}{\cos2\alpha} = 0$ или при

$$C - B\,tg\,2\alpha = 0 \quad \ldots\ldots (c)$$

но $\frac{2}{\cos2\alpha}$ не может обратиться в нуль, ибо $\cos2\alpha$ измѣняется лишь от -1 до $+1$. Поэтому необходимо допустить, определить значение α из условия (c), которое дает:

$$tg\,2\alpha = C/B$$

Т. к. вторая производная отрицательна, то угол, определяемый последним отношением соответствует наибольшему значению для результирующей деформации. Последнее выражение и определяет значение $\angle\alpha$, слѣд., положение площадки, при котором получается наибольшее значение результирующей деформации i,

$$i_{max} = A + \frac{B}{\sqrt{1+\left(\frac{C}{B}\right)^2}} + \frac{C\frac{C}{B}}{\sqrt{1+\left(\frac{C}{B}\right)^2}} = A + \sqrt{B^2+C^2}$$

Подставляя значение коэфф-ов A, B и C и принимая во вниманіе, что коэфф-ент Poisson'а для большинства металлов может быть принят равным $1/4$, найдем:

$$i_{max} = i\left(\frac{1-m}{2}\right) + \sqrt{i^2\left(\frac{1+m}{2}\right)^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots (50)$$

и для $m = 1/4$

$$i_{max} = \frac{3}{8}i + \sqrt{\left(\frac{5}{8}i\right)^2 + (g/2)^2} \quad \ldots\ldots\ldots (51)$$

Ур-іе (50) выражает собою извѣстную формулу st.-Venant, разрѣшающую большинство вопросов на сложное сопротивленіе. Умножив все ур-іе (51) на E и принимая, что при $m = 1/4$, $G = 2/5\,E$ найдем:

$$K_{max} = \frac{3}{8}K_z + \sqrt{\left(\frac{5}{8}K_z\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}g\,G\right)^2}$$

$$E\,i_{max} = K_{max} = \frac{3}{8}K_z + \sqrt{\left(\frac{5}{8}K_z\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\cdot 2g\,G\right)^2}$$

$$K_{max} = \frac{3}{8}K_z + \frac{5}{8}\sqrt{K_z^2 + 4K_s^2} \quad \ldots\ldots (52)$$

А т. к. $K_z = \frac{P}{\omega}$ – напряженіе от растяженія, $K_s = \frac{P_1}{\omega}$ напряженіе от скалыванія, то:

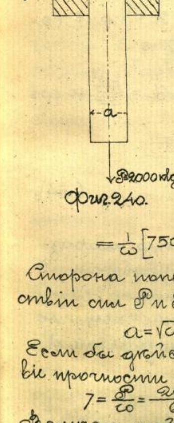
$$K_{max} = \frac{3}{8}\cdot\frac{P}{\omega} + \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{P}{\omega}\right)^2 + 4\left(\frac{P_1}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{3}{8}P + \frac{5}{8}\sqrt{P^2+4P_1^2}\right) \ldots (53)$$

Выраженіе в скобках заключает в себѣ величины дѣйствующих сил P и P_1 и, слѣд., представляет собою также нѣкоторую силу Q. Другими словами, система сил: растягивающей P и скалывающей P_1 могут быть замѣнены одной растягивающей Q, величина которой получается сложеніем по формулѣ

st. Venant.

Если бы на брусок дѣйствовали одновременно нѣсколько растягивающих сил, то результирующая получится подобным же образом с тою лишь разницею, что вмѣсто силы P в формулу войдет равнодѣйствующая растягивающих сил.

Примѣр. Для иллюстраціи сказаннаго возьмем слѣдующій примѣр. Брус квадратнаго сѣченія, закрѣпленный в верхнем концѣ, растягивается силой $P = 2000$ klgr. Около мѣста закрѣпленія на брусок надѣто кольцо (фиг. 240), к которому приложена сила $P_1 = 1000$ klgr. Очевидно, данный брусок в сѣченіи A срѣзывается этой послѣдней силой. Опредѣлить какое поперечное сѣченіе должен имѣть брусок при совмѣстном дѣйствіи сил P и P_1 и в том случаѣ когда эти силы дѣйствуют порознь. Безопасное напряженіе матеріала $K_z = 7$ klgr. и $K_s = 4$ klg. Подставляя в выраженіе (53) числовыя значенія, найдем:



Фиг. 240.

$$7 = \frac{1}{\omega}\left[\frac{3}{8}2000 + 5/8\sqrt{2000^2+4\cdot1000^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\omega}\left[750 + 5/8\cdot2828\right] = \frac{2517.5}{\omega}$$

Сторона поперечнаго сѣченія при совмѣстном дѣйствіи сил P и P_1 опредѣлится из:

$$a = \sqrt{\omega} = \sqrt{\frac{2517.5}{7}} = 18{,}9\ ^m/_m$$

Если бы дѣйствовала только одна сила P, то условіе прочности будет:

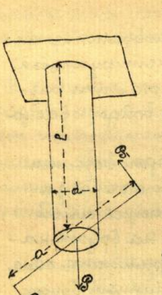
$$7 = \frac{P}{\omega} = \frac{2000}{a_1^2}, \text{ откуда } a_1 = \sqrt{\frac{2000}{7}} = 16{,}9\ ^m/_m$$

В случаѣ дѣйствія только одной силы P_1, ур-іе прочности

$$4 = \frac{P_1}{\omega} = \frac{1000}{a_2^2}, \text{ откуда } a_2 = \sqrt{\frac{1000}{4}} = 15{,}8\ ^m/_m$$

Растяженіе и крученіе.

Цилиндрическій брусок растягивается силой P и скручивается парой (P_1, P_1) (фиг. 241). Собственно говоря, этот примѣр является частным видом только что разобраннаго случая сдвига и растяженія. В самом дѣлѣ, деформація и напряженіе в случаѣ крученія, сводится к деформаціи и напряженію сдвига. Отличіе заключается лишь в том, что напряженіе сдвига при крученіи не распредѣляется равномѣрно. Т. к. необходимо опредѣлить наибольшее напряженіе, то разсматривать слѣдует волокна, лежащія на поверхности цилиндра. Принимая во вниманіе, что внутреннее напряженіе при крученіи выражается формулой $k_s = \frac{M_d}{2J_0}$, а при растяженіи зависимостью $k_z = \frac{P}{\omega}$, то подставляя эти значенія в формулу St. Venant, находим:



Фиг. 241.

$$k_z = \frac{3}{8}\frac{P}{\omega} + \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{P}{\omega}\right)^2 + 4\left(\frac{M_d}{2J_0}\right)^2},$$

но $M = Pa$, а полярный момент круга $J_0 = \frac{\pi d^4}{32}$ и $\omega = \frac{\pi d^2}{4}$, поэтому:

$$k_z = \frac{3}{8}\cdot\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{P}{\pi d^2/4}\right)^2 + 4\left(\frac{Pa\,b}{\pi d^3/4}\right)^2} =$$

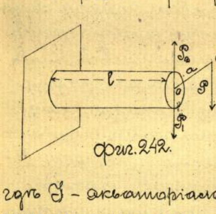
$$= \frac{4}{\pi d^2}\left[\frac{3}{8}P + \frac{5}{8}\sqrt{P^2 + \frac{64 P^2 a^2}{d^2}}\right] \quad \ldots\ldots (54)$$

Из этой формулы діаметр опредѣляется или разрѣшеніем ур-ія (54) относительно d или подбором. В подобном случаѣ, задавшись приблизительно величиной для d, подставляют в ур-іе (54). Если равенство лѣвой и правой частей не получится, то значеніе d увеличивают или уменьшают.

Крученіе и изгиб.

На практикѣ наиболѣе часто встрѣчается этот вид совмѣстнаго приложенія сил. В таком положеніи находятся всѣ коренные и трансмиссіонные валы и вообще части, передающія нѣкоторый крутящій момент. Для изслѣдованія возьмем наиболѣе простой случай: к бруску круглаго сѣченія с діаметром d, закрѣпленному одним концом в пл-сти поперечнаго

сѣченія на разстояніи $a = \overline{OC}$ от оси приложена сила P (фиг. 242) лежащая в пл-сти конечнаго сѣченія. Приложим в центрѣ O в пл-сти того двѣ силы P_1, P_2, равныя и $\parallel$ыя силѣ P и взаимно противоположныя. Брусок подвергается, слѣд., скручиванію парой сил Pa и изгибу силой P. Напряженіе, возбуждаемое в матеріалѣ при крученіи бруса $(P_2 P)$ будет:



Фиг. 242.

$$k_s = \frac{M_k d}{2J_0} = \frac{P a . d}{2J_0}$$

гдѣ $M_k = Pa$ и J_0 полярный момент инерціи $J_0 = \frac{\pi d^4}{32}$. Напряженіе матеріала от изгибающей силы P_1:

$$k_z = \frac{M_u d}{2J} = \frac{P l . d}{2J}$$

гдѣ J — экваторіальный момент инерціи, ибо опасное сѣченіе совпадает с мѣстом закрѣпленія. Результирующее напряженіе опредѣлится из формулы St-Venant. Подставляя в нее значеніе напряженій k_s и k_z получаем:

$$k = \frac{3}{8}\cdot\frac{M_u d}{2J} + \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{M_u d}{2J}\right)^2 + 4\left(\frac{M_k d}{4J}\right)^2} = \frac{3}{8}\cdot\frac{M_u d}{2J} + \frac{5}{8}\cdot\frac{d}{2J}\sqrt{M_u^2 + M_k^2}$$

если положить $J = \frac{\pi d^4}{64}$, то послѣднее выраженіе принимает вид:

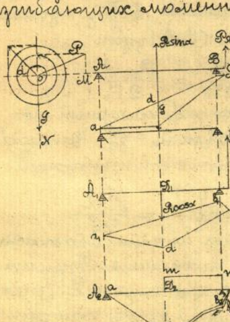
$$k = \frac{32}{\pi d^3}\left[\frac{3}{8}M_u + \frac{5}{8}\sqrt{M_u^2 + M_k^2}\right],$$

а т. к. $\frac{\pi}{32} = \frac{3{,}14}{32} \cong 0{,}1$, то послѣднее можно выразить в болѣе простом видѣ:

$$0{,}1\,d^3 k = \frac{3}{8}M_u + \frac{5}{8}\sqrt{M_u^2 + M_k^2} \quad \ldots\ldots (55)$$

В этой формулѣ в правую часть входят только одни моменты, поэтому ее можно разсматривать, как один сложный изгибающій момент, т. е. положить $0{,}1\,d^3 k = M_r$, гдѣ M_r представит результирующій момент от составных — изгибающаго Pl и крутящаго Pa. Выраженіе $M_r = \frac{3}{8}M_u + \frac{5}{8}\sqrt{M_u^2 + M_k^2}$ обнимает собою и частные случаи, когда дѣйствует какой либо момент M_u или M_k. Полагая $M_k = 0$, т. е. при отсутствіи крученія, имѣем $M_r = M_u$. Полагая $M_u = 0$, находим $M_r = \frac{5}{8}M_k$, отсюда $W k_z = \frac{5}{8} W k_s$ или имѣем $k_s = \frac{4}{5}k_z$, что обыкновенно и принимают.

Пусть на вал AB дѣйствует G — вѣс махового колеса, R_1 — результирующая напряженій ремня и P —, перенесенная на ось вала, сила вдоль шатуна паровой машины. Разлагая эти силы (фиг. 243) на двѣ взаимно $\perp$-ыя пл-сти OM и ON, строим кривыя изгибающих моментов $adcbd$, и $a_1d_1b_1c_1d_1$; сложив ординаты геометрическим способом, найдем результирующую кривую изгибающих моментов $A_2d_2b_2C_2$. Прибавляя сюда крутящіе моменты, которые распредѣляются равномѣрно между средними пл-стями B — кривошипа и D — махового колеса, получим результирующую кривую, сложенных изгибающих моментов $A_2d_2d_3b_3C_2$

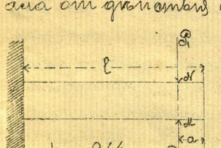


Фиг. 243.

Изгиб и сдвиг.

Брус, закрѣпленный одним концом, изгибаемая силой P и скалывается в сѣченіи MN силами P_1, P_1.

Напряженіе, возбуждаемое в матеріалѣ изгибающей силой P_1 будет $K_z = \frac{M_u}{W}$, а напряженіе матеріала от дѣйствія скалывающих сил P_1, P_1 (фиг. 244) в сѣченіи MN, $K_s = \frac{P_1}{\omega}$. Результирующее напряженіе опредѣлится, очевидно, по общей формулѣ сложнаго сопротивленія (St.-Venant) т. е.

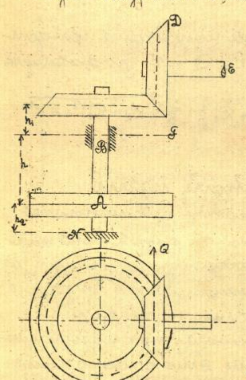


Фиг. 244.

$$K_{max} = \frac{3}{3}\frac{Pa}{W} + \frac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{Pa}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{P_1}{\omega}\right)^2}$$

Во всѣх разсмотрѣнных случаях на брусок дѣйствовали только двѣ силы; на практикѣ часто встрѣчаются случаи, что брусок подвержен дѣйствію 3-х, 4-х и большаго числа сил. Разсмотрим для примѣра, какія напряженія испытывает верти-

кальный вал турбины. На ось B внизу надѣто рабочее колесо A турбины, а вверху зубчатое колесо C (фиг. 245), которое и передает работу, развиваемую турбиной, главному валу; так. обр. вал B передает вращательное движеніе от турбины A колесу C и поэтому будет скручиваться. Если турбина развивает работу в N лош. сил и дѣлает n оборотов в мин., то момент скручивающій вал будет:



Фиг. 245.

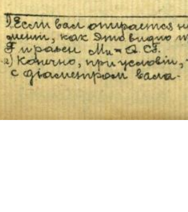
$$M_k = \frac{716200N}{n} \text{ klgr. } m/m.$$

а соотвѣтственное напряженіе матеріала

$$K_s = \frac{M_k d}{2J_0},$$

гдѣ d — діаметр вала. На зубцы колеса C (фиг. 246) дѣйствует давленіе Q со стороны колеса D. Приложим в центрѣ колеса C двѣ силы равныя силѣ Q ($Q_1 = Q_2 = Q$) и взаимно противоположныя. Тогда получается пара (Q_2, Q) с моментом $M_k = QR$ и сила Q_1 изгибающая вал и вызывающая в нем напряженіе

$$K'_z = \frac{M_k d}{2J} \text{ [1]}$$



Фиг. 246.

Если вѣс верхняго G колеса C значителен, то он вызовет в валу сжимающее напряженіе:

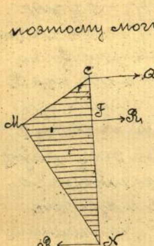
$$K''_z = \frac{G}{\omega} \text{ [2]}$$

Так. обр. вал испытывает три напряженія K_s, K'_z и K''_z; не трудно видѣть, что два послѣднія напряженія K'_z и K''_z направлены по оси вала,

[1] Если вал опирается на подшипник N и подшипник F, то наибольшій момент, как это видно из графическаго изображенія (фиг. 247) будет в точкѣ F и равен $M_u = Q \cdot CF$.

[2] Конечно, при условіи, что высота $h + h_2$ не особенно велика сравнительно с діаметром вала.

поэтому могут быть сложены алгебраически в одно, а в таком случаѣ вал подвергается только двум напряженіям:
1) $k_z' + k_z''$ и 2) k_3


Фиг. 247

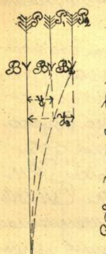
Результирующее напряженіе найдется сложеніем k_z', k_z'' и k_3 по формулѣ St-Venant

$$k = \frac{3}{8}\left\{k_z' + k_z''\right\} + \frac{5}{8}\sqrt{(k_z' + k_z'')^2 + 4k_3^2}$$

Продольный изгиб.

В статьѣ о сжатіи упоминалось, что если сжимаемый центральной силой брус имѣет длину значительно превосходящую поперечный размѣр, то первоначально прямолинейная ось бруска, с возрастаніем дѣйствующей силы, начинает искривляться, получается деформація, так называемаго продольнаго изгиба. Явленіе это с чисто теоретической точки зрѣнія совершенно невозможное. В самом дѣлѣ, положив, что матеріал бруса совершенно однороден и допуская, что сила по направленію точно совпадает с осью бруска, необходимо должно получится явленіе чистаго сжатія. Длина (высота) бруска не играет никакой роли; фактически же дѣло обстоит иначе. Если бы даже удалось получить матеріал идеально однородным, невозможно достигнуть вполнѣ точнаго приложенія силы, тѣм болѣе, что она прилагается не в точкѣ, а по нѣкоторой поверхности. Существованіе эксцентриситета, хотя бы и ничтожнаго, является таким образом, необходимым. Прямолинейная форма бруска сохраняется лишь при незначительных силах. При нѣкоторой величинѣ P_1 внѣшней нагрузки различной, конечно, в зависимости от матеріала и размѣров бруса, брусок изгибается, занимает положеніе AB_1 (фиг. 248) при котором кромѣ сжатія испытывает напряженіе изгиба с моментом $P_1 y$. В таком положеніи наблюдается

устойчивое равновѣсіе, которое выражается в том, что если вывести точку B из ея положенія (боковым толчком), то брус послѣ ряда колебаній возвратится в положеніе B_1. По прекращеніи дѣйствія нагрузки, брус возвращается в прямолинейное положеніе AB. С возрастаніем нагрузки P_1, напр., до P_2, увеличивается крайняя стрѣла прогиба y_2 и внутренніе силы уравновѣшивают кромѣ сжимающей нагрузки P_1 еще пару $P_2 y_2$. Такое возрастаніе груза P[1)] возможно лишь до нѣкотораго предѣла P_0. Эта сила вызывает стрѣлу y_0 и внутреннія силы могут уравновѣшивать сжатіе силой P и изгиб парой $P_0 y_0$, причем по прекращеніи дѣйствія нагрузки P_0 брусок выпрямится. Но дальнѣйшее возрастаніе силы P_0 явится уже опасным в том смыслѣ, что по прекращеніи ея дѣйствія, стрѣла прогиба не исчезает вполнѣ. При сравнительно небольшой прибавкѣ к грузу P_0, брусок изгибается по AB и не может выпрямится вовсе. Силу P_0 называют обыкновенно предѣльной или критической нагрузкой для даннаго бруска. Выраженіе для величины ея в зависимости от матеріала и размѣров бруска были даны L. Euler'ом, почему нѣкоторые называют эту силу Эйлеровой силой.


Фиг. 248.

Прежде чѣм приступить к дальнѣйшему изученію явленія продольнаго изгиба необходимо указать, как может быть закрѣплен брус и какую форму при этом принимает его ось.

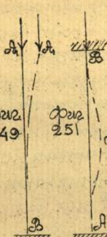
1.) Брус закрѣплен нижним концом, а верхній нагружен силой P (фиг. 249). Ось бруска изогнется по кривой BCA.

2). Оба конца бруса закрѣплены таким образом, что могут вращаться около точек A и B. При этом точки эти могут перемѣщаться лишь по оси бруска ACB (фиг. 250)

1) При условіи, что прогиб будет упругим.

3) Оба конца защемлены. Ось изогнется по кривой ACB (фиг. 251)

4) Нижний конец защемлён, а верхний может вращаться около точки A, причем перемѣщение послѣдняго допустимо только по оси AB. Ось бруска изогнется как указано на фиг. 252.



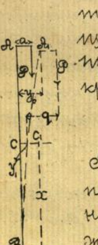
фиг. 249 фиг. 251

Уравнение изгиба для I-го и II-го случаев закрѣпления. Стрѣла прогиба.

Т. к. практически нельзя приложить силу абсолютно центрально, то для изученія интересующаго нас вопроса, положим, что сила приложена эксцентрично на плечѣ a. Брус закрѣплен одним концом, а другой свободен (фиг. 253). Под дѣйствіем момента $Pa = M$ ось бруска изогнется по кривой A_1C_1B.

фиг. 250 фиг. 252

Так. обр. стрѣла прогиба точки A выразится отрѣзком $AA_1 = y_0$. Возьмем на разстояніи x от мѣста закрѣпленія сѣченія CC_1. Стрѣлой прогиба точки C будет ордината $CC_1 = y_1$. Изгибающій момент для этого сѣченія опредѣлится произведеніем: $M_x = Pq = P(y_0 + a - y)$, а ур-іе кривой изгиба будет:



фиг. 253.

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = P(y_0 + a - y) \quad \dots \quad (a)$$

В этом ур-іи кромѣ второй производной перемѣнной y, входит и сама перемѣнная поэтому, чтобы упростить это выраженіе, введем новую перемѣнную, а именно положим:

$$(y_0 + a - y) = z \text{ и кромѣ того } \frac{P}{EJ} = b^2. \quad (b)$$

Дифференцируя z по x, находим: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d^2z}{dx^2}$, выраженіе (a) обращается в: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{EJ}(y_0 + a - y) = \frac{d^2z}{dx^2} = b^2 z$

Общій интеграл ур-ія $\frac{d^2z}{dx^2} + b^2 z = 0$ получится так:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dx} \text{ откуда}$$

$$d\left(\frac{dz}{dx}\right) = -b^2 z\,dx,$$

или умножая обѣ части на $\frac{dz}{dx}$ получим:

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{2C - \int 2b^2 z\,dz} = \sqrt{2C - b^2 z^2}$$

опредѣляя x находим:

$$x = \int\frac{dz}{\sqrt{2C - b^2 z^2}} + C = \int\frac{dz}{b\sqrt{2\frac{C}{b^2} - z^2}} + C' =$$

$$= \frac{1}{b}\arcsin\frac{2zC}{b^2} + C' \text{ или}$$

$$bx - bC' = \arcsin\frac{2zC}{b^2}, \text{ откуда}$$

$$z = \frac{b^2}{2C}\sin(bx - bC') = C_1 \sin bx + C_2 \cos bx$$

или примем $-z = y - y_0 - a = C_1' \sin bx + C_2' \cos bx \quad \dots \quad (c)$

гдѣ C_1' и C_2' произвольныя постоянныя.

Для опредѣленія C_1' и C_2' воспользуемся тѣм, что в мѣстѣ закрѣпленія B прогиба не имѣется и угол наклона касательной к оси x-ов равен нулю т. е. при $x = 0$, $y = 0$ и $y' = 0$. В таком случаѣ для сѣченія B из ур-ія (c) имѣем:

$$C_2' = -(y_0 + a)$$

Первая произвольная постоянная опредѣляется, если взять первую производную y по x и приравнять ее нулю, т. е.

$$\frac{dy}{dx} = bC_1'\cos(bx) - bC_2'\sin(bx)$$

для точки B, $y = 0$, при $x = 0$, поэтому из послѣдняго ур-ія имѣем $C_1' = 0$.

Итак кривая изгиба принимает вид:

$$y - (y_0 + a) = -(a + y_0)\cos(bx) \text{ или}$$

$$y = (y_0 + a)\{1 - \cos(bx)\} \quad \dots \quad (d)$$

Не трудно видѣть, что наибольшая стрѣла прогиба будет в точкѣ A, т. е. при $x = l$ и опредѣлится из ур-ія: $y_0 = (a + y_0)\{1 - \cos(bl)\}$ откуда $y_0 = a\left\{\frac{1 - \cos(bl)}{\cos(bl)}\right\} = a\left\{\frac{1}{\cos(bl)} - 1\right\}$,

или подставляя значеніе параметров, находим:

$$y_0 = a\left\{\frac{1}{\cos\left[l\sqrt{\frac{P}{EJ}}\right]} - 1\right\} \quad (e)$$

Если $a=0$, то как видно из послѣдняго выраженія и $y=0$, т.е. прогиба нѣт и получаем, теоретически, лишь случай простого сжатія. Предположив, что a будет как угодно мало, но, во всяком случаѣ, больше нуля, можно из ур-ія (e) опредѣлить величину критической силы. В самом дѣлѣ, с возрастаніем силы P, член $\cos\left(l\sqrt{P/EJ}\right)$ уменьшается, т.е. величина деформаціи (стрѣла прогиба) возрастает и, очевидно, когда $\cos$ обращается в нуль, т.е. когда $l\sqrt{P/EJ}=\pi/2$, y_0 обращается в ∞. Хотя практически величина y_0 не может обратиться в ∞, но для нас такое рѣшеніе имѣет совершенно опредѣленное значеніе, ибо оно указывает, что при величинѣ силы $P_1=P_0$, обращающей выраженіе $l\sqrt{P/EJ}$ в $\pi/2$, устойчивое равновѣсіе невозможно. Слѣд., сила P_0, опредѣляемая из равенства:

$$l\sqrt{\frac{P}{EJ}}=\frac{\pi}{2} \quad \ldots \ldots \quad (f)$$

является предѣльной или критической (т.е. наименьшая производящая разрушеніе. Разрѣшая выраженіе (f) относительно P_0, находим:

$$P_0=\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{EJ}{l^2} \quad \ldots \ldots \quad (56)$$

Возьмем примѣр. Круглый желѣзный стержень діаметра $10^m/_m$, $l=1000^m/_m$, $E=20000$ klgr. Из формулы

$$y_0=a\left\{\frac{1}{\cos l\sqrt{P/EJ}}-1\right\} \text{ имѣем:}$$

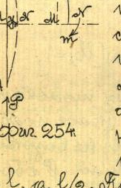
при $P=5$ klgr	$y_0=3{,}2a^m/_m$	при $P=20$ klgr.	$y_0=55{,}4a^m/_m$
" $=10$ "	$y_0=8{,}5a$ "	" $=22{,}5$ "	$y_0=131{,}6a$ "
" $=15$ "	$y_0=19{,}5a$ "	" $=25$ "	$y_0=\infty$

Прогиб бруска возрастает гораздо быстрѣе нежели сжимающія силы. Напряженіе от сжатія получается сравнительно малое, так при величинѣ P равной критической, оно будет $k=\frac{P}{\omega}=\frac{25}{78{,}54}=0{,}318$ klgr. на $^m/_m{}^2$. Что касается величины эксцентриситета, то, конечно, она не может быть опредѣлена, ибо величина внутренних сил возрастает вмѣстѣ со значеніем y_0, что видно из равенства $P.y_0=\frac{2J}{d}k_z$. Формула $P_0=\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{EJ}{l^2}$ указывает, что критическая нагрузка

не зависит от величины эксцентриситета a и потому можно придти к заключенію, что при всяком a получается одна и таже результирующая сила P_0. В дѣйствительности такое заключеніе неправильно, т.к. формула (56) получена из дифференціальнаго ур-ія кривой, которое, как извѣстно уже из теоріи изгиба, можно считать правильным постольку, по скольку допустима ошибка, вслѣдствіе отбрасыванія $\frac{dy}{dx}$ в выраженіи для радіуса кривизны. Подобное допущеніе сдѣлано в предположеніи, что прогибы очень малы и, слѣд., все вышеприведенное разсужденіе практически правильно лишь в предположеніи весьма малых величин для эксцентриситета a.

II-ой способ закрѣпленія бруска.

Данный случай можно свести к только что разсмотрѣнному. В самом дѣлѣ, разсѣчем данный брус по срединѣ пл-стью MN и вынесем половину в сторону (фиг. 254). Для равновѣсія вынесенной части необходимо должен появится в сѣченіи MN нѣкоторый момент m, уравновѣшивающій момент внѣшней силы. Не трудно видѣть, что этот момент m соотвѣтствует защемляющему моменту предыдущаго случая и будет имѣть величину $m=Py$. Так. обр. получается брус, закрѣпленный в сѣченіи MN и изгибаемый силой P, т.е. данный случай отличается от предыдущаго тѣм, что только длина бруска не l, а $l/2$. Подставляя эту величину в форм. (56), находим величину критической силы в случаѣ свободно вращающихся концов испытуемаго бруска:



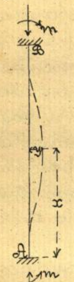
Фиг. 254

$$P_0=\frac{\pi^2EJ}{l^2} \quad \ldots \ldots \quad (57)$$

III форма закрѣпленія.

Не трудно видѣть, что в данном случаѣ в мѣстах закрѣпленія концов бруска (A и B) (фиг. 255) появляются защемляющіе моменты. Если возьмем какое нибудь сѣченіе MN на разстояніи x от точки A, то для него изгибающій момент выразится, как сумма моментов внѣшняго и защемляющаго, т.е.

$$M_x = -Py + m,$$



а ур-іе кривой изгиба:

$$-EJy'' = -Py + m$$

или

$$y'' = \frac{1}{EJ}(m - Py) = \left(\frac{m}{P} - y\right)\frac{P}{EJ} \quad \dots\dots (g)$$

Полагая по прежнему $b^2 = \frac{P}{EJ}$ и интегрируя выраженіе (g), имѣем:

$$y = C_1\cos(bx) + C_2\sin(bx) + \frac{m}{P} \quad \dots\dots (h)$$

Для опредѣленія произвольных постоянных, замѣтим, что для сѣченія A, т.е. при $x=0$, $y=0$, а в таком случаѣ из ур-іа (h):

$$C_1 = -\frac{m}{P}$$

Фиг. 255.

Для опредѣленія же C_2 продифференцируем ур-іе (h):

$$y' = -bC_1\sin(bx) + C_2\cos(bx) \quad \dots\dots (k)$$

но при $x=0$, $y'=0$, поэтому из ур-ія (d) имѣем $C_2=0$. А тогда ур-іе кривой примет вид:

$$y = -\frac{m}{P}\cos(bx) + \frac{m}{P} \quad \dots\dots (l)$$

Дальше замѣтим, что при $x=l$, $y=0$, в таком случаѣ из ур-ія (l) получим:

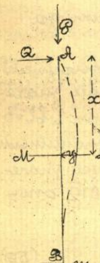
$$\frac{m}{P} = \frac{m}{P}\cos(lb) \text{ откуда } \cos(lb) = 1,$$

но $\cos(lb)$ может обращаться в единицу только при условіи $bl=0$ или $bl=2\pi n$, гдѣ n — цѣлое положительное число, но первое рѣшеніе (bl) не разрѣшает нашу задачу, т.к. при этом и сила P обращается в нуль. Переходим поэтому к слѣдующим рѣшеніям. В виду того, что искомая сила должна быть наименьшей из всѣх опасных, необходимо взять для $\angle bl$ наименьшее значеніе, т.е. положить $n=1$ или $bl=2\pi$. Слѣд. $l\sqrt{P/EJ} = 2\pi$, откуда величина критической силы:

$$P_0 = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} \quad \dots (58)$$

IV случай закрѣпленія бруса.

Уже с перваго взгляда на чертеж необходимо заключить, что в A существует какая то сила, удерживающая конец бруска в этой точкѣ (фиг. 256) на линіи AB и что в B появляется защемляющій момент. В самом дѣлѣ, положим, что в A дѣйствует лишь сила P. Возьмем произвольное сѣченіе MN. Сумма моментов сил, лежащих по одну сторону данного сѣченія, равняется суммѣ моментов сил, лежащих по другую сторону. Это условіе приводит нас к выраженію:



$$Py - m = Py \quad \dots\dots (m)$$

А т.к. защемляющій момент при условіи неподвижности конца, не может равняться нулю, ур-іе (m) представляется невозможным. Итак, мы должны допустить, что в A появляется нѣкоторая сила Q, представляющая собственно реакцію этой опоры.

Фиг. 256.

Для упрощенія, начало координат предположим в A. В таком случаѣ изгибающій момент для сѣченія MN будет:

$$M_x = -Py + Qx \qquad \text{или}$$

$$EJy'' = -Py + Qx \text{ откуда } y'' = \frac{1}{EJ}(Qx - Py)$$

полагая снова $b^2 = \frac{P}{EJ}$, находим общій интеграл:

$$y = C_1\cos(bx) + C_2\sin(bx) + \frac{Qx}{P},$$

но т.к. при $x=0$, $y=0$, то из послѣдняго ур-ія имѣем $C_1=0$. При $x=l$, кромѣ $y=0$ еще и $y'=0$, поэтому $0 = C_2\sin(bl) + \frac{Ql}{P}$ или

$$C_2 = \frac{Ql}{P\sin(bl)}$$

и окончательный вид ур-ія кривой изгиба

$$y = -\frac{Ql\sin(bx)}{P\sin(bl)} + \frac{Q}{P}x$$

Возьмем первую производную послѣдняго ур-ія

$$y' = -\frac{bQl\cos(bx)}{P\sin(bl)} + \frac{Q}{P}$$

полагая $x = l$, имѣем $y' = 0$ и тогда

$$-\frac{bQl.\cos(bl)}{P\sin(bl)} + \frac{Q}{P} = 0 \text{ или } \frac{Q}{P}\left\{1 + bl\,\mathrm{cotg}(bl)\right\} = 0$$

Как только что было указано, сила Q не может обратиться в нуль, а потому должно существовать равенство:

$$1 - bl\,\mathrm{cotg}(bl) = 0 \qquad \text{откуда}$$

$$bl = \mathrm{tg}\, bl$$

Вслѣдствіе соображеній, указанных в предыдущем параграфѣ, необходимо взять наименьшее значеніе для $\angle bl$, но отличное от нуля, ибо при $\angle bl = 0$, P будет нулем, т.е. изгиба не будет. Постепенным приближеніем можно получить слѣдующее значеніе $bl = \pi\sqrt{2}$. Слѣд. будем имѣть: $l\sqrt{P/EJ} = \pi\sqrt{2}$ откуда величина критической силы:

$$P_0 = 2\,\frac{\pi^2 EJ}{l^2} \qquad (59)$$

Сравнивая выраженіе (56), (57), (58) и (59) видим, что они отличаются друг от друга только числовыми коэффиціентами. И потому, общей формулой для величины критической силы будет выраженіе

$$P_0 = \beta\,\frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

гдѣ коэффиціент β, смотря по формѣ закрѣпленія будет имѣть значенія $1/4$, 1, 4 или же $9/4$.

Пользуясь формулой $P_0 = \beta\frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ можно для каждаго частнаго случая опредѣлить поперечные размѣры бруска при заданных условіях, т.е. при извѣстных E, l и нагрузкѣ P. Принимая во вниманіе, что допустимая нагрузка P должна быть безопасной, необходимо считать, что она меньше критической, что $P < P_0$. Обыкновенно полагают, что $P_0 = \alpha P$, гдѣ $\alpha > 1$ коэффиціент безопасности. Его выбирают в зависимости от матеріала и условій работы сооруженія.

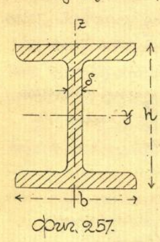
Так, напр., для чугунных колонн или стоек считают $\alpha = 8$, для стальных или желѣзных 4–5, для дерева сосны 10–15.

Так. обр., выбрав величину α, имѣем:

$$P_0 = \alpha P = \beta\,\frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

гдѣ β выбираем в указанном выше порядкѣ, смотря по способу укрѣпленія бруска. Чтобы видѣть какая разница получается в примѣненіи той или другой формулы, возьмем примѣр: требуется разсчитать желѣзную стойку двутавроваго сѣченія (фиг. 257) длиною 3 metr. с закрѣпленными концами и несущую вертикальный груз $P = 1400$ klgr.

Принимая $\alpha = 4$, имѣем:



Фиг. 257.

$$P_0 = 4.1400 = \frac{4\pi^2\, 2000000 J}{3000^2}, \text{ откуда}$$

$$J \cong 63000.$$

Момент инерціи J должен быть наименьшій, ибо стойка всегда начнет прогибаться в пл-сти легчайшаго изгиба. В данном случаѣ осью легчайшаго изгиба будет ось OZ. По германскому сортаменту этому моменту инерціи соотвѣтствует № 8, т.е. $h = 80$ m/m. $b = 42$ m/m. и $\delta = 3{,}19$ m/m, вѣс погоннаго метра 5.10 klgr.

Если бы стойка имѣла верхній свободный конец, то при тѣх же данных получим $J_z = 1008000$, чему соотвѣтствует № 20 ($J_z = 1170000$) т.е. $h = 200$ m/m., $b = 90$ m/m., $\delta = 7{,}15$ m/m. и вѣс погоннаго метра 26,1 klgr.

Помимо напряженія от изгиба при продольном изгибѣ наблюдается и сжатіе. Не трудно видѣть, что величина его незначительна, особенно во 2-м случаѣ.

Так для профиля № 8 напряженіе сжатія будет:

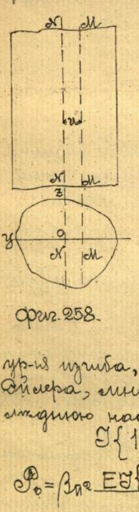
$$k = \frac{1400}{\omega} = \frac{1400}{757} = 1{,}85. \quad \text{Профиль № 20 дает: } k = \frac{1400}{4340} = 0{,}415 \text{ klg.}$$

Формула $\beta\frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ [1] не заключает в себѣ величины внутренних сил, что надо считать нѣсколько неудобным. Кромѣ того, она не вполнѣ характеризует явленіе, т.к. присутствіе сжимающей силы указывает на то,

[1] В обиходѣ принято ее называть формулой Эйлера.

что по существу продольный изгиб — один из случаев сложнаго сопротивленія. Чтобы ввести в разсчет продольное сжатіе, необходимо сдѣлать в формулѣ Эйлера дополнение на основании слѣдующих соображений.

При наличности сжимающих напряжений k', нейтральный слой из своего положения NN перейдет в MM (фиг. 258) и слѣд. радіус кривизны из ρ для какого нибудь сѣченія обратится в $\rho+u$; ур-іе кривой изгиба будет:



Фиг. 258.

$$M_x = \frac{EJ}{\rho+u}$$

Величина u найдется из условія, что на линіи MM напряженіе от растяженія $k = \frac{M_x u}{J}$ должно быть равно по абсолютной величинѣ напряженію при сжатіи т.е. $\frac{M_x u}{J} = \frac{P}{\omega}$, или $u = \frac{PJ}{M_x \omega}$, а слѣд. имѣем:

$$M_x = \frac{EJ}{\rho + \frac{PJ}{M_x \omega}}$$

опредѣляя момент M_x, находим:

$$M_x = \frac{EJ - \frac{PJ}{\omega}}{\rho} = \frac{EJ\left(1-\frac{P}{E\omega}\right)}{\rho}$$

Это ур-іе отличается от основного ур-ія изгиба, из котораго выводится и формула Эйлера, множителем $1-\frac{P}{E\omega}$, а потому в послѣднюю надо вставить:

$J\left\{1-\frac{P}{EJ}\right\}$ вмѣсто J, тогда получим:

$$P_0 = \beta\pi^2 \frac{EJ\left\{1-\frac{P_0}{EJ}\right\}}{l^2} \quad \text{или} \quad P_0 = \frac{\beta\pi^2 EJ}{l^2 + \frac{\beta\pi^2 J}{\omega}}$$

Численными примѣрами можно показать, что прибавка в знаменателѣ члена $\frac{\beta\pi^2 J}{\omega}$ имѣет весьма ничтожное значеніе даже для малых величин l, при том вліяніи этой прибавки тѣм замѣтнѣе, чѣм больше коэффиціент β.

Возвратимся к разобранному выше примѣру и возьмем профиль двутавроваго желѣза № 19, для котораго $\omega = 3050$ м/м², полагая $\beta = 4$ и $\beta = 0{,}25$, длина l

измѣняется от $l = 500$ м/м — 1000 — 2000 и 4000 м/м и опредѣлим величину критических сил по формулам:

$$P_0 = \beta \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad \text{и} \quad P_0 = \frac{\beta\pi^2 EJ}{l^2 + \frac{\beta\pi^2 J}{\omega}}$$

	$l=500$ м/м		$l=1000$ м/м		$l=2000$ м/м		$l=4000$ м/м	
	P_0	P_0'	P_0	P_0'	P_0	P_0'	P_0	P_0'
$\beta=4$	310500	302000	77625	76500	19406	19300	4851,5	4850
$\beta=0{,}25$	19450	19250	48625	48600	1215,6	1215	304	304

Эта таблица подтверждает вполнѣ практическое соображеніе о том, что при разсчетѣ длинных стоек вліяніем продольнаго сжатія можно пренебречь.

Вывод формулы Эйлера основан, как видно, из изложенных выше по общей теоріи изгиба, с обычным допущеніем в выраженіи для радіуса кривизны. Кромѣ того, теорія предполагает, что искривленіе стержня уже произошло и отсюда начинает свой вывод. Оба эти обстоятельства имѣли своим слѣдствіем то, что долгое время послѣ своего появленія (около 1770 г.) формула не пользовалась довѣріем и был предпринят ряд попыток к созданію зависимостей чисто эмпирическаго характера, в особенности, когда теоретическія выкладки и послѣ введенія в разсчет полнаго выраженія радіуса кривизны привели, послѣ разсмотрѣнія полученных сложных интегралов, к той же формулѣ Эйлера. Так Navier и Rankine, полагая, что продольный изгиб может начаться лишь при извѣстном эксцентриситетѣ, положили совершенно произвольно, что он выражается как $a = \alpha\frac{l^2}{e}$, гдѣ l — длина бруска, e — разстояніе наиболѣе удаленнаго волокна от осевой линіи. При этих условіях, не принимая во вниманіе кривизну бруска можно сказать, что в самом началѣ изгиба имѣется изгибающій момент $M = Pa = \alpha\frac{Pl^2}{e}$. Наибольшее напряженіе k (сжатіе) сложится из $k_1 = \frac{P}{\omega}$, т.е. непосредственнаго сжатія и $k_2 = \frac{Pae}{J} = \alpha \frac{Pl^2}{J}$ напряженія сжатія от изгибающей пары. Слѣд.:

$$k = k_1 + k_2 = P\left\{\frac{1}{\omega} + \frac{\alpha l^2}{J}\right\} = \frac{P}{\omega}\left\{1 + \alpha\left(\frac{l}{r}\right)^2\right\},$$

если $J = \omega r^2$, гдѣ r - радіус инерціи.

Из полученнаго выраженія имѣем, что сила, сжимающая брусок будет равна:

$$P = \frac{\omega k}{1 + \alpha\left(\frac{l}{r}\right)^2} \quad \ldots \ldots \quad (60)$$

Не трудно показать, что формула (60) легко может быть получена, пользуясь форм. Эйлера. Проф. Vierendeelle, для рѣшенія вопроса, полагает[1]), что прогиб стойки начинается с того момента, когда сила P достигает своего полнаго значенія и, стало быть, дѣйствует динамически. Составляя ур-іе движенія для конца стойки, на котором приложена сила, и дѣлая упрощенія, он приходит к тому же ур-ію $M_x = -Py$, которое служит исходным для Эйлера.

Но принимая во вниманіе, что модуль упругости E не есть величина постоянная, а измѣняется вмѣстѣ с напряженіем k и может быть выражено как $E = A - Bk$, он получает формулу:

$$P = \frac{10 A\omega}{10 B + (l/r)^2} \quad \ldots \ldots \quad (61)$$

которая, по словам автора, хорошо сходится с данными опыта.

Для бруска свободно стоящаго:

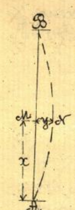
$$P = \frac{10 A\omega}{10 B + (l/r)^2} \quad \ldots \ldots \quad (62)$$

Легко замѣтить, что и формула Vierendeelle прямо получается из форм. Эйлера; так вставляя в выраженіе $P = \frac{\pi^2 E J}{l^2}$ вмѣсто E его значеніе $E = A - Bk$ приходим к выраженію (61).

Из сказаннаго выше приходится придти к заключенію, что форм. Эйлера является наиболѣе обоснованной теоретически, а принимая во вниманіе, что несовпаденіе вычисленных результатов с

1) Второй способ закрѣпленія концов.

полученными опытными данными есть удѣл всѣх теоретических формул, нужно принять зависимость $P = \beta \frac{PEJ}{l^2}$ наиболѣе правильной. Наряду с ней можно в практикѣ встрѣтить цѣлый ряд эмпирических, указать на особое преимущество этих послѣдних друг перед другом трудно; наибольшим распространеніем пользуется формула Navier и Rankine. Для нѣкотораго сѣченія MN (фиг. 259) на разстояніи x от точки A, имѣем величину изгибающаго момента $= Py$. Внутреннее напряженіе будет:



Фиг. 259

$$k = \frac{P}{\omega} + \frac{Pye}{J} \quad \ldots \quad (n)$$

гдѣ e - разстояніе крайней фибры от нейтральнаго слоя. Называя относительное сжатіе в этом волокнѣ через i (вслѣдствіе изгиба) получим:

$$\frac{Pye}{J} = Ei \text{ откуда } P = \frac{EJi}{ye};$$

приравнивая величину P критической силѣ, получим: $\frac{EJi}{ye} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$[1]), откуда $y = \frac{il^2}{\pi^2 e}$

или, вставляя значеніе y в ур-іе (n), имѣем:

$$k = \frac{P}{\omega} + \frac{Pil^2}{\pi^2 J} = \frac{P}{\omega}\left\{1 + \alpha\left(\frac{l}{r}\right)^2\right\} \text{ если } \omega r^2 = J, \text{ т.е.}$$

$$P = \frac{\omega k}{1 + \alpha\left(\frac{l}{r}\right)^2} \quad \text{т.е. ур-іе (62)}$$

Здѣсь r - радіус инерціи и $\alpha = \frac{i}{\pi^2}$. Полагая предѣльное напряженіе равным k_1, найдем $\alpha = \frac{k_1}{\pi^2 E}$, что дает для желѣза: $k_1 = 20$ klgr. — $\alpha = 0,0001$;

" чугуна: $k_1 = 30$ " — $\alpha = 0,0003$;

" дерева: $k_1 = 3$ " — $\alpha = 0,0003$.

Случай эксцентрическаго сжатія бруска при большой его длинѣ и значительном эксцентриситетѣ.

Пусть брусок AB с длиною l закрѣплен в нижнем

1) Для случая закрѣпленія по второму способу.
Лист XV. Сопрот. мат. ч. I проф. И.И. Бобарыков.

концѣ и нагружен силою $\mathcal{P}$, приложенной на плечѣ $BC = a$ (фиг. 260). Исходя из разсужденій, которыя имѣли мѣсто при выводѣ формулы Эйлера можем написать, что наибольшій прогиб в точкѣ B будет (форм. е)

Фиг. 260.

$$f_1 = a\left\{\frac{1}{\cos\left(l\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{EJ}}\right)} - 1\right\}$$

Поэтому результирующее напряженіе K сложится из двух $K_1 = \mathcal{P} : \omega$ и $K_2 = \pm \mathcal{P}(a+f) : \frac{J}{e}$, т. е.

$$K = \frac{\mathcal{P}}{\omega} \pm \frac{\mathcal{P}a\left\{\left(\frac{1}{\cos l\sqrt{\mathcal{P}/EJ}} - 1\right) + 1\right\}e}{J} \text{ или}$$

$$K = \frac{\mathcal{P}}{\omega} \pm \frac{\mathcal{P}ae}{J\cos l\sqrt{\mathcal{P}/EJ}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (p)$$

Не трудно видѣть, что $\cos l\sqrt{\mathcal{P}/EJ}$, вообще, величина близкая к единицѣ, поэтому указанная формула примѣнима только при значеніях $\underline{a}$ болѣе или менѣе замѣтных; при малых величинах слѣдует пользоваться формулами продольнаго изгиба.

Для примѣра положим дано: $l = 4$ m., $a = 0{,}5$ m, $\mathcal{P} = 8000$ klgr., сѣченіе трубчатое, матеріал чугун. Пусть размѣры колонны будут наружный діаметр $d = 275$ m/m., толщина стѣнки $\delta = 25$ m/m. Тогда $\omega = 196{,}35$ кв. c/m. и $J = 15403$ c/m^4. Подставляя данныя в формулу (p). находим $K = 0{,}405 - 3{,}720 = -3{,}315$. Знак минус обозначает растяженіе. Если бы $a = 0$, то примѣняя формулу Эйлера 1-го случай закрѣпленія, найдем:

$$\frac{\pi^2 \cdot 10000 \cdot 154030000}{4 \cdot 4000^2} \approx 240000;$$

откуда видно, что запас прочности $\alpha = \frac{240000}{8000} = 30$, т. е. колонна излишне прочна.

Разсмотрим еще случай, когда при продольном изгибѣ, брусок прогибается еще силой 1-ой осевой линіи, силой Q, приложенной по срединѣ (фиг. 261). Для сѣченія MN изгибающій момент (для сил лежащих влѣво) будет:

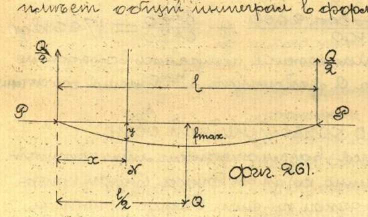
$$M_x = -\left(\frac{Qx}{2} + \mathcal{P}y\right)$$

и ур-іе кривой:

$$EJy'' = -\left(\frac{Qx}{2} + \mathcal{P}y\right)$$

имѣет общій интеграл в формѣ:

$$y = C_1\sin(bx) + C_2\cos(bx) - \frac{Qx}{2},$$



Фиг. 261.

гдѣ $b = \sqrt{\frac{\mathcal{P}}{EJ}}$, полагая $x = 0$, имѣем $y = 0$; при $x = \frac{l}{2}$; $\frac{dy}{dx} = 0$, а потому:

$$C_1 = \frac{Q}{2b\mathcal{P}\cos(\frac{1}{2}bl)} \quad \text{и}$$

$C_2 = 0$ ур-іе кривой

$$y = \frac{Q\sin(bx)}{2b\mathcal{P}\cos(\frac{1}{2}bl)} - \frac{Qx}{2\mathcal{P}},$$

откуда

$$y_{max.} = y_1 = \frac{Q\,tg(\frac{1}{2}bl)}{2\mathcal{P}b} - \frac{Ql}{4\mathcal{P}} = \frac{Q}{2\mathcal{P}b}\left\{tg\frac{bl}{2} - \frac{bl}{2}\right\};\ ^{1)}$$

напряженіе в крайнем волокнѣ будет, очевидно:

$$K = \frac{\mathcal{P}}{\omega} \pm \frac{\mathcal{P}y_{max} + \frac{Ql}{2}}{W}$$

Второй член имѣет перед собой два знака в зависимости от того будет ли растяженіе или сжатіе. Разложив выраженіе $tg\frac{bl}{2} - \frac{bl}{2}$ в ряд:

$$tg\frac{bl}{2} - \frac{bl}{2} = +\frac{(bl)^3}{3 \cdot 2^3} + \frac{2}{15}\cdot\frac{(bl)^5}{2^5} + \ldots\ldots$$

принимаем выраженіе $\frac{bl}{2}$ меньше $\pi/2$, а т. к. при таком значеніи получается ряд сходящійся, то, довольствуясь первыми двумя членами находим:

$$y_{max.} = \frac{Q}{2\mathcal{P}b}\left(\frac{b^3l^3}{24} + \frac{b^5l^5}{24}\right) = \frac{Qb^2l^3}{48\mathcal{P}}\left(1 + \frac{b^2l^2}{10}\right) = \frac{Ql^3}{48EJ}\left(1 + \frac{\mathcal{P}l^2}{10EJ}\right);$$

но множитель перед скобками есть ничто иное, как стрѣла прогиба, производимая силой Q. Называя ее через f_0, найдем:

$$f_{max} = f_0\left(1 + \frac{\mathcal{P}l^2}{10EJ}\right)$$

Для примѣра положим $\mathcal{P} = 5000$ klgr., $Q = 1000$, $l = 4000$ m/m, двутавровая балка № 29 (германскій сортамент),

1) Ибо $\frac{dy}{dx}$ обращается в нуль при $x = l/2$, а $\frac{d^2y}{dx^2}$ меньше нуля.

$h = 290\,^m/_m$, $b = 122\,^m/_m$, $\omega = 6480$. Наименьшій моментъ инерціи 4030000, $W = 66100$. Балка лежит плашмя.

$$f_{max} = \frac{1000 \cdot 4000^3}{48 \cdot 20000 \cdot 4030000}\left\{1 + \frac{5000 \cdot 4000^2}{10 \cdot 20000 \cdot 4030000}\right\} = 18{,}2\,^m/_m$$

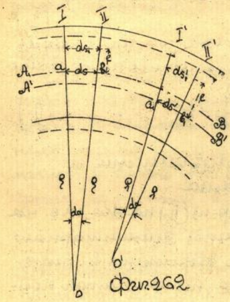
$$k_{max} = \frac{5000 \cdot 18{,}2 + 500 \cdot 2000}{66100} + \frac{5000}{6480} = 17{,}26\ \text{kgr.}$$

Такое большое напряженіе получалось вслѣдствіе допущенія, что сила Q дѣйствует $\perp^{\text{но}}$ большой оси сѣченія.

Изгиб бруска с криволинейной осью.

Здѣсь ограничимся разсмотрѣніем лишь простѣйшаго случая, а именно, когда ось бруска, будучи криволинейна, лежит в одной пл-сти. Радіус кривизны может измѣняться при переходѣ от сѣченія к сѣченію. Посмотрим, как выражается зависимость между внѣшними и внутренними силами и как построить деформированную ось бруска.

Для простоты рѣшенія задачи положим: 1) центры тяжести поперечных сѣченій, нормальных к оси расположены по данной кривой в пл-сти, в которой лежат дѣйствующія внѣшнія силы, 2) кромѣ того, допустим, что пл-сть, в которой лежит ось, пересѣкает пло-сть каждаго поперечнаго сѣченія по одной из главных осей инерціи, 3) внѣшнія силы лежат в пл-сти оси. В таком случаѣ произвольная система внѣшн. сил приводится к равнодѣйствующей R и парѣ M. Силу R приложим в центрѣ тяжести сѣченія O II. Она вызовет в нем напряженія растяженія и скалыванія и вмѣстѣ с парой M произведет деформацію бруска. Пусть нѣкоторая часть бруска вынесена в сторону (фиг. 262); AB ось бруска и положим, что пунктиром указано положеніе вынесенной части послѣ деформаціи. A'B' новое положеніе оси. Возьмем два безконечно близких сѣченія пл-стями I и II, слѣды которых, пересѣкаясь в точкѣ O, образуют между собою угол $d\varphi$. Новое положеніе этих пл-стей будет I' и II', угол между ними $d\varphi'$. Точки O и O' можно разсматривать как центры кривизны дуг, заключенных между сѣченіями I и II, I' и II'.



Фиг. 262

Если теперь возьмем волокно ds на разстояніи e от оси, то очевидно до деформаціи его величина будет: $ds_1 = (\rho + e)\,d\varphi$, а послѣ деформаціи $ds_1' = (\rho_1 + e)\,d\varphi'$ [1]; относительное удлиненіе выразится так:

$$i = \frac{ds_1' - ds_1}{ds_1} \quad \ldots \quad (a)$$

Если длина волокна ab, расположеннаго по оси до деформаціи $\breve{ab} = ds = \rho\,d\varphi$ а послѣ деформаціи была $\breve{a'b'} = ds' = \rho'\,d\varphi'$, то его относительное удлиненіе выразится чрез

$$i = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{ds'}{ds} - 1, \text{ откуда } ds' = (1 + i)\,ds \quad \ldots \quad (b)$$

Но т. к. O и O' суть центры кривизны дуг ds, ds_1, ds' и ds_1', то имѣем соотношенія:

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{\rho + e}{\rho} \text{ и } \frac{ds_1'}{ds'} = \frac{\rho' + e}{\rho'} \text{ или } ds_1 = \left(1 + \frac{e}{\rho}\right) ds \quad \ldots \quad (c)$$

и $ds_1' = \left(1 + \frac{e}{\rho'}\right) ds'$. Послѣднее равенство на основаніи выраженія (b) обращается в:

$$ds_1' = (1 + i)\left(1 + \frac{e}{\rho'}\right) ds \quad \ldots \quad (d)$$

Подставляя значенія ds_1 из (c) и ds_1' из (d) в выраженіе (a) получим:

$$i = \frac{\left(1 + \frac{e}{\rho'}\right)(1 + i)\,ds - \left(1 + \frac{e}{\rho}\right) ds}{\left(1 + \frac{e}{\rho}\right) ds} = \frac{(1 + i)\left(1 + \frac{e}{\rho'}\right) - \left(1 + \frac{e}{\rho}\right)}{1 + \frac{e}{\rho}}$$

прибавляя и вычитая из числителя по $\frac{ei}{\rho}$, найдем:

$$i = \frac{\left(1 + \frac{e}{\rho'}\right)(1 + i) - \left(1 + \frac{e}{\rho}\right) + \frac{ei}{\rho} - \frac{ei}{\rho}}{1 + e/\rho} = \frac{i + 1 + \frac{e}{\rho'} + \frac{ei}{\rho'} - 1 - \frac{e}{\rho} + \frac{ei}{\rho} - \frac{ei}{\rho}}{1 + \frac{e}{\rho}} =$$

$$= \frac{ei\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) + e\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) + i\left(1 + \frac{e}{\rho}\right)}{1 + \frac{e}{\rho}} = i\,\frac{1 + \frac{e}{\rho}}{1 + \frac{e}{\rho}} + \frac{e(1 + i)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right)}{1 + \frac{e}{\rho}}$$

В виду того, что по условію величина e невелика по сравненію с ρ, можно отношеніем $\frac{e}{\rho}$ пренебречь.

[1] В деформированном брускѣ разсматривается, конечно, волокно, лежащее на разстояніи e от осевой линіи.

Итак, относительное удлинение волокна, отстоящаго от оси на разстоянии e, выразится как:

$$i_1 = i + e\,(1+i)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) \quad \ldots \quad (\mathrm{I})$$

Умножая обѣ части этого равенства на модуль упругости E, получим соотвѣтствующее напряжение материала на 1 кв. $^m/_m$ сѣчения:

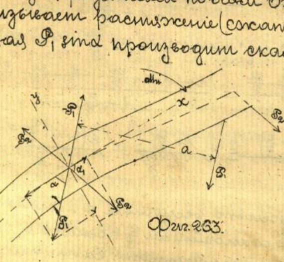
$$k = E i_1 = E i + E e\,(1+i)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) \quad \ldots \quad (\mathrm{II})$$

Зависимость между внѣшними и внутренними силами.

Если умножим обѣ части ур-ия (II) на $d\omega$, т.е. на величину площади попереч. сѣчения элементарнаго волокна и проинтегрируем все выражение в предѣлах поперечнаго сѣчения бруска, то получимая полная величина внутренних сил, уравновѣшивающих приложенную внѣшнюю систему:

$$\int_0^\omega E i\, d\omega + \int_0^\omega E e\,(1+i)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) d\omega = Q \quad \ldots \quad (c)$$

Чтобы опредѣлить значение Q, возьмем элемент A бруска и по направлению касательной к осевой линии проведем ось x прямоугольной системы координат; ось OZ направлена $\perp^{\text{но}}$ пл-сти кривой. Приложим в центрѣ тяжести сѣчения A двѣ силы P_1 и $-P_1$ равныя по величинѣ и направлению одной из внѣшних сил, но противоположныя друг другу. Получаем пару с моментом $P_1 \cdot AB = P_1 a$ (фиг. 263). Силу P_1 разлагаем по осям Ox и Oy. Слагающая $P_1 \cos\alpha$ вызывает растяжение (сжатие) в сѣчении A. Слагающая $P_1 \sin\alpha$ производит скалывание в пл-сти того же сѣчения. Пара $P_1 a$ изгибает брусок относительно оси $\perp^{\text{ной}}$ к пл-сти чертежа. Если бы на брусок дѣйствовали еще силы, то примѣняя к каждой из них тѣ же самыя разсуждения, мы замѣним каждую



Фиг. 263.

силу парой с изгибающим моментом M_n, силою растягивающей (сжимающей) $P\cos\alpha$ и скалывающей $P\sin\alpha$. Суммируя всѣ моменты и силы, мы найдем, что брусок изгибается моментом $M = \Sigma M_n = \Sigma P a$ и растягивается силой $Q = \Sigma P\cos\alpha$ и скалывается силою $S = \Sigma P\sin\alpha$, которой пока пренебрегаем. Возвращаясь к выражению (c) замѣтим, что для любого даннаго сѣчения E, i, ρ', ρ являются величинами постоянными и слѣд. могут быть вынесены за знак интеграла, а потому имѣем:

$$E i \int_0^\omega d\omega + E(1+i)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) \int_0^\omega e\, d\omega \quad \ldots \quad (f)$$

Но интеграл $\int_0^\omega d\omega = \omega$, а $\int_0^\omega e\, d\omega$ — статический момент площади поперечнаго сѣчения относительно оси бруска. Выше поставлено было условием, что ось проходит через центр тяжести сѣчений, а потому $\int_0^\omega e\, d\omega = 0$ слѣд. зависимость между внѣшними и внутренними силами выразится как $E i \omega = Q$ или $k_2 = \frac{Q}{\omega}$, гдѣ k_2 напряжение растяжения (сжатия); но растягивающая сила в разсматриваемом случаѣ будет $\Sigma P\cos\alpha$, а потому имѣем:

$$E i \omega = \omega k_2 = \Sigma P\cos\alpha = Q \quad \ldots \quad (\mathrm{III})$$

Умножая далѣе выражение (II) на e и $d\omega$ и интегрируя в предѣлах поперечнаго сѣчения, имѣем:

$$\int_0^\omega k e\, d\omega = E i \int_0^\omega e\, d\omega + E(1+i)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) \int_0^\omega d\omega\, e^2,$$

здѣсь по прежнему $\int_0^\omega e\, d\omega = 0$, кромѣ того $\int_0^\omega d\omega\, e^2 = J$ а потому послѣднее выражение принимает вид:

$$\int_0^\omega k e\, d\omega = E J (1+i)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) \quad \ldots \quad (\mathrm{IV})$$

но лѣвая часть представляет сумму моментов внутренних сил относительно оси OZ, а т.к. эта сумма должна равняться внѣшнему изгибающему моменту, то поэтому имѣем:

$$M_n = \Sigma P a = E J (1+i)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) \quad \ldots \quad (63)$$

Положение нейтральнаго слоя.

В теории изгиба указывалось, что положен…

ральнаго слоя опредѣляется условіем, по которому для волокон направленных по этому слою деформація равна нулю. В разбираемом случаѣ для нахожденія положенія нейтральнаго слоя, должны слѣд. в общей формулѣ (I) положить $i = 0$, т. е.

$$i_1 = i + e(1+i)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) = 0$$

откуда

$$e = \frac{i}{(1+i)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right)} - \frac{i}{(1+i)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right)} \ldots (г)$$

из ур-ія (III) имѣем: $i = \frac{\Sigma P\cos\alpha}{E\omega}$ и из ур-ія (IV) имѣем $(1+i)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) = \frac{M_n}{EJ}$. Подставляя эти значенія в выраженіе (г) получим

$$e = \frac{\frac{\Sigma P\cos\alpha}{E\omega}}{\frac{M_n}{EJ}} = \frac{JE\Sigma P\cos\alpha}{M_n\,\omega}$$

т. е. обращается в нуль только в том случаѣ, если для даннаго элемента $\Sigma P\cos\alpha = 0$. Для сосѣдняго сѣченія, для котораго касательная имѣет уже другой наклон $\Sigma P\cos\alpha$ не будет равна нулю, т. к. в противном случаѣ брус обращается в призматическій.
Т. к. величина момента, вообще, не равна безконечности, то можно сказать, что в криволинейном брускѣ нейтральный слой не содержит в себѣ центра тяжести и, слѣд., напряженіе в этом слоѣ отлично от нуля.

Разсчет балки.

Выраженіе (II) нам дает напряженіе матеріала на 1 кв. $^m/_m$. сѣченія.

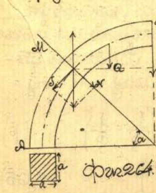
$$k = Ei + Ee(1+i)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) \quad \ldots \quad (II)$$

Если из ур-ія (III) опредѣлим i, а из ур-ія (IV) $(1+i)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right)$ и подставим в ур-іе (II), то получим:

$$k_1 = \frac{E\Sigma P\cos\alpha}{E\omega} + \frac{\Sigma M_n e}{J} = \frac{\Sigma P\cos\alpha}{\omega} + \frac{\Sigma M_n}{W} \ldots (64)$$

т. е. результирующее напряженіе от растяженія силой $\Sigma P\cos\alpha$, сложеннаго с напряженіем от изгиба моментом M_n. Выбрав форму поперечнаго сѣченія, на основаніи выраженія (64) можно разсчитать и размѣры бруска. Для иллюстраціи возьмем плоскую

Дана балка, ось которой представляет четверть окружности (фиг. 264), на концѣ B дѣйствует изгибающая сила P. Поперечное сѣченіе балки — квадрат $= a^2$. Возьмем произвольное сѣченіе MN, составляющее угол α с горизонталью. Если вѣс балки не будем принимать в разсчет, то $\Sigma P\cos\alpha$, т. е. сумма проэкцій всѣх сил на касательную FO к данному элементу оси будет равно $P\cos\alpha$, а изгибающій момент данной силы относительно сѣченія MN.



Фиг. 264.

$M_n = P\,\overline{Oa}$. Если радиус, которым описана центральная линія $= R$, то $Oa = R\cos\alpha$ и $M_n = P.R.\cos\alpha$, а в таком случаѣ напряженіе выразится (см. выраж. 64)

$$k_1 = \frac{P\cos\alpha}{a^2} + \frac{6P.R.\cos\alpha}{a^3} = \left\{\frac{P}{a^2} + \frac{6PR}{a^3}\right\}\cos\alpha;$$

это выраженіе показывает нам, что наибольшее напряженіе будет при $\alpha = 0$, т. е. для сѣченія A.

$$k_{max.} = \frac{P}{a^2} + \frac{6P}{a^3}R$$

Если необходимо принимать во вниманіе вѣс бруска, то вопрос рѣшается слѣдующим образом; на касательную OF будет проэктироваться кромѣ силы P еще вѣс части бруска OB, который замѣняем одной силой Q, приложенной в центрѣ тяжести этой части; но если δ — вѣс ед. объема и a^2 — площадь попереч. сѣченія, то

$$Q = \frac{a^2 2\pi\left(R + \frac{a}{2}\right)}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = a^2\delta\left(R + \frac{a}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

а сумма проэкцій сил на касательную F

$$\Sigma P\cos\alpha = P\cos\alpha + Q\cos\alpha = P\cos\alpha + a^2\delta\left(R + \frac{a}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\alpha$$

Изгибающій момент $M_n = P.\overline{Oa} + Q.\overline{Ob} = P.R\cos\alpha + a\delta^2\left(R + \frac{a}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\overline{Ob}$, а напряженіе матеріала

$$k_1 = \frac{P\cos\alpha}{a^2} + \frac{a^2\delta\left(R + \frac{a}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{W}\overline{Ob} + \frac{P.\overline{Oa}}{W}$$

Если бы понадобилось ввести и скалывающую силу $S = \Sigma P\sin\alpha$, то это, конечно, особаго затрудненія не доставить, но получаемое усложненіе не оправдывает результата.

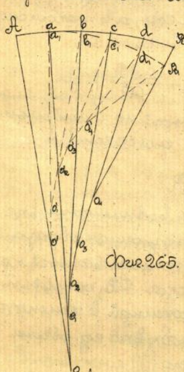
Что касается формы осевой линіи, которую она приметъ послѣ изгиба, то легче всего найти новое положеніе ея графическимъ способомъ. Въ самомъ дѣлѣ, опредѣливъ изъ $\Sigma P\cos\alpha = Ei\omega$ величину i и подставивъ въ (63) находимъ:

$$M_n = \Sigma Pa = EJ\left\{1 + \frac{\Sigma P\cos\alpha}{E\omega}\right\}\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) \quad \ldots \; (p)$$

откуда

$$\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} = \Sigma Pa : EJ\left(1 + \frac{\Sigma P\cos\alpha}{E\omega}\right) \quad \ldots \; (65)$$

Раздѣлимъ осевую линію на возможно большее число участковъ $Aa = ab = bc = \ldots$ (фиг. 265) и опредѣливъ



Фиг. 265.

соотвѣтственные радіусы кривизны до деформаціи по ур-ію (65), не трудно найти значеніе этихъ радіусовъ послѣ деформаціи.

Рѣшеніе получается тѣмъ болѣе точное, чѣмъ меньшаго размѣра взяты дѣленія Aa, ab и т. д.

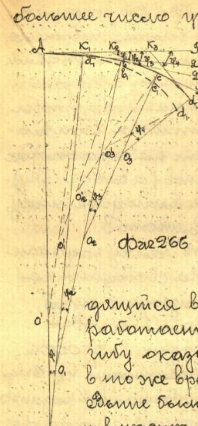
Легко можетъ случиться, что радіусы кривизны получатся очень большими, въ такомъ случаѣ, вслѣдствіе невозможности построить ихъ на доскѣ, прибѣгаютъ къ другому пріему. А именно; вмѣсто радіусовъ опредѣляютъ центральные углы $\Delta\varphi$ послѣ деформаціи. Не трудно видѣть, что $\angle AOa = \angle BKL$, т. е. углу между касательными въ точкахъ A и a (фиг. 266), зная $\angle AO'a$ или (что тоже) $\angle B_1K_1L_1$, можно, разбивъ по предыдущему ось на участки $Aa = ab = \ldots$ построить точки a_1, b_1 … Въ самомъ дѣлѣ:

$$\angle B_1H_1L_1 = d\varphi_1 = \frac{ds}{\rho'} = \frac{1+i}{\rho'}ds = (1+i)\left\{\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right\} + \frac{1+i}{\rho}ds \quad \text{или}$$

$$d\varphi' = d\varphi + \left\{\frac{\Sigma Pa}{EJ} + \frac{\Sigma P\cos\alpha}{E\Omega\rho}\right\}ds \quad \ldots \ldots \; (q)$$

Рѣшеніе издѣсь тѣмъ ближе къ истинѣ, чѣмъ на

большее число участковъ разбита ось бруска.

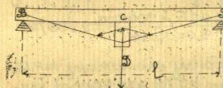


Фиг. 266

Замѣна изгиба растяженіемъ.

Въ тѣлахъ подверженныхъ изгибу, как намъ извѣстно замѣчается та особенность, что волокна ихъ, лежащія вблизи нейтральнаго слоя, испытываютъ весьма небольшія внутреннія напряженія. Поэтому можно сказать что матеріал, находящійся вблизи нейтральнаго слоя почти не работаетъ и слѣд., при сопротивленіи изгибу оказываетъ малую услугу, увеличивая въ тоже время значительно вѣсъ сооруженія.

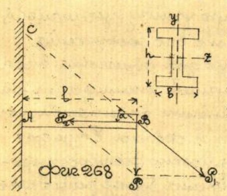
Выше было указано, что для облегченія вѣса и, вмѣстѣ с тѣмъ, для лучшей утилизаціи матеріала, пользуются не сплошными сѣченіями, примѣняя кольцевыя, тавровыя и т. п. формы. Есть еще другой способъ, при которомъ возможно эксплоатировать сопротивляемость матеріала болѣе раціонально: это замѣна изгиба растяженіем. Какъ извѣстно, при центральномъ растяженіи (сжатіи), напряженіе матеріала распредѣляется вполнѣ равномѣрно по поперечному сѣченію и потому условія работы матеріала являются наиболѣе выгодными. Главное преимущество замѣны изгиба растяженіемъ получается выигрышемъ въ вѣсѣ и очень часто упрощеніемъ конструкцій. Представимъ себѣ балку AB (фиг. 267) лежащую свободно на опорахъ и нагруженную равномѣрно



Фиг. 267.

распредѣленнымъ грузомъ pl. Подъ дѣйствіемъ этого груза балка прогибается, причемъ въ ней возбуждается напряженіе растяженія и сжатія. Если подъ среднюю точку C балки подставимъ тонкій брус (шпренгель) CD, который тягами AD и BD соединен с концами балки, что при прогибѣ балки; шпренгель, опускаясь вниз, вызовет растяженіе тяг и таким обр. будет сжат. Можно извѣстным образом подобрать размѣры тяг и шпренгель так, чтобы пониженіе точки C свести до minimum'a. При таких условіях балка как бы лежит на трех опорах и величина изгибающих моментов (а слѣд. и внутренних напряженій) уменьшается благодаря тому, что пролет сдѣлан равным ½ вмѣсто l.

Другой примѣр. Представим себѣ балку задѣланную концом A в стѣну (фиг. 268). На свободный конец дѣйствует сила P. Она производит изгиб, причем наибольшее напряженіе будет в точкѣ A.



фиг. 268

Пусть $P = 2000$ kilgr., $l = 3000$ m/m., допустимое напряженіе $k_z = 6$ kilgr. При этом необходимый размѣр поперечнаго сѣченія (двутавровое желѣзо) найдется из условія:

$$2000.3000 = \frac{2J_z k_z}{h};\ \text{откуда}$$

$$W_z = \frac{2J_z}{h.k_z} = 1000000.$$

По германскому сортаменту величина модуля 1080000 принадлежит № 36, причем $h = 360$ m/m и $b = 173$. Предположим теперь, что конец B соединен струной BC с точкой C в стѣнѣ. Разлагая силу P на слагающія по направленію тяги BC — P_1 и по оси балки AB — P_2, найдем, что сила P_1 растягивает тягу BC, а P_2 производит продольный изгиб бруса AB. Пусть угол $\alpha = 31°$, слагающая $P_2 = \frac{P}{tg\alpha} = \frac{2000}{0,6} = 3333$ kilgr. Необходимый размѣр поперечнаго сѣченія опредѣлится из формулы

$$5P_2 = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2},\ \text{откуда}\ J_z = \frac{16665.4.9000000}{20000.10} = 2999700$$

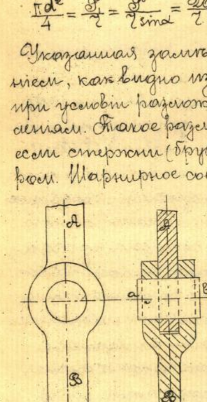
По тому же сортаменту такому моменту инерціи соотвѣтствует № балки 27 ($J_z = 3250000$), высота $h = 270$ m/m., $b = 116$ m/m. Размѣры получились бы еще меньше, если бы конец B мог быть нѣсколько

стѣснен в своих возможных перемѣщеніях.

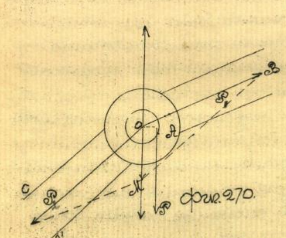
Что касается тяги CB, то полагая безопасное напряженіе = 7 kilgr., найдем:

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{P_1}{7} = \frac{P}{7\sin\alpha} = \frac{2000}{7.0,52} = 553,06\ \text{m/m}\ \text{и}\ d = 26,8\ \text{m/m}.$$

Указанная замѣна изгиба сжатіем или растяженіем, как видно из этих примѣров возможна лишь при условіи разложенія силы по опредѣленным направленіям. Такое разложеніе получается только тогда, если стержни (брусья) соединены между собою шарниром. Шарнирное соединеніе (фиг. 269) заключается в том, что обѣ части A и B в мѣстѣ соединенія могут вращаться около оси шарнира (валика) причем оси брусков пересѣкаются на оси его. Один из типов представлен на фиг. 269. Основное свойство шарнирнаго соединенія лежит в том, что внѣшняя сила, приложенная к нему, обязательно проходит через центр шарнира т.е. пересѣкает его ось. В самом дѣлѣ, пусть внѣшняя сила P приложена в точкѣ A на разстояніи OA от оси шарнира. Перенося силу ||но самой себѣ (фиг. 270) в точку O, получим пару с моментом $P.\overline{OA}$, которая будет вращать валик до тѣх пор, пока точка A придет в A' на линію OM (если направленіе силы неизмѣнно). Тогда разложим силу $P = OM$ на слагающія P_1 по оси бруска OB и P_2 по оси бруска OC. Если внѣшняя сила будет приложена гдѣ либо к бруску между шарнирами, то, само собою разумѣется, вопрос о замѣнѣ изгиба сжатіем не



фиг. 269



фиг. 270

рѣшается.

изгиба растяж

Изъ сказаннаго можно заключить, что подобная замѣна возможна при соблюдени двух условій:

1) внѣшнія силы приложены в узлах;

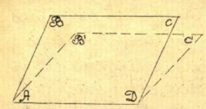
2) соединение брусков шарнирное.

Перейдем к разсмотрѣнію способа разсчета системы, в которой изгиб уничтожен вполнѣ.

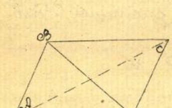
Такія системы в общем случаѣ представляют систему стержней, связанных по концам друг с другом помощью шарниров и носящих общее названiе ферм.

Фермы раздѣляются на пространственныя и плоскія. Первыми будут такія, у которых оси, входящих в состав фермы стержней (брусков) не лежат в одной пл-сти. Наоборот плоскія фермы состоят из ряда брусков (стержней), расположенных так, что оси их составляют плоскую фигуру. Вопрос о разсчетѣ фермы, вообще, служит предметом строительной механики. Здѣсь же приводятся основные способы опредѣленія внутренних напряженій в стержнях плоских ферм, как примѣры замѣны изгиба растяженiем. Число стержней, входящих в данную систему, может быть произвольное, но минимальное количество их, опредѣляемое условiем, чтобы система была неизмѣняемой, получится, если система будет состоять из ряда тр-ков. В самом дѣлѣ, замкнутый тр-к представляет собою простѣйшую неизмѣняемую комбинацию стержней. При этом под словом неизмѣняемость понимается невозможность значительных перемѣщеній в концах стержня. Единственными измѣненiями формы являются упругія удлинения или сжатія.

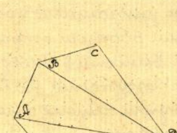
Если данная сочленная система может быть разбита на составляющiе ее тр-ки, то она обладает необходимым и достаточным числом линiй, всякiй добавочный стержень будет лишним для свойства неизмѣняемости. Так параллелограм ABCD (фиг. 271) под дѣйствiем внѣшних сил может принять форму параллелограмма AB'C'D. (Если сторона AD — неподвижна). При наличности стержня BD



Фиг. 271.



Фиг. 272.



Фиг. 273.

или AC (діагональ) (фиг. 272) подобное формоизмѣненіе дѣлается невозможным. С другой стороны, введенная вторая діагональ AC является уже лишней. Число необходимых стержней-линiй m может быть выражено через число углов n: $m = 2n - 3$ или $2n - m = 3$.

Система, в которой разность $2n - m > 3$ будет система с лишними линiями. Напр., для 5-тиугольника ABCDE (фиг. 273) $m = 10 - 3 = 7$ и т. д. Если разность $2n - m < 3$, то система имѣет недостаточное число линiй и, слѣд., измѣняема, напр., параллелограмм без діагонали.

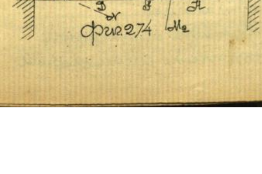
Итак: сочленныя системы можно раздѣлить на двѣ группы:

1) Система с необходимым числом стержней;

2) Система с лишними линiями

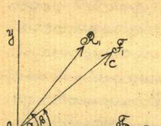
Переходя к разсчету ферм, укажем здѣсь два способа для опредѣленія внутренних напряженій в стержнях для ферм с необходимым числом линiй. Предполагается, что дѣйствующія внѣшнія силы лежат в пл-сти фермы.

Способ послѣдовательнаго отрѣзанія углов состоит в слѣдующем: пусть дана тр-ная система (фиг. 274) и пусть внѣшнія силы дѣйствуют только в узлах. В точках опор A и B появляются реакции R_1, R_2. Опредѣленіе величины и направленій их будет указано ниже. Отсѣчем по MN узел A и вынесем его в сторону. В стержнях AC и AD (фиг. 275) дѣйству-



Фиг. 274

ют силы P_1 и P_2, взаимодѣйствія отброшенной части на узел A или, иначе говоря, сила P_1 – равнодѣйствующая внутренних сил стержня AC и P_2 – стержня AD. Так. обр. в точкѣ A приложены три силы R_1 P_1 и P_2 взаимно уравновѣшивающіяся, вслѣдствіе равновѣсія всей системы.



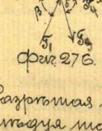
Фиг. 275.

Условія равновѣсія узла будут:

$$\Sigma X = R_1 \cos\alpha + P_1 \cos\beta + P_2 = 0 \quad \text{и}$$
$$\Sigma Y = R_1 \sin\alpha + P_1 \sin\beta = 0$$

В этих двух ур-іях величины R_1, α и β надо считать извѣстными: угол β по заданію, а R_1 и $\angle\alpha$, как величину и направленіе реакціи. Поэтому величины P_1 и P_2 опредѣляются совмѣстным рѣшеніем написанных ур-ій.

Переходя к узлу C (фиг. 276) подобным образом отрѣзаем его сѣченіем M_1N_1 и выносим в сторону. Примѣняя тѣ же разсужденія, найдем, что на узел C дѣйствуют четыре силы: извѣстныя P_1 и P_1 и неизвѣстныя P_3 и P_4.



Фиг. 276.

Статическія условія равновѣсія дают:

$$\Sigma X = P_1 \cos\gamma + P_4 + P_1 \cos\beta + P_3 \cos\delta = 0$$
$$\Sigma Y = P_1 \sin\gamma - P_1 \sin\beta + P_3 \sin\delta = 0$$

Разрѣшая эти ур-ія, опредѣлим величины P_3 и P_4. Изслѣдуя так. обр. послѣдовательно всѣ узлы, опредѣлим напряженія и в остальных стержнях системы.

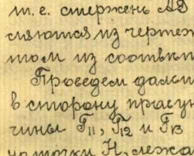
Из выше приведенных ур-ій опредѣляются для величины внутренних сил $P_1, P_2 \ldots$ не только их численныя значенія, но и направленія.

Обыкновенно неизвѣстную еще по направленію силу считают направленною по стержню от узла, т. е. растягивающей. Если при рѣшеніи ур-ний равновѣсія она получится со знаком, находящимся в соотвѣтствіи со знаками проэкцій в ур-іях $\Sigma X = 0$ и $\Sigma Y = 0$, то искомая сила дѣйствительно растягивает; в противном случаѣ она является сжимающей.

Способ Rittera. Способ Риттера отличается от предыдущаго тѣм, что отсѣкая часть фермы

и разсматривая вынесенную часть, как находящуюся в равновѣсіи, пользуются не ур-іями суммы проэкцій, а другими, именно, что сумма моментов всѣх сил, приложенных к разсматриваемому отрѣзку фермы относительно точки, лежащей в пл-сти фермы равна нулю.

Предварительно, конечно, опредѣляют величины и направленія сил реакцій в опорных узлах. Внѣшнія силы должны быть только сосредоточенныя (фиг. 274). Возьмем тот же примѣр, как и раньше, т. е. плоскую тр-ную ферму с $\parallel$-ыми поясами. Отсѣчем узел A и вынесем в сторону (фиг. 277), в стержнях AC и AD дѣйствуют силы P_1 и P_2; считая по прежнему, что онѣ направлены от узла, напишем, что вслѣдствіе равновѣсія узла, сумма моментов сил R_1, P_1, P_2 относительно нѣкоторой точки равна нулю. Чтобы ур-ie моментов содержало одну неизвѣстную[1] напр., P_1, берем точку по направленію силы P_2; удобнѣе всего взять вершину узла D. Опустив $\perp$-ры из D на направленія R_1 и P_1, пишем, считая вращеніе по часовой стрѣлкѣ положительным:



Фиг. 277.

$$-R_1 \cdot \overline{Db} + P_1 \cdot \overline{Da} = 0 \quad \text{откуда}$$

$$P_1 = -\frac{R_1 \cdot \overline{Db}}{\overline{Da}},$$

отсюда слѣдует, что брусок AC не растянут, а сжат.

Взяв за центр моментов точку C, напишем:

$$R_1 \cdot \overline{Cc_1} - P_2 \cdot \overline{Cd} = 0 \quad \text{откуда}$$

$$P_2 = +\frac{R_1 \cdot \overline{Cc_1}}{\overline{Cd}},$$

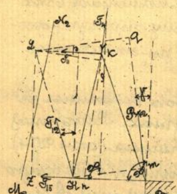
т. е. стержень AD растянут. Величины плеч опредѣляются из чертежа прямым измѣреніем или разсчетом из соотвѣтственных тр-ков.

Проведем дальше сѣченіе (фиг. 274) M_2N_2 и вынесем в сторону правую часть (фиг. 278) и опредѣлим величины P_{11}, P_{12} и P_{13}. Взяв сумму моментов относительно точки H, лежащей одновременно на направленіи

[1] Во избѣжаніе необходимости рѣшать совмѣстныя ур-ія
Лист XVI. Сопрот. мат. ч. I. проф. И. И. Бобарыков.

сил T_{13} и T_{12} получим: $R_4 \cdot Hn - R_2 Hm - T_{11} Hp = 0$ откуда

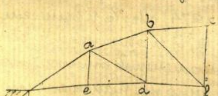
$$T_{11} = \frac{R_4 Hn - R_2 Hm}{Hp}$$



если правая часть больше нуля, то направленіе T_{11} выбрано правильно, в противном случаѣ, стержень KG сжат. Далѣе, взяв сумму моментов относительно точки G найдем: $T_{13} G_z + R_4 G_5 - R_2 G_q = 0$, откуда находим величину и знак силы T_{13}, что касается силы T_{12}, то т.к. стержень KG и Hz $\parallel^{ы}$ между собой, то точка пересѣченія их находится на безконечно большом разстояніи, а потому вмѣсто ур-ія моментов напишем сумму проэкцій на направленіе $\perp^{ое}$ направленію верхняго и нижняго поясов, получим: $R_2 \cos\gamma + T_{12} \cos\beta - R_4 \cos\rho = 0$.

Как видно из сказаннаго способ Риттера удобен тѣм, что для каждаго стержня величина внутренних сил получается из одного ур-ія и главное независимо от напряженія других стержней. Между тѣм пріем, изложенный выше для нахожденія внутренней силы какого либо бруска внутри фермы, требует предварительнаго нахожденія внутренних сил всѣх брусков, лежащих лѣвѣе или правѣе даннаго.

Конечно в нѣкоторых случаях, когда благодаря малому наклону стержней друг относительно друга, точки пересѣченія их получаются далеко за предѣлами чертежа, предпочтеніе придется отдать способу послѣдовательнаго отрѣзанія узлов. Напр. в ферме, представленной на фиг. 279 пересѣченіе стержней ab и ed, bc и df находится очень далеко. Переходя к вопросу о нахожденіи реакцій опор, замѣчаем, что послѣднія могут быть совершенно неподвижныя, шарнирныя и подвижныя.

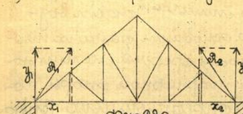


Фиг. 279.

Сообразуясь с этим можно отмѣтить слѣдующие 4 ^{ре}

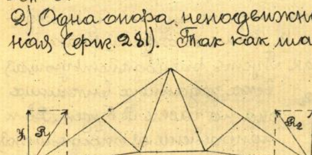
типа расположенія опор.

1) Обѣ опоры подвижны (фиг. 280) Разложив реакціи R_1 и R_2 на слагающія по вертикали и горизонтали, т.е. на y_1, y_2, X_1 и X_2 получаем шесть неизвѣстных, ибо в каждой опорѣ дѣйствует кромѣ того, нѣкоторый защемляющій момент. Статика дает для разсматриваемаго случая три ур-ія. $\Sigma Y = 0$, $\Sigma X = 0$ и $\Sigma M = 0$.



Фиг. 280.

2) Одна опора неподвижна другая шарнирная (фиг. 281). Так как шарнир допускает вращеніе фермы около своей оси, то в нем защемляющій момент $= 0$. Т. обр. в разсматриваемом случаѣ имѣем пять неизвѣстных Y_1, Y_2, X_1, X_2 и один защемляющій момент. Статика дает опять три условія равновѣсія.



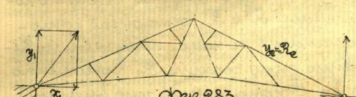
Фиг. 281.

3) Обѣ опоры шарнирныя. Вслѣдствіе отсутствія защемляющих моментов, получается, вообще, 4-ре неизвѣстных Y_1, X_1, Y_2, X_2. Ур-ій статики три (фиг. 282).

4) Обѣ опоры шарнирныя, но одна из них может перемѣщаться на катках (фиг. 283).

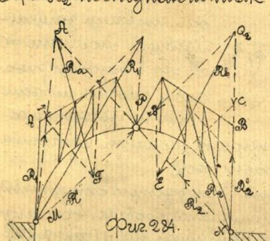
Фиг. 282.

Направленіе реакціи в подвижной опорѣ обязательно будет по нормали к поверхности перемѣщенія катков и проходит через центр шарнира. В случаѣ если катки перемѣщаются по горизонтальной плоскос-



Фиг. 283.

ти[1], что направленіе реакцій вертикальное. Неизвѣстныя X_1, Y_1, $Y_2 = R_2$; статика дает три ур-ія. Т. обр. из указанных типов лишь 4^ый дает возможность найти реакціи на основаніи данных теоретической механики. Поэтому фермы, не имѣющія одной подвижной и одной шарнирной опоры носят названіе статически неопредѣлимых. Впрочем при двух неподвижных шарнирных опорах могут быть случаи, представляющіе исключеніе и реакціи находятся из ур-ій статики. Сюда относятся всѣ трехшарнирныя фермы. Такая ферма, напр., представлена на фиг. 284. Третій верхній шарнир служит для соединенія обѣих половин A и B. Для нахожденія реакцій R_1 и R_2 поступают так. Пусть равнодѣйствующая всѣх заданных внѣшних сил на часть B будет R_b и направленіе ея опредѣлится линіей Q_2E. В опорах M и N сила R_b возбуждает реакціи R_1'' и R_2''. Направленіе силы R_1'' извѣстно: оно должно проходить через центры шарниров M и P, а потому, найдя пересѣченіе этого направленія в точкѣ Q_2 с направленіем R_b соединяем Q_2 с N. Разложив R_b на $Q_2D = R_1''$ и $Q_2C = R_2''$, находим величины и направленіе слагающих реакцій в M и N.



Фиг. 284.

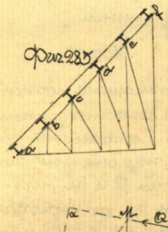
Подобно этому этому поступаем с лѣвой частью A и находим слагающія R_1' и R_2' реакцій, вызываемыя силой R_a — равнодѣйствующей внѣшних заданных сил на лѣвую часть A фермы. Т. обр. в опорѣ M дѣйствуют силы R_1' и R_1'', складывая которыя по правилу параллелограмма, получаем по величинѣ и направленію силу реакціи R_1. Совершенно так же находим и R_2. Предположеніе, что внѣшнія силы приложены в узлах ферм, конечно, в дѣйстви-

1) Чаще всего встрѣчается в практикѣ.

тельности почти не наблюдаются. Что касается давленія вѣтра и вѣса снѣга, то эти силы, распредѣленныя равномѣрно по кровлѣ крыши, передают давленіе фермѣ через, так называемые, прогоны, балочки, лежащіе 1^но пл-сти фермы. По возможности стараются установить прогоны в узлах. Другое дѣло собственный вѣс фермы: эта нагрузка является распредѣленной и ни при каких условіях не может быть сосредоточена в узлах. Но в виду того, что давленіе вѣтра и вѣс снѣга являются силами гораздо большими нежели собственный вѣс фермы, обыкновенно послѣдній считают также сосредоточенным в узлах, распредѣляя его равномѣрно между послѣдними.

В нѣкоторых случаях, обыкновенно, при деревянных стропильных фермах, прогоны укладываются так часто, что внѣшняя нагрузка является равномѣрно распредѣленной, тогда нельзя дѣлать указанное выше допущеніе.

Фиг. 285



Для примѣра разсмотрим слѣдующіе случаи:

1.) Дана ферма, состоящая из двух стропильных ног $AB = l_1$ и $BC = l_2$ (фиг. 286) и нагруженная равномѣрно распредѣленным грузом. Предположим в A, B и C шарниры. Пусть стержень AB нагружен силою p_1 на пог. ед., а стержень BC силой p_2[1]. Вынесем одну из стропильных ног в сторону, напр., лѣвую AB. Она будет находится под вліяніем трех сил: 1) равномѣрно-распре-

Фиг. 286

1) Нагрузка p_1 и p_2, обыкновенно, состоит из давленія снѣга и вѣтра; иногда принимают во вниманіе собст. вѣс. Считая точку приложенія равнодѣйствующей каждой нагрузки на средней осевой линіи стержня, складываем их и получаем направленіе общей равнодѣйствующей.

дѣленнаго груза $p_1 l_1$, 2) реакціи опоры A — R_1 и 3) силы Q взаимодѣйствія стержня BC на стержень AB. Для рѣшенія вопроса о прочности надо опредѣлить величины и направленіе силъ R_1 и Q.

Вслѣдствіе равновѣсія бруса AB сумма моментовъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на разсматриваемый брусъ относительно точки A будетъ:

$$Q \cdot \overline{Aa} = p_1 l_1 \cdot \overline{Aa_1} \quad \ldots\ldots (a)$$

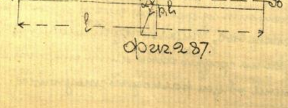
гдѣ Aa и Aa_1 плечи моментовъ для силъ Q и $p_1 l_1$. Если же будемъ разсматривать равновѣсіе праваго стержня, то замѣтимъ, что стержень AB оказываетъ давленіе на BC съ силой, равной той же Q, получимъ равенство:

$$Q\,\overline{Cc} = p_2 l_2 \cdot \overline{Cc_1} \quad \ldots\ldots (b)$$

если моменты силъ $p_2 l_2$ и Q взяты относительно точки C. Раздѣливъ почленно ур-ія (a) и (b), имѣемъ:

$$\frac{Aa}{Cc} = \frac{p_1 l_1 \cdot Aa_1}{p_2 l_2 \cdot Cc}$$

Т. к. правая часть извѣстна, то отношеніе перпендикуляровъ Aa и Cc опредѣляется, а вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣляется и направленіе силы Q. Направленіе реакціи R_1 найдется изъ того условія, что она должна проходить черезъ точку пересѣченія силъ Q и $p_1 l_1$, поэтому, продолжая направленіе силы $p_1 l_1$ до пересѣченія съ направленіемъ силы Q въ точкѣ M, соединяемъ M съ A и находимъ направленіе реакціи R_1. Аналогичнымъ же образомъ опредѣлится направленіе реакціи R_2 по линіи NC. Разложивъ $p_1 l_1$ на слагающія по направленіямъ MB и MA, находимъ величины Q и R_1. Переходя къ разсчету, напр., бруса AB, находимъ, что онъ подвергается изгибу и продольному сжатію. Если длина стержня велика, то надо принимать во вниманіе продольный изгибъ (фиг. 287). Разлагая силы $p_1 l_1$, Q и R_1 на слагающія по оси бруса и ей перпендикулярныя, найдемъ, что наибольшій изгибающій моментъ



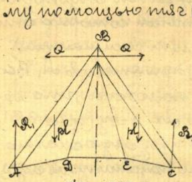
Фиг. 287.

въ плоскости чертежа, будетъ равенъ для средняго сѣченія

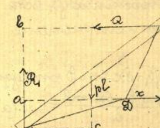
$$M = \frac{Q l_1 \sin\beta}{2} - \frac{p_1 l_1^2 \sin\alpha}{4}$$

Что касается продольнаго изгиба, то т. к. слагающія распредѣленнаго груза, обыкновенно, весьма малы, разсчетъ ведется на силу $Q\cos\beta$.

2) Пусть дана ферма, у которой обѣ ноги равны и равно наклонены къ вертикали и соединены въ систему помощью тягъ (фиг. 288); одна изъ опоръ на каткахъ. Нагрузка вертикальная, равномѣрно-распредѣленная p на пог. ед.. Вслѣдствіе симметричнаго расположенія частей фермы, сила Q будетъ горизонтальна, а реакціи R_1 и R_2 — вертикальны. Вынесемъ брусъ AB въ сторону (фиг. 289). Онъ будетъ находиться подъ дѣйствіемъ силы pl, реакціи R_1, силы Q и силы x, растягивающей стержень DE. Величина реакціи $R_1 = R_2$ будетъ очевидно pl. Что касается значеній Q и x, то не трудно видѣть, что $Q = x$, а ур-іе моментовъ относительно точки A даетъ:



Фиг. 288



Фиг. 289.

$$pl \cdot Ac + x \cdot Aa - Q \cdot Ab = 0,$$

откуда находимъ Q или x. Что касается силъ, дѣйствующихъ въ стержняхъ AD и CD то онѣ находятся разложеніемъ силы x на эти два направленія.

Система съ лишними линіями.

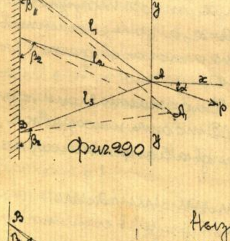
Въ тѣхъ случаяхъ, когда число стержней въ сочлененной системѣ больше необходимаго и достаточнаго, уравненія статики являются недостаточными для опредѣленія силъ, дѣйствующихъ въ стержняхъ.

Вопросъ можетъ быть рѣшенъ только принимая во вниманіе упругія свойства матеріаловъ и для нахожденія искомыхъ силъ имѣется цѣлый рядъ пріемовъ, основанныхъ на различныхъ принципахъ: способы Мора

Maxwell и др.

Не останавливаясь на разсмотрѣнiи этихъ способовъ, которые подробно излагаются въ курсѣ строительной механики; приведем для обиходности изложенiя лишь слѣдующiй простой случай.

Три стержня AB, AC и AD лежат в одной пл-сти и имѣют общую точку (шарнир) A, в которой приложена сила P. Опредѣлим внутреннiя силы в стержнях, под дѣйствiем которых они деформируются (растягиваются или сжимаются). Пусть точка A перешла (фиг. 290) при этом в A_1. Вынесем стержень AB в сторону и положим, что координатныя оси расположены по Ax и Ay (фиг. 291). Перемѣщенiе точки A в A_1 состоит из двух слагающих $AA_1' = \delta y$ и $A_1'A_1 = \delta x$. Т. к. явленiе разсматривается в предѣлах упругости, то угол A_1BA можно принять безконечно малым. А потому проектируя всѣ стержни четыреугольника $ABA_1'A$ на направленiе BA_1 получим, если $BA_1 = l_1'$:



Фиг. 290

$$BA_1 = BA + \delta y \cos\beta_1 + \delta x \sin\beta \text{ откуда}$$

$$\frac{BA_1 - BA}{BA} = \frac{l_1' - l_1}{l_1} = \frac{\delta y \cos\beta_1 + \delta x \sin\beta}{l_1} = i_1 \ldots (a)$$

гдѣ i_1 относительная деформацiя стержня BA. Если поперечное сѣченiе его равно ω_1 и модуль упругости E, то сила Q_1, дѣйствующая вдоль оси бруска AB будет:

$$Q_1 = E\omega_1 i_1 = \frac{1}{l} E\omega_1 (\delta y \cos\beta_1 + \delta x \sin\beta_1) \ldots (b)$$

Фиг. 291

Называя через Q_2 и Q_3 силы растягивающiя или сжимающiя стержни l_2 и l_3 найдем подобным же образом:

$$Q_2 = \frac{1}{l_2} E\omega_2 (\delta y \cos\beta_2 + \delta x \sin\beta_2) \ldots (c)$$

$$Q_3 = \frac{1}{l_3} E\omega_3 (\delta y \cos\beta_3 + \delta x \sin\beta_3) \ldots (d)$$

Так как узел A находится в равновѣсiи, то сила P уравновѣшивается силами Q_1, Q_2 и Q_3 и слѣд. имѣем

$\Sigma X = 0$ и $\Sigma Y = 0$. Полагая далѣе, что Q_1, Q_2 и Q_3 направлены от узла A, найдем:

$$\Sigma X = P\cos\alpha - Q_1 \sin\beta_1 - Q_2 \sin\beta_2 - Q_3 \sin\beta_3 = 0$$

$$\Sigma Y = P\sin\alpha - Q_1 \cos\beta_1 - Q_2 \cos\beta_2 - Q_3 \cos\beta_3 = 0$$

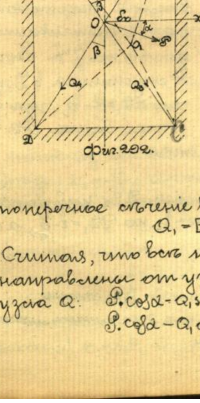
Подставляя сюда значенiя для Q_1, Q_2 и Q_3 через δx и δy, находим.

$$\left.\begin{aligned} &P\cos\alpha - \Sigma \tfrac{1}{l} E\omega (\delta y \cos\beta + \delta x \sin\beta) \sin\beta = 0 \\ &P\sin\alpha - \Sigma \tfrac{1}{l} E\omega (\delta y \cos\beta + \delta x \sin\beta) \cos\beta = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (e)$$

Разрѣшая эти два ур-iя относительно δy и δx, находим: $\delta x = f(P, \alpha, \beta)$; $\delta y = \varphi(P, \alpha, \beta)$.

Зная величины δx и δy из ур-iй (b) находим и величины Q_1, Q_2 и Q_3. Для наглядности приведем слѣдующiй примѣр.

Четыре горизонтальных тяги OA, OB, OC и OD имѣют общiй шарнир O и шарнирно же закрѣплены в точках A, B, C и D. В O приложена сила P (фиг. 292), образующая с осью Ox угол α. Найти силы $Q_1 \ldots Q_4$, дѣйствующiя в тягах. Пусть под дѣйствiем силы P точка O перешла в O_1. Разлагая перемѣщенiе OO_1 на слагающiя δy и δx, находим:



Фиг. 292.

$$\frac{AO_1 - AO}{AO} = \frac{\delta x \sin\beta + \delta y \cos\beta}{l} = i_1$$

$$\frac{BO_1 - BO}{BO} = \frac{-\delta x \sin\beta + \delta y \cos\beta}{l} = i_2$$

$$\frac{CO_1 - CO}{CO} = \frac{-\delta x \sin\beta - \delta y \cos\beta}{l} = i_3$$

$$\frac{DO_1 - DO}{DO} = \frac{\delta x \sin\beta - \delta y \cos\beta}{l} = i_4$$

гдѣ l длина каждой тяги; если поперечное сѣченiе равно ω, то

$$Q_1 = E\omega i_1 \ldots\ldots Q_4 = E\omega i_4$$

Считая, что всѣ тяги растянуты (т.е. силы $Q\ldots$ направлены от узла) имѣем из ур-iй равновѣсiя узла Q:

$$P\cos\alpha - Q_1 \sin\beta + Q_2 \sin\beta + Q_3 \sin\beta + Q_4 \sin\beta = 0$$

$$P\cos\alpha - Q_1 \cos\beta - Q_2 \cos\beta + Q_3 \sin\beta + Q_4 \sin\beta = 0 \;^{1)}$$

Подставляя вмѣсто Q_1, Q_2 … ихъ значенія черезъ δx, δy, найдемъ:

$$P\cos\alpha - \tfrac{1}{l}\,4E\omega\sin^2\beta\,\delta x = 0 \text{ или } \delta x = \frac{Pl\cos\alpha}{4E\omega\sin^2\beta}$$

$$P\sin\alpha - \tfrac{1}{l}\,4E\omega\cos^2\beta\,\delta y = 0 \text{ или } \delta y = \frac{Pl\sin\alpha}{4E\omega\cos^2\alpha}$$

Вноя найденныя значенія δx и δy въ выраженія для $Q_1 \dots Q_4$, получимъ:

$$Q_1 = \frac{P\cos(\alpha-\beta)}{2\sin 2\beta};\quad Q_2 = -\frac{P\cos(\alpha+\beta)}{2\sin 2\beta};\quad Q_3 = -\frac{P\cos(\alpha-\beta)}{2\sin 2\beta};\quad Q_4 = \frac{P\cos(\alpha+\beta)}{2\sin 2\beta}.$$ [1] [2]

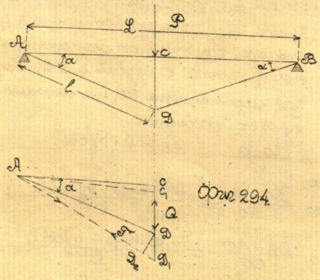
Наибольшее значеніе, напр., для Q_1 будетъ при

$$\frac{dQ_1}{dx} = -\frac{P}{2}\,\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\beta} = 0 \quad \text{или при } \alpha = \beta.$$

Полагая въ частномъ случаѣ $\alpha = \beta = 30^\circ$, имѣемъ:

$$Q_1 = 0{,}577\,P \quad \text{и} \quad Q_4 = 0{,}208\,P.$$

Приведемъ еще примѣръ. Дана шпренгельная балка $AB = L$; по срединѣ въ C дѣйствуетъ грузъ P kilgr. (фиг. 294)



Фиг. 294.

Шпренгель CD (бабка) сжимается, а тяги AD и BD, очевидно, растягиваются. Пусть сжимающая бабку сила Q — уменьшаетъ длину на q m/m. Тяга, растягиваемая нѣкоторой силой T увеличивается въ длинѣ на t m/m. Точка D опустится въ D_1, причемъ $DD_1 = f - q$, гдѣ f — прогибъ балки AB. Изъ условій равновѣсія узла D, имѣемъ:

$$2T\sin\alpha = Q \quad \dots\dots \quad (a)$$

с другой стороны удлиненіе тяги D_1D_2 найдется изъ Δ-ка DD_1D_2, какъ $D_1D_2 = DD_1\sin\alpha = t$, но $DD_1 = f - q$, а слѣд.

$$f - q = \frac{t}{\sin\alpha} \quad \dots\dots \quad (b)$$

[1] Знаки (–) для Q_2 и Q_3 указываютъ, что эти тяги сжаты.

[2] Внѣшнія силы предполагаются, какъ это имѣетъ мѣсто обычно въ практикѣ, вертикальными.

Предположимъ далѣе, что балка AB при отсутствіи бабки и тягъ прогнулась бы на величину F, кромѣ того пусть 1 kilgr. груза вызываетъ прогибъ балки (при наличности бабки) f_1, сжимаетъ шпренгель на q_1 и растягиваетъ тягу на величину t_1. Тогда при дѣйствіи на свободную (безъ бабки) балку AB силы Q, она дастъ прогибъ (вверхъ) равный $F_2 = Qf_1$. А потому, очевидно:

$$f = F - F_2 = F - Qf_1 \quad \text{и}$$

$$\text{слѣд. } f - q = F - Qf_1 - q = F - Qf_1 - Qq_1 = \frac{t}{\sin\alpha} = \frac{Tt_1}{\sin\alpha} \quad \dots\dots \quad (c)$$

Изъ условій (a) и (b) имѣемъ:

$$F - Q(f_1 + q_1) = \frac{Tt_1}{\sin\alpha} \quad \text{или} \quad T = \frac{F}{2(f_1+q_1)\sin\alpha + \frac{t_1}{\sin\alpha}}$$

Зная поперечныя сѣченія ω_1 бабки и ω_2 — тяги опредѣлимъ напряженіе матеріала:

$$k_1 = -\frac{Q}{\omega} \quad \text{и} \quad k_2 = +\frac{T}{\omega_2}$$

Возьмемъ числовой примѣръ. $L = 6^m$, $P = 2500$ kilgr. балка двутавровая № 20 (нѣм. сорт.) чему соотвѣтствуетъ модуль сопротивленія 214000 mm³. При этихъ условіяхъ напряженіе въ балкѣ $k = \frac{PL}{4W} = 17{,}5$ kilgr./mm², стрѣла прогиба $f = 26{,}3$ m/m. Чтобы уменьшить величину k, вводимъ бабку высотою $h = 1^m$, с поперечнымъ сѣченіемъ $\omega_1 = 5000$ m/m² и тяги круглаго сѣченія $\omega_2 = 500$ m/m². Прежде всего находимъ, что $\angle\alpha = 18^\circ{,}5$, $l = 3162$ m/m. Далѣе:

$$f_1 = 0{,}01265 \text{ m/m}.$$

$$q_1 = 0{,}00002 \text{ m/m (чугунъ } E = 10000 \text{ kilgr./mm}^2\text{)}$$

$$t_1 = 0{,}0003162 \text{ m/m (желѣзо } E = 20000 \text{ kilgr./mm}^2\text{)}$$

$$F = 31{,}5 \text{ m/m}.$$

$$\sin\alpha = 0{,}3173$$

А потому $Q \approx 2210$ kilgr. и $T \approx 3150$ kilgr.

Слѣд. $k_1 = \frac{Q}{\omega_1} = 0{,}442$ kilgr./mm², $k_2 = \frac{T}{\omega_2} = 6{,}3$ kilgr./mm²

Напряженіе матеріала въ балкѣ будетъ

$$k \approx 2{,}04 \text{ kilgr./mm}^2$$

стрѣла прогиба приблизительно:

$$f = 3{,}66 \text{ m/m}.$$

Въ приведенномъ разсчетѣ предположено, что балка AB сплошная и шарниръ въ C, служитъ лишь для примыканія къ AB бабки CD.

Повторная нагрузка

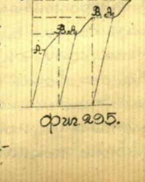
Во всѣх разсмотрѣнных до сих пор случаях дѣйствія сил предполагалось, что онѣ приложены статически или динамически, но всего один раз. На практикѣ мы встрѣчаемся постоянно с многократным приложеніем грузов, причем может измѣняться не только величина, но и направленіе дѣйствія силы. Как вліяет на механическія свойства тѣл такая повторная нагрузка предсказать путем теоретическим невозможно; только наблюденія в жизни или изслѣдованія лабораторным путем дают указанія с какой стороны нужно обращать вниманіе на значеніе повторной нагрузки, смѣну ея знака и частоту приложимости. Что касается наиболѣе важнаго сопротивленія матеріалов желѣза и стали, то замѣчено давно, что при повторном растяженіи или сжатіи, если груз вызывает напряженія, превосходящія предѣл упругости, то послѣдній повышается. Uchatius и Bauschinger показали, что такого же рода свойством обладают бронза и цинк. Послѣдній ученый произвел большое количество опытов, опубликованных в 1886 г. из которых он вывел нѣкоторыя положенія, касающіяся желѣза и бессемеровской стали. Еще ранѣе нѣмецким инженером Wöhler'ом выполнены опыты над повторной нагрузкой, причем послѣдняя прилагалась весьма большое число раз. Wöhler сконструировав специальныя машины, помощью которых он мог 1) подвергать брусок растяженію, причем дѣйствующая нагрузка измѣнялась от нуля до нѣкоторой желаемой величины; 2) производить односторонній изгиб с измѣненіем нагрузки от нуля до P; 3) производить всѣсторонній изгиб при постоянной нагрузкѣ и измѣненіем напряженія от $-k$ до $+k$; 4) повторное скручиваніе, при этом крутящій момент и соотвѣтственно напряженіе мѣняются от $-M$ до $+M$ ($-k_s$ до $+k_s$).

Испытанію подвергались образцы из желѣза и разных сортов стали. Нагрузка прилагалась столько раз сколько необходимо было для разрушенія; в нѣкоторых случаях число приложеній доходило до 45 000 000 раз.

Общее заключеніе, которое вытекает из опытов Wöhler'а можно формулировать так: часто повторяемыя нагрузки могут повести к разрушенію матеріала, если даже напряженіе, вызываемое этими нагрузками будет меньше того, при котором матеріал разрушается статической нагрузкой. Чѣм больше разность между большим и меньшим напряженіем ($k_{max.}$ и $k_{min.}$) тѣм меньшее число повтореній нагрузки матеріал выдерживает до разрушенія. Если при опытах нагрузка вызывает напряженія переходящія через нуль (т. е. мѣняющія свой знак) то разрушеніе может произойти и в том случаѣ, когда предѣл упругости не будет перейден.

Результаты, полученные Wöhler'ом несомнѣнно имѣют весьма существенное значеніе, указывая на то, на первый взгляд странное обстоятельство, что и упругія деформаціи могут быть опасными.

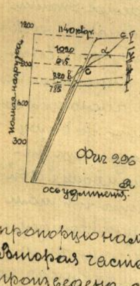
Выше указывалось на опыты проф. Bauschinger'а; в них этот ученый подвергал желѣзные бруски повторному растяженію и сжатію с цѣлью объясненія вышеупомянутое странное явленіе. Из его опытов слѣдует, что если подвергнуть брусок растяженію силою P_1, при которой заканчивается теченіе (1-ый період), то при повторном растяженіи начало теченія начнется при грузѣ P_1' большем нежели в 1-ый раз и может достигнуть значенія P_1. Если на діаграммѣ OAB представить кривую измѣненія деформацій и нагрузки для 1-го растяженія, то $O_1A_1B_1$, $O_2A_2B_2$ дадут примѣрныя кривыя для 2-го, 3-го и т. д. растяженій. Само собою понятно, что такого рода повыше-



Фиг. 295.

ніе точки А не может продолжаться как угодно
далеко; несомнѣнно, что при равных интервал-
лах повышеніе нагрузки, т.е. при $P_1 - P = P_2 - P_1$ прира-
щенія повышенія точки В идет постепенно убывая.

На фиг. 296 показана діаграмма растяженія,
полученная на машинѣ системы кн. Гагарина в
механической лабораторіи Томскаго Технологи-
ческаго Института. Цифры I–V указывают кривыя



Фиг. 296

растяженія, которыя получились при
повторной нагрузкѣ, начиная с I. Для
этой кривой предѣл пропорціональ-
ности опредѣлился приблизительно в
785 kilgr. (полная нагрузка). При пятом
растяженіи эта точка перешла
на 1140 kilgr. т.е. увеличеніе предѣла
почти в 1,45 раз. Ломанная abcde
показывает возрастаніе предѣла
пропорціональности вмѣстѣ с числом повтореній
Вторая часть опытов проф. Banchinger'а была
произведена с повторной нагрузкой, при чем растя-
женіе чередовалось со сжатіем. Главный результат
может быть формулирован так: если брусок, пред-
варительно растянутый грузом превосходившим
предѣл упругости подвергнуть сжатію, то предѣл
упругости для сжатія понижается. Тоже самое
наблюдается при растяженіи бруска предварител-
но сжатаго. Если брусок с пониженным таким
образом предѣлом упругости для растяженія (сжа-
тія) подвергнуть повторному растяженію (сжатію)
с переходом через предѣл упругости, то послѣдній
постепенно повышается. Повторныя напряже-
нія в противоположном направленіи лишь тогда
оказывают вліяніе на величину предѣла упру-
гости, если он будет перейден.

На основаніи своих наблюденій Banchinger пола-
гает, что матеріал обладает своим естественным
предѣлом упругости, который может быть искус-
ственно поднят повторными односторонними

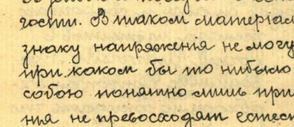
нагрузками (напр., холодная обработка). Разносто-
ронняя нагрузка (т.е. растяженіе послѣ сжатія и
наоборот) понижает искусственно поднятый пре-
дѣл упругости и что только смѣной напряженій
возможно получить естественный предѣл упру-
гости. В таком матеріалѣ противоположныя по
знаку напряженія не могут вызывать разрушенія
при каком бы то нибыло числѣ повтореній, но само
собою понятно лишь при условіи, что эти напряже-
нія не превосходят естественного предѣла упругости.

В настоящее время еще трудно сказать насколько
правильно заключеніе Banchinger'а, но во всяком слу-
чаѣ его можно считать весьма близким к истинѣ

Вліяніе температуры. Вліяніе обработки.

Механическія свойства металлов зависят в значи-
тельной мѣрѣ от температуры матеріала при
которой он подвергается дѣйствію внѣшней силы.
Само собою понятно, что вліяніе этого фактора не
одинаково отражается для различных металлов и
мы остановимся лишь на нѣкоторых из них.

Желѣзо и мягкая сталь в общем дают прибли-
зительно одинаковую картину в соотношеніях меж-
ду температурой t бруска и временным сопротив-
леніем разрыву k_z. На основаніи опытов Lethatelier
можно сказать, что сопротивленіе k_z весьма мало
измѣняется с повышеніем температуры от 0° до 250°
C. С этого момента замѣчается, при дальнѣйшем
возрастаніи t, сильное увеличеніе напряженія k_z, ко-

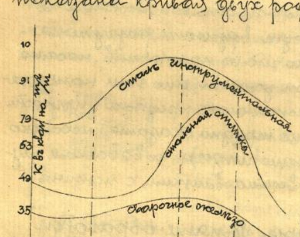


Фиг. 297

торое достигает maxi-
mum'а между 250–300°C.
Если на осях координат
(фиг. 297) откладывать
значенія k_z и t, то полу-
чается кривая ABCDE.
При повышеніи t на 300°
замѣчается значительное
паденіе k_z. При $t = 800°$ ве-

личина k_z составляет около 20%, а при $t=1000°$ около 4-7% от сопротивленія при нормальной (15°) температурѣ.

Конечно, всѣ приведенныя цифры дают лишь приблизительныя среднія значенія. На фиг. 298 показана кривая двух родов стали и сварочнаго желѣза из опытов в Cornell University, производимых Jonson'ом.



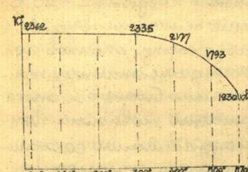
Фиг. 298

Необходимо ожидать, что вмѣстѣ с измѣненіем k_z должно наблюдаться соотвѣтственное колебаніе и в числах для удлиненій. Дѣйствительно, откладывая на оси ординат вмѣсто k_z, получаемыя деформаціи λ, получим кривую (λ, t) abcde.[1] Как видно наименьшее значеніе для λ приблизительно совпадает с моментом сильнаго возрастанія для k_z. При возрастаніи температуры за 300°, деформаціи растут очень быстро.

Как увидим ниже, обыкновенно, всѣ металлы мало пластичные бывают жесткими и хрупкими. С этой точки зрѣнія желѣзо при температурѣ 200°-300° нельзя назвать прочным матеріалом, несмотря на значительное повышеніе временнаго сопротивленія, повышеніе, которое достигает до 30-40% от первоначальной величины.

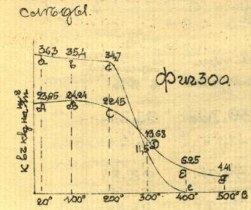
Произведенные Bach'ом опыты над чугунными брусками из чугуна двух сортов, впрочем не особенно сильно разнившихся друг от друга по своему химическому составу. При этом оказалось, что с увеличеніем температуры временное сопротивленіе чугуна растяженію падает. Как видно из діаграммы (фиг. 299) до 300° паденіе k_z весьма ничтожно, но при 360° оно составляет уже 52% от K

[1]) См. фиг. 297.



Фиг 299

при нормальной (20° C) температурѣ. В 1900 г. Bach производил изслѣдованіе температуры на сопротивляемость бронзовых брусков; химическій состав стружек дал красной мѣди 91,35%, олова 5,45%, цинку 2,87%, свинца 0,28%, желѣза 0,025, фосфора, мышьяку, сурьмы и сѣры-слѣды.



Фиг 300.

Результаты наблюденій выражены діаграммой (фиг. 300). Здѣсь кривая ABCDEF представляет зависимость $k=f(t)$, а кривая abcdef — $i=f(t)$. Паденіе временнаго сопротивленія бронзы при растяженіи вмѣстѣ с увеличеніем температуры гораздо сильнѣе, нежели это замѣчается для чугуна и даже для желѣза (в предѣлах до 300°). Что касается до деформаціи, то в противоположность послѣднему бронза дает постоянное уменьшеніе λ с увеличеніем температуры. При 400° деформація падает до нуля и матеріал, слѣд., становится совершенно хрупким.

Слѣдует ожидать, что при паденіи температуры ниже нуля должно также замѣчаться нѣкоторое измѣненіе механических свойств металлов. При этом благодаря уменьшенію объема и слѣд., увеличенію плотности, необходимо полагать, что сопротивляемость разрывающему усилію возрастает с уменьшеніем температуры. Опытныя данныя подтверждают это предположеніе. Напр. Rudeloff при изслѣдованіях в 1898 г. над нѣкоторыми сортали желѣза и стали нашел в предѣлах +20°C до -80°C значительное повышение величины временнаго сопротивленія. В виду трудности опытов при пониженной температурѣ экспериментатору пришлось производить разрыв довольно быстро и отказаться от измѣренія деформаціи точными приборами. Он ограничился діаграммами самопишущаго аппарата. Но и при этих условіях не имѣя точных абсолютных цифр, мы получаем хорошо сравниваемыя относительныя данныя. Бруски имѣют разсчетную длину 90 m/m, діам. 10 m/m. Приведем нѣкоторыя данныя.

Матеріал	Температура	Напряженіе при		Удлиненіе в %%.
		концѣ теченія	разрывѣ	
Мягкое заклепочное желѣзо.	+18°C	28,7 klgr. m	39,7 klgr.	27,7%
	-20° "	29,2 "	41,7 "	26,2 "
	-80° "	30,4 "	42,7 "	23,8 "
Сварочное прокатное желѣзо	+18° "	30,2 "	40,2 "	21,3 "
	-20° "	31,6 "	41,6 "	21,7
	-80° "	31,9 "	43,2 "	20,8 "
Пружинная сталь.	+18° "	38,7 "	77,2 "	16,0 "
	-20° "	40,2 "	84,2 "	14,0 "
	-80° "	44,4 "	84,4 "	10,9 "
Тигельная сталь.	+18° "	45,6 "	79,3 "	17,1 "
	-20° "	45,7 "	81,6 "	16,8 "
	-80° "	48,7 "	84,1 "	13,9 "

Как видно из этой таблицы пониженіе температуры сопровождается повышеніем сопротивляемости металла и вмѣстѣ с тѣм пониженіем пластичности. Любопытно то обстоятельство, что повышается и предѣл теченія, при этом больше вліяніе имѣет пониженіе температуры до -20°, нежели до -80° (исключеніе составляет тигельная сталь).

Параллельно с опытами на растяженіе Rudeloff произвел опыт на копрѣ над цилиндриками, вырѣзанными из тѣх же матеріалов. На каждый цилиндрик (размѣры были для разных сортов не одинаковые, поэтому в таблицѣ приведены лишь объемы. Всѣ цифры - средния из трех опытов) было сдѣлано по 10 ударов, измѣрялось уменьшеніе высоты.

Матеріал	Температура С°	Объем в c/m³	Уменьшеніе высоты послѣ удара в %%			Работа в klgr/m. на 1 куб. c/m
			1-го	5-го	9-го	
Мягкое заклепочное желѣзо.	+20	6,61	7,2%	24,4%	37,8%	4,79
	-20	6,76	6,6	22,5	31,7	4,68
	-80	6,57	4,9	19,0	27,9	4,82
Сварочное прокатное желѣзо.	+20	0,43	8,9	27,6	39,8	4,81
	÷20	—	6,9	24,3	33,9	4,81
	-80	—	7,3	24,0	35,4	4,89
Пружинная сталь	+20	6,65	14,0	42,7	54,2	18,93
	-20	6,60	13,1	40,8	52,7	19,05
	-80	6,57	11,7	38,7	50,6	19,15
Тигельная сталь.	+20	6,16	15,8	47,3	(60,7)	20,42
	-20	6,28	15,5	45,0	(57,5)	20,03
	-80	6,22	12,2	41,6	(53,5)	20,22

Эти цифры показывают, что при одной и той же затраченной единичной работѣ матеріал при болѣе низких температурах сопротивляется деформированію сильнѣе. Увеличеніе жесткости желѣза и стали при пониженных конечно не одинаково для матеріалов с различным составом, но в общем картина получается одинаковая. В настоящее время, поэтому придают существенное значеніе испытанію, напр., рельсов на холоду и при том при динамическом приложеніи силы: чаще всего помощью бабы на копрѣ.

Сопротивляемость металлов (пластических) зав сит в значительной степени от обработки, которой он подвергался до изготовления из него пробных образцов. В этом отношении имеет громадное значение холодная и горячая прокатка, закалка и отжиг. Прокатка железа в горячем состоянии имеет своею целью уплотнить материал (для сварочного железа удаление шлака) и придать определенную форму поперечного сечения. Как показывает опыт, вместе с уплотнением увеличивается временное сопротивление материала. Но такое увеличение замечается только до некоторого определенного (для данного сорта) числа прокаток. При следующих повторных операциях замечается падение величины K. Так Tonson приводит следующий случай прокатки одной полосы пудлингового железа.

	Сопротивление в фунт. на кв. дм. при растяжении
До прокатки	43.900
после 1^ой^ прокатки	52.560
" 2 "	59.580
" 3 "	59.580
" 4 "	57.340
" 5 "	61.820
" 6 "	59.580
" 7 "	57.340
" 8 "	57,340
" 9 "	57,340
" 10 "	54,100
" 11 "	51,970
" 12 "	43.9..

Как видно из этих данных 6^ая^ прокатка уже влечет за собою падение временн. сопротивления. С точки зрения прокатки на механическия свойства железа оказывает большое влияние и направление ея. Так при испытании на разрыв котельных листов, величины k и i изменяются в зависимости от того, вырезаны ли образцы вдоль или поперек прокатки.

В одной серии опытов Bauschinger'а с котельными листами получилось отношение между сопротивлением разрыву поперек прокатки K_n и вдоль K_e в виде $K_n : K_e = 0,74$. В другом ряде получилось $K_n : K_e = 0,71$.

– Действие ковки в нагретом состоянии (выше синяго цвета) аналогично прокатке, хотя не так дей-

ствительно. Здесь, конечно, имеет значение сила удара. Bauschinger в опытах над прочностью места сварки получил: для железных брусков с диаметром $d = 26$ m/m.

Материал	Род ковки	K при течении	K при разрыве	Удлинение	Попер. сокращ.	Примеч.
До сварки	–––––––	17,4 klgr.	38,5 klgr.	23,1%	41%	
После сварки	ручн. ковка	17,4 "	34,2 "	9,9 "	13,5 "	Разрыв по сварочному месту
После сварки	паров. молот.	18,9 "	35,4 "	12,7 "	35,0 "	" вне сварки.

Здесь между прочим замечается вредное действие сварки в смысле уменьшения пластичности материала. В этом направлении Kirkaldy нашел в своих опытах над железными полосами шириною от 2½" до 6" и толщиною от 0,25" до 1", что среднее сопротивление сваренного места равно 0,71 от прочности целой полосы.

Холодная обработка металлов обыкновенно имеет своим следствием повышение предела упругости, уменьшение удлинений, т.е. сделает материал более жестким; наблюдались случаи, когда при прокатке валов в холодном состоянии, предел упругости приближался до временного сопротивления, а деформации падали почти до нуля. Сильное повышение сопротивляемости железа и стали помощью обработки резко замечается на проволоке. Кирпичев приводит следующий пример из опытов Баумейстера над мягким железом.

Діаметр проволоки	Временное сопротивл.
0,72 m/m	64 klgr. m/m²
0,50 "	83 " "
0,30 "	96 " "
0,25 "	94 " "
0,15 "	98 " "
0,10 "	123 " "

Указанные результаты можно было предвидеть на основании опытов Bauschinger'а, о которых говорилось выше, т.к. вообще обработка холодная и горячая аналогична повторному напряжению с заметным переходом предела упругости. Так же указывалось на возможность до известной степени уничтожить искусственно повышенный предѣл упругости помощью повторной нагрузки, при которой напряженія измѣняют свой знак. Опыт учит, что существует еще другой способ такого, так сказать возстановленія первоначальных механических свойств в металлах. Этот способ заключается в отжиганіи металла послѣ его обработки, т.е. нагрѣвался в отжигательных печах и предоставленіи металлу возможности болѣе или менѣе медленнаго остыванія.

Для примѣра приведем нѣкоторыя данныя взятыя у Unwin'a.

Матеріал	Временное сопрот. в клгр. на 1 ${}^{m}/_{m}{}^{2}$	Удлиненія в % %
1/4" лист тверд. стали не отожжен.	51,0	16,65
—"— " —"— " отожжен.	44,2	24,12
1/4" лист мягк. стали не отожжен.	41,3	24,32
—"— "—"— " отожженн	37,3	24,87
1/2" лист мягкой стали не отожженн	44,3	25,05
—"— "—"— " отожженн.	41,8	26,90
1 3/16" лист для пар. котла не отожжен.	43,8	21,95
—"— "—"— " отожженн.	39,9	28,75

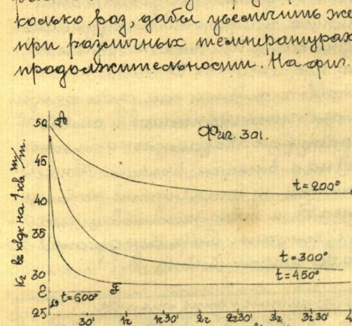
Металл тянутый в проволоку дает еще болѣе поразительные результаты при отжиганіи. Unwin приводит данныя A. Allen в слѣдующей таблицѣ

Матеріал	№№ проволок	Діаметр в дм.	Пред. упр. в тонн. на кв. дм.	Врем. сопрот. в тон. на кв. дм.	Удлиненіе в % %.
Брусок до волоченія	—	1.12	17.0	28.1	28.1
Проволока —"—	1	0.31	22.4	32.1	21,3
—"— отожжен.	1	0.31	21.4	30.3	22.8
—"— —"—	2	0.27	20.0	29.8	21.1
—"— отожжен.	2	0.26	20.4	28.8	19.8
—"— ——	3	0.25	27.5	48.8	1.9
—"— отожжен.	3	0.25	—	27.1	15.2
—"— —"—	4	0.23	30.1	44.1	3.2
—"— отожжен.	4	0.23	19.9	27.7	17.5
—"— —"—	5	0.21	25.4	31.7	13.8
—"— отожжен.	5	0.20	20.9	29.5	21.6
—"— —"—	8	0.16	47.3	56.4	1.0
—"— отожжен.	8	0.16	18.8	26.6	21.2

Отжиг оказывает такое же вліяніе и на другіе металлы. Напр. (по Unwin'y)

Матеріал	d	Временное сопротивл.	Удлиненіе
Мѣдь —"—	4.56	48.8 клгр. ${}^{m}/_{m}{}^{2}$	3%
—"— отожжен.	4.56	28.2 "	35 "
Дельта-металл 1)	2.92	90.2 "	2,1 "
—"— —"— отожжен	2.92	60.0 "	27,0 "

Весьма любопытно, что время отжига имѣет так же существенное значеніе. Lechatelier производил растяженіе мѣди предварительно вытянутой нѣсколько раз, дабы увеличить жесткость матеріала при различных температурах отжига и разной продолжительности. На фиг. 301 показаны результаты в видѣ кривых AB, соотвѣтствующія температурѣ отжига t = 200°, AC – t = 300°, AD при t = 450° и EF при t = 600°. Из діаграммы ясно видно, что в предѣлах от 0 до 1 часа время нагрѣванія имѣет особенно большое вліяніе



и что, вообще, с увеличеніем времени отжига, уменьшается напряженіе при разрывѣ.

Как рѣзко вліяет отжиг на свойства сплавов видно очень хорошо из слѣдующаго опыта.

Послѣ 5-минутн. нагрѣванія до краснаго каленія наблюдалось:

Матеріал	Врем. сопрот. при разрывѣ	Удлиненіе при разрывѣ
Серебро чистое	18,8 клг.	45%
— с 1% мѣди	22,7	40%
— с 1% олова	12.0	3%

Послѣдній образец или сплав 99% Ag и 1% Sn был еще раз

1) Дельта-металл – представляет сплав, найденный Dick'ом. Примѣрный состав: Cu = 55%, Zn = 44% и Fe = 1%. Удѣльный вѣс = 8.4, точка плавленія около 1000°C.

продолжительно нагрѣт до 300°С. Новое испытаніе дало: $k = 22.8$ klgr. на $^m/_{m^2}$ и $i = 40\%$.

Вліяніе продолжительности опыта на сопротивляемость металлов.

Ударная проба. Выше в статьѣ о растяженіи указывалось на то обстоятельство, что большая или меньшая продолжительность дѣйствія силы имѣет значительное вліяніе на получаемыя при опытах результаты. Так, растягивая металлическій брусок весьма медленно, получаем, напр., величины разрушающих напряженій гораздо меньшія, нежели при испытаніи при тѣх же условіях, но в болѣе короткій промежуток времени.

В 1901-2 году Lechatelier опубликовал свои опыты над растяженіем различных металлов и сплавов при разных температурах. Параллельно он производил наблюденія над вліяніем времени. Приведем нѣкоторыя данныя из упомянутой работы французскаго ученаго. Для трех металлов: цинка, аллюминія и мѣди, получены были слѣдующія величины временнаго со сопротивленія [1]

Матеріал	Продолжительность опыта				
	30"	1'	5'	15'	60'
Цинк	28.0	24.0	21.0	16.5	11,5 klg. на $^m/_{m^2}$
Аллюминій	14.9	14.6.	14.0	14.2	13,4 "
Мѣдь	27.8	27.1	26.3	25.8	25,1 "

Для мягкой, хорошо отожженной проволоки было найдено

Время	5"	10"	20'	40"	60"	очень долгое.
Предѣл упругости	32.6	31.0	29.3	28.0	27.4	22.4 kg. $^m/_{m^2}$
Временное сопротив.	35.6	35.2	34.8	37.6	34.4	33.0 "

Мы видим, что для полученія дѣйствительнаго значенія временнаго сопротивленія нельзя пользоваться ре-

[1] Образцы были взяты в формѣ проволок.

зультатами кратковременных нагрузок. Путем ряда экспериментов может быть найдена величина k, которая и должна быть принята как характеризующая механическое свойство металла. Lechatelier, напр. нашел послѣ цѣлой серіи наблюденій слѣдующія значенія дѣйствительных временных сопротивленій:

Цинк	2 klgr. на $^m/_{m^2}$
Аллюминій	11 " — "
Мѣдь	23,5 " — "

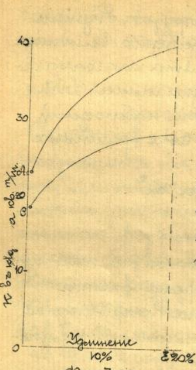
Растяженіе металла при болѣе высокой температурѣ нежели 15° С показывает что время опыта имѣет совершенно такое же вліяніе. Напр., мѣдная проволока с $k = 50$ klgr. $^m/_{m^2}$ при нормальной температурѣ дала при $t = 250°$ С.

Время опыта	20'	10	30'
Временное сопротив.	34	24,7	18 klgr. на $^m/_{m^2}$

Из сказаннаго ясно, что т. к. с повышеніем скорости растяженія временное сопротивленіе k бруска получается болѣе значительным, то при ударном дѣйствіи силы, величина k должна оказаться еще большей. Напр, в одном из опытов Considère было найдено для желѣзной проволоки с діаметром в 0.75 $^m/_m$, что при деформаціи в 19% временное сопротивленіе под дѣйствіем динамической нагрузки было 39.6 klgr., тогда как то же удлиненіе вызывалось статической нагрузкой в 27.6 klgr. на $^m/_{m^2}$. На фиг. 302 показаны кривыя AB, соотвѣтствующая опыту на этой проволокѣ при динамическом приложеніи груза, а CD тоже при статическом. Напряженія, выраженныя ординатами $BE = 39.6$ и $DE = 27.6$ klgr. на $^m/_{m^2}$ были разрушающими $OE = 19\%$.

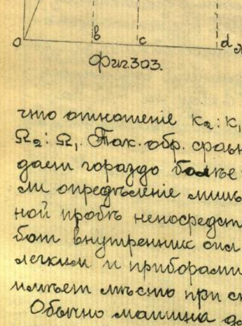
В настоящее время испытанія матеріалов динамическим приложеніем силы начинает все болѣе и болѣе входить в употребленіе. При этом методѣ опредѣляется работа внѣшней силы необходимая на разрушеніе бруска или на полученіе той или другой деформаціи. В виду того, что с небольтой погрѣшностью можно принять работу внутренних сил равной затраченной на деформацію работѣ падающаго груза, является возможность опредѣлить, так сказать, работоспособность бруска.

Пусть брусок при испытаніи статическим путем дал діаграмму (фиг. 303) OABCDdO, выражающую, как уже нам извѣстно, работу внутренних сил.



Фиг. 302

Временное сопротивленіе его k_1 опредѣляется частным $P_1 : \omega$, если ω — площадь поперечнаго сѣченія. Работа внутренних сил, развившаяся в брускѣ до момента достиженія этой нагрузки, очевидно равна площади $\Omega_1 = OABCcO$.



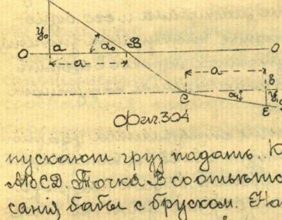
Фиг. 303.

Если по какой либо причинѣ, напр., вслѣдствіе присутствія мѣстнаго порока, разрушеніе произошло бы раньше, напр., при грузѣ $P_2 < P_1$, то временное сопротивленіе $k_2 = P_2 : \omega$. Работа же внутренних сил выразится площадью $\Omega_2 = OABbO$. Не трудно видѣть, что отношеніе $k_2 : k_1$ гораздо меньше отношенія $\Omega_2 : \Omega_1$. Так. обр. сравненіе работ внутренних сил дает гораздо болѣе надежные результаты, нежели опредѣленіе лишь напряженій k_1 и k_2. При ударной пробѣ непосредственно опредѣляется значеніе работ внутренних сил и при том способом болѣе легким и приборами менѣе сложными, нежели это имѣет мѣсто при статических изслѣдованіях.

Обычно машина для ударной пробы представляет собою копер. Падающій с нѣкоторой высоты H, груз обладает в момент удара опредѣ-

ленной скоростью (теоретически $v = \sqrt{2gH}$). Опредѣлив величину и направленіе скорости послѣ удара из разности живых сил груза сразу находят затраченную на разрушеніе или вообще на деформацію испытуемаго бруска энергію.

Приведем здѣсь вкратцѣ описаніе копра Amsler'a. Груз (баба) движется в направляющих и несет на себѣ карандаш. Пролетая мимо вращающагося барабана, карандаш оставляет на бумагѣ, которой покрыт барабан линію; но послѣдней можно судить о скорости бабы в момент перваго соприкасанія ея с бруском и в момент оставленія его. Пусть (фиг. 304) линія OO



Фиг. 304

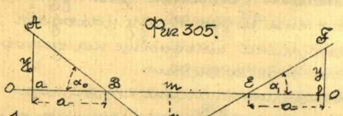
начерчена карандашем бабы до удара, когда груз лежит спокойно на испытуемом брускѣ. Подняв бабу до желаемой высоты и приведя барабан во вращеніе пускают груз падать. Карандаш чертит линію ABCD. Точка B соотвѣтствует моменту соприкасанія бабы с бруском. Найдя точку C, гдѣ кривой участок переходит в прямую получим момент C, когда баба, разрушив брусок падает дальше вниз. Очевидно $\angle\alpha_0 > \angle\alpha_1$. Отложив от B влѣво и от C вправо отрѣзок (произвольный) $\underline{a}$, находим ординаты $y_0 = Aa$ и $y_1 = eE$. Очевидно, если скорость вращенія барабана W, скорость бабы в точках A и C будут v_0 и v_1, то

$$v_0 = y_0 \frac{W}{a} \quad \text{и} \quad v_1 = y_1 \frac{W}{a}$$

Затраченная работа выразится, если вѣс бабы Q:

$$\mathcal{T} = \frac{m(v_0^2 - v_1^2)}{2g} = \frac{QW^2}{2ga^2}(y_0^2 - y_1^2)$$

Если бы брусок остался не разрушенным, то баба, затратив часть живой силы на деформацію, подпрыгнет вверх со скоростью $v_1 < v_0$. Кривая получит вид, указанный на фиг. 305. Здѣсь по прежнему $\angle\alpha_0 > \angle\alpha_1$.



Фиг. 305.

Подсчеты ведутся по предыдущему. Легко видѣть, что $\overline{mn}$ дает остающуюся деформацію.[1] Большим распространением пользуется копер Charpy, представляющій собою большой маятник. В последнее время появилась машина Guillery, в которой удар производится выступом (зубом) массивнаго колеса, приводимаго во вращеніе с значительным числом оборотов.

Помощью ударной пробы в настоящее время опредѣляется степень жесткости матеріала и его однородность. При этом рельефнѣе выступают значенія, а главное, присутствіе внутренних пороков в формѣ трещин, которыя даже при тщательном наружном осмотрѣ почти не уловимы.

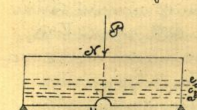
Степень однородности обычно опредѣляется ударной пробой над брусками примѣрно 25×25 m/m поперечнаго сѣченія и до 60 m/m. длины. Такой брусок надрѣзается на верхней грани (фиг. 306) (иногда и на нижней)[2]. Часть D зажимается крѣпко в тисках, на выступающую часть C падает груз K (баба). Излом производится по пл-сти EF. Надрѣзы имѣют своею цѣлью слѣдующее. Для изслѣдованія жесткости, которая обычно опредѣляется ||-но однородности, желательно, чтобы разрушеніе происходило по возможности с малыми деформаціями. Как указывалось выше при растяженіи бруска наличность кольцевой выточки (неширокой) имѣет слѣдствием

Фиг. 306.

1) Стрѣлу прогиба при изгибѣ и удлиненіе при растяженіи.

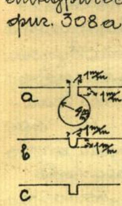
2) Вообще один надрѣз должен быть на сторонѣ, на которой ожидается растяженіе.

значительное сокращеніе деформацій. Аналогичное явленіе будет имѣть мѣсто при ударной пробѣ на изгиб бруска (фиг. 307), лежащаго на опорах A и B под дѣйствіем падающаго груза P. Если представить себѣ нижнюю часть бруска, состоящей из слоев a, b, c, . . . , то в наиболѣе невыгодном положеніи, с точки зрѣнія удлиненій, находится нижній слой a. Он должен разорваться при наличности очень небольших λ. Но как только в слоѣ a, получается разрыв, то этот послѣдній будет играть в сосѣднем слоѣ b такую же роль как надрѣз M по отношенію к слою a. Поэтому все разрушеніе сѣченія MN произойдет при сравнительно ничтожных деформаціях. Очевидно, соображенія, приведенныя для случая на фиг. 307, справедливы и для случая бруска, защемленнаго одним концом.



Фиг. 307.

Что касается формы надрѣза, то различные изслѣдователи между собою не сходятся. Так Charpy считает наиболѣе правильной форму цилиндрическую с размѣрами указанными на фиг. 308 a. Ch. Fremont дѣлает плоскій пропил глубиною и шириною в 1 m/m (b); края у впадин закругляет. H. Le Chatelier примѣняет плоскій пропил (c). Ast и Barba — треугольный (d) с углом при вершинѣ в 45°. Vanderheim угол берет в 90°. По существу важно лишь, чтобы при испытаніях соблюдалось однообразіе в размѣрах и способах изготовленія принятой формы надрѣза. Глубина его опредѣляется из слѣдующаго условія: площадь ω, излома должна быть на столько меньше площади ω сѣченія бруска, чтобы в мо-



Фиг. 308

ментъ разрушенія, напряженіе в стальной части бруска не превосходило предѣла упругости. Обыкновенно в мягкихъ металлахъ $\omega_1 : \omega = 1:2$, в твердыхъ $\omega_1 : \omega = 1:3$.

Как показали наблюденія при ударном испытаніи имѣет значеніе не только живая сила удара, но и число ихъ. Затраченная работа может быть вообще выражена произведеніем QH, гдѣ Q вѣс бабы, а H — разрушающая высота паденія, т.е. такая при паденіи с которой, баба разрушает брусок, затрачивая на это всю свою живую силу. Если разрушеніе произойдет при затратѣ $m.Qh$ kldgr.m., гдѣ m — число ударов и h — соотвѣтственная высота, то $QH \gtrless mQh$, т.е. $H \gtrless mh$. В виду этого необходимо придерживаться всегда одного и того же метода, т.е. всѣ опыты вести при условіи, что разрушеніе наступает при одном ударѣ. Нѣкоторые изслѣдователи напр. Jahler, Brinnell предпочитают разрушеніе менѣе сильными но повторными ударами. При этом необходимо оговорить число ударов и высоту паденія. Вѣс бабы также всегда должен указываться, ибо на результат имѣет вліяніе не только произведеніе $QH = \tau$, но при постоянном τ отдѣльныя значенія Q и H. Само собою понятно, что однородным матеріалом будет такой, в котором для разрушенія, взятых у разных мѣст требуется одна и та же величина $QH = \tau$.

Что касается вопроса о жесткости (или хрупкости) то необходимо прежде всего оговорить слѣдующее: самое понятіе о хрупкости матеріала не может считать установленным; вообще его противополагают понятію о пластичности. В виду этого не имѣется зависимости, которая путем подстановки в нее извѣстных данных давало бы мѣру жесткости.

Auerbach дает такую формулу:

$$z = \frac{K_2 - K_1}{K_2} \cdot \frac{\omega - \omega_2}{\omega_2} = \left(1 - \frac{K_1}{K_2}\right)\left(\frac{\omega}{\omega_2} - 1\right)$$

Здѣсь K_1 — предѣл упругости, K_2 — временное сопротивленіе, отнесенное к разрывному сѣченію, ω — поперечное сѣченіе бруска до деформаціи, ω_2 — поперечное сѣченіе в мѣстѣ разрыва.

Величина z может служить характеристикой жесткости до нѣкоторой степени, ибо чѣм меньше разность $K_2 - K_1$ и $\omega - \omega_2$ тѣм, конечно тѣло менѣе пластично, а стало быть болѣе жестко. Но необходимо указать, что получить значеніе $K_2 = \frac{P}{\omega_2}$, гдѣ P — величина разрыва, дѣло весьма трудное.

В настоящее время нельзя считать установленным какой нибудь метод для опредѣленія коэффиціента хрупкости на основаніи данных работы копра. Fremont напр. предлагает считать достаточно вязкой такую сталь, которая дает временное сопротивленіе при статической нагрузкѣ не болѣе 50 kldgr. на $^m/_{m^2}$ при ударном дѣйствіи бабы вѣсом 10 kldgr. с высотой паденія $= 4^m$. и для брусков размѣрами $10 \times 8 \times 30$ $^m/_m$, расход работы на изломъ не менѣе 18 kldgr./m. Надрѣз в 1 $^m/_m$.

Mesnager на основаніи своих опытов предполагает зависимость между временным сопротивленіем K разрыву (статическим) и деформаціи при ударѣ углом изгиба в видѣ:

$$K + m\alpha = A,$$

гдѣ m и A — численные коэффиціенты, зависящія от размѣров брусков, α — в градусах угол изгиба.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Для малых имѣем} & & K + 2{,}5\alpha = 90 \\ \text{" больших} & \text{"} & K + 2\alpha = 80 \end{array}\right\} \ldots (a)$$

Дѣленіе на малые и большіе бруски получилось вслѣдствіе замѣченнаго Mesnager вліянія на результаты величины брусков. Необходимо указать, что в формулу (a) должны быть вставлены среднія значенія углов изгиба, которые колеблются в громадных предѣлах. В то время когда ми-наименьшее значение α приближается к нулю, высшее превосходит 100°. Въ виду сказаннаго, предложенный прiем нельзя признать вполнѣ основательным.

Несомнѣнно в дальнѣйшем с накопленiем большого количества опытнаго матерiала удастся быть может установить какiя либо аналитическiя зависимости между временным сопротивленiем разрыву и работой на копрѣ. Пока приходится считать вопрос о каких бы то нибыло нормах для опредѣленiя жесткости — открытым. Несомнѣнно одно, что болѣе жесткiй матерiал для своего разрушенiя, при всѣх одинаковых прочих условiях, требует меньшiя затраты работы, нежели вязкiй.

К вопросу о выборѣ допустимых (безопасных) напряженiй.

Выше в различных мѣстах указывались тѣ основанiя, на которых слѣдует основываться при назначенiи допустимаго (безопаснаго) напряженiя к. Въ виду большого значенiя величины к при разсчетѣ той или другой части сооруженiя, считаем не лишним в общих чертах сдѣлать сводку обстоятельств, имѣющих то или другое влiянiе при рѣшенiи этого вопроса. Само собою разумѣется, что дать общее правило, пригодное для всѣх частных случаев совершенно невозможно; здѣсь имѣют значенiе качество матерiала, способ приложенiя внѣшних сил; в подвижных частях тщательность сборки, колебанiя температуры; задаваясь матерiалом мы наталкиваемся на чрезвычайное разнообразiе сортов его, влiянiя способа обработки, отжига и т. д. Поэтому совершенно естественно, что приступая к разсчету в каждом отдѣльном случаѣ приходится считаться с обстоятельствами ничего общаго с нашим предметом не имѣющими,

как напр., стоимость матерiала. Оставляя в сторонѣ такiе факторы будем считать матерiал совсѣм механическими свойствами заданным.

Первым условiем прочности даннаго сооруженiя является условiе, чтобы при всяком возможном, для подлежащаго разсчету сооруженiя, дѣйствiи внѣшних сил напряженiе матерiала не превосходило его предѣла упругости к. Как уже указывалось в своем мѣстѣ, напряженiя, измѣняющiя свой знак на противоположный, т. е. переходящiй через нулевое значенiе, понижают искусственно, поднятый обработкой, предѣл упругости до, так называемаго, естественнаго. Этот предѣл и имѣется в виду теперь. Конечно, в тѣх случаях, когда может быть вполнѣ гарантирована невозможность перехода напряженiя растяженiя в сжатiе, там можно считаться и с приподнятым предварительной обработкой предѣлом упругости. Напр., в таких условiях работают всѣ канаты, нѣкоторыя части строительных ферм и т. п. Наоборот, скалки поршней в машинах двойного дѣйствiя, шатуны, валы и т. д. находятся в условiях противоположных и смѣна знака у напряженiя здѣсь обязательна.

Далѣе, почти во всѣх без исключенiя случаях практически имѣется на лицо динамическiй способ приложенiя внѣшней силы. Это необходимо имѣть в виду, ибо, как доказывалось в курсѣ, напряженiе может достигать удвоеннаго значенiя. Но кромѣ этого надо провѣрить — может ли имѣть мѣсто еще ударное дѣйствiе, ибо, при наличности послѣдняго, величина напряженiя повышается.

Как показали опыты Wöhler и др. повторныя напряженiя достаточно быстро слѣдующiя друг за другом, будучи при статическом дѣйствiи безопасными, могут даже повести к разрушенiю, если число приложенiй их будет значительно.

Tetmayer полагает слѣдующую зависимость между напряженіями: k' – верхній предѣлъ, k'' – нижній предѣлъ.

$$k' = a + b\left(\frac{k''}{k'}\right) + c\left(\frac{k''}{k'}\right)^2 \quad \ldots \ldots \quad (m)$$

Коэффиціенты a, b и c должны быть опредѣлены для каждаго матеріала и сорта опытнымъ путемъ[1]. Въ ур-іи (m) k' представляетъ наибольшую нагрузку, которую брусокъ можетъ переносить безъ разрушенія. Полагая запасъ прочности по отношенію къ этой величинѣ, въ среднемъ $= 3{,}5$, Fetmayer получаетъ выраженіе для допустимаго напряженія равнымъ

$$k = a_1 + b_1\left(\frac{k''}{k'}\right) + c_1\left(\frac{k''}{k'}\right)^2,$$

гдѣ $a_1 = a : 3{,}5$, $b_1 = b : 3{,}5$ и $c_1 = c : 3{,}5$. Означая черезъ $K_{max.}$ и K_{min} наибольшее и наименьшее значеніе напряженія, возбуждаемое въ разсчетной части сооруженія и полагая, что $K_{min} : K_{max} = K'' : K'$, найдемъ

$$K = a_1 + b_1\left(\frac{K_{min}}{K_{max}}\right) + c_1\left(\frac{K_{min}}{K_{max}}\right)^2 \quad \ldots \ldots \quad (n)$$

Пренебрегая здѣсь третьимъ членомъ второй части, какъ значительно меньшимъ нежели второй, получимъ:

$$K = a_1 + b_1\left(\frac{K_{min}}{K_{max}}\right) \quad \ldots \ldots \quad (p)$$

Это выраженіе называютъ иногда формулой Lainhardt – Weyrauch[2]. Обычно ему даютъ видъ:

$$K = A\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{K_{min}}{K_{max}}\right) \quad \ldots \ldots \quad (q)$$

Не трудно видѣть, что A представляетъ напряженіе матеріала (безопасное) для случая когда знакъ напряженія не мѣняется и наименьшее напряженіе равно нулю, т. е. напряженіе матеріала колеблется въ предѣлахъ отъ нуля до K_{max}. Дѣйствительно при $K_{min} = 0$, имѣемъ $K = A = K_0$. Если извѣстна величина K_0, то для

1) Напр., для сварочнаго желѣза Fetmayer даетъ:

$$k_1 = 2{,}16 + 1{,}23\left(\frac{k''}{k'}\right) + 0{,}25\left(\frac{k''}{k'}\right)^2$$

2) Lainhardt и Weyrauch на основаніи опытовъ Wöhler и аналогичныхъ, предложили зависимости: первый для случая когда знакъ напряженія не мѣняется, второй для случая перехода напряженія через нуль. Выраженіе (p) совмѣщаетъ въ себѣ такъ сказать оба условія.

остальныхъ случаевъ нагрузки находимъ $K = 1{,}5 K_0$, если дѣйствуетъ грузъ, не мѣняющій своей величины, ибо при этомъ $K_{min} = K_{max}$. Наоборотъ, при нагрузкѣ, которая переходитъ нуль, получимъ $K_{min} = -\alpha K_{max}$, т. е. $K = K_0\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ или $K < K_0$. Если $K_{min} = -K_{max}$, что обыкновенно и имѣетъ мѣсто въ практическихъ случаяхъ, то будемъ имѣть $K = 0{,}5 K_0$, т. е. въ данномъ случаѣ безопасное напряженіе должно быть взято въ 2 раза меньше. Fetmayer приводитъ слѣдующую таблицу допускаемыхъ напряженій K для разныхъ $K_{min} : K_{max}$ (въ kgr. на кв. m/m.)

Отношеніе $\frac{K_{min}}{K_{max}}$	Сварочное желѣзо	Литое желѣзо въ брускахъ	Литая сталь въ брускахъ	Отношеніе $\frac{K_{min}}{K_{max}}$	Сварочное желѣзо въ брускахъ	Литое желѣзо въ брускахъ	Литая сталь въ брускахъ
1.0	1.04	12.00	17.2	-0.1	5.9	6.5	7.7
0.9	9.9	11.4	16.1	-0.2	5.5	6.1	7.7
0.8	9.5	10.8	16.0	-0.3	5.2	5.8	6.6
0.7	9.0	10.3	14.0	-0.4	4.9	5.4	6.1
0.6	8.6	9.7	13.0	-0.6	4.4	4.8	5.4
0.5	8.1	9.2	12.1	-0.7	4.1	4.5	5.0
0.4	7.7	8.7	11.3	-0.8	3.9	4.3	4.8
0.3	7.3	8.2	10.5	-0.9	3.6	4.0	4.6
0.2	6.9	7.7	9.7	-1.0	3.4	3.8	4.4
0.1	6.6	7.3	9.0	–	–	—	—
0.0	6.2	6.9	8.3	–	–	—	—

Въ этой таблицѣ литая сталь давала, при обычныхъ статическихъ испытаніяхъ, временное сопротивленіе около $K = 60$ kgr. на кв. m/m. Бахъ для желѣза, стали и чугуна принимаетъ безопасное напряженіе для трехъ случаевъ $K_{min} = K_{max.}$, $K_{min} = 0$ и $K_{min} = -K_{max.}$, изъ формулы (q) отношеніе безопасныхъ напряженій для этихъ случаевъ получается какъ 3 : 2 : 1[1]

До сихъ поръ основаніемъ для разсчета брались допустимыя (безопасныя) напряженія; это можетъ имѣть мѣсто при простыхъ явленіяхъ, напр., растяженіи, сдви-

1) Что касается чугуна, то Бахъ выводитъ еще вліяніе обработки (снятіе корки) и формы поперечнаго сѣченія.

га и т. д. Переходя к случаям сложным, необходимо оговорить, что здесь могут быть несколько оснований: 1) чтобы наибольшее нормальное напряжение не превосходило известных пределов, 2) чтобы наибольшая деформация (растяжение, сжатие) не превосходила известных пределов, 3) чтобы наибольшія касательныя напряженія не превосходили известных пределов. Во второй части курса этот вопрос будет разсмотрен более подробно. Здесь необходимо указать, что положив в основу одно из условий 1-3, найдем различные результаты.

Выше была выведена форм. St.-Venant, которая всецело основана на 2-м положеніи и пользуется наибольшим распространеніем в настоящее время. Сказать решительно какому именно положенію необходимо оказать предпочтеніе нельзя и лучше при разсчете ответственных частей определять и напряженія и деформаціи, следя, чтобы по возможности и те и другія не выходили за известные допустимые пределы. В приведенной таблице Tetmajer'а безопасныя напряженія понимаются как возможныя и при динамическом приложеніи внешних сил. Само собою понятно, что при ударах напряженія должны быть еще понижены в зависимости от величины этих ударов и в таблице такія напряженія помещены быть не могут. К числу сил, действующих на подвижныя части сооруженій необходимо прибавить силы инерціи. Оне могут достигать больших размеров и при значительной скорости оказаться опасными. Как пример возьмем случай подъемного крана. В начале подъема какого либо груза скорость последняго равна нулю. В небольшой промежуток времени она достигает значенія v и след. в этот період преодолевается вес груза P и его инерція. След. кран и цепь подвергаются действію растягивающей силы $Q = P + \frac{P}{g} W$, где W ускореніе движенія. Чем короче промежуток времени, в ко-

торый достигается равномерное движеніе, тем большее вліяніе оказывает сила инерціи. В качестве другого примера можно привести случай сцепленія двух валов: ведущій, вращающійся с некоторой скоростью n оборотов в 1 мин., должен, увлекая с собою ведомый вал, до сих пор находившійся в покое, преодолеть инерцію всех масс связанных с ведомым валом. Если, обращаясь к 1-му случаю, нормальная скорость подъема будет C, а переменную, в період пока не достигнута величина C, назовем через v, то сила инерціи вообще будет $q = \frac{P}{g} \cdot \frac{dv}{dt}$, пусть $v = f(t)$, тогда $q = \frac{P}{g} f'(t)$. Можно принять, что $v = \alpha t$, тогда $W = \alpha$. Вопрос в каждом частном случае должен быть решен по спеціальному заданію.

Точно также, если представить себе груз, движущійся по балке со скоростью v. В каждый данный момент в сеченіи, над которым находится груз, будет действовать не только сила веса груза, но и его центробежная сила. Величина последней будет зависеть не только от v, но и от радіуса ρ кривизны упругой кривой, т. е. $q = \frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{\rho}$.

Как показывают опыты, степень безопасности бруска, подвергаемаго действію какой либо силы P, зависит в значительной мере от того, находится ли матеріал под под напряженіем постоянным. Опыты Wöhler'а указывают, что вліяніе постоянной нагрузки менее вредно отражается на степени сопротивляемости матеріала, нежели переменной.

В этой таблице приведены напряженія, при которых происходил излом брусков только после очень большого числа повтореній.

Матеріалы	K_{max} кг/кв. мм	K_{min} кг/кв. мм	Разность
Железо	+24,5	0	24.5
тоже	+32,8	+17.85	14.05
Стальн. пруж. незакаленная	+37,0	0	
тоже	+52,0	+17,85	

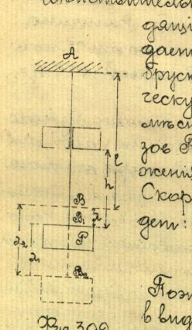
Как видим в тех случаях когда $K_{min} = 0$, т. е. когда, так сказать, нагружался каждый разъ брусокъ не нагруженный, предѣльное напряженіе ниже, нежели въ опытахъ, когда $K_{min} = 17.35$ кг/кв.м.м, когда на брусокъ дѣйствовалъ постоянный грузъ, вызывавшій постоянное напряженіе $K_{min} > 0$.

Если поставить опытъ такъ, чтобы K[illegible] 0 [illegible] одинаковыми, то ломаются скорѣе [illegible] въ которыхъ $K_{min} = 0$. Напримѣръ:

Матеріалъ	K_{max}	K_{min}	Разность	Число приложеній	[illegible]
Желѣзо Phoenix	+32,6	0	32,6	106 910	[illegible]
" — "	+32,6	+14.3	17,8	237340[illegible]	
" — "	+32,6	+17.85	14,85	4000000	нѣтъ
осевая сталь	59,3	0	59,3	13741	сломался
Круппъ	59,3	+29,6	29,7	12000000	нѣтъ

Явленіе здѣсь можетъ быть объяснено тѣмъ, что съ уменьшеніемъ разности колебаній, сопротивленіе [illegible] растетъ. Подобное явленіе замѣчается не только при статической но и при динамической нагрузкѣ.

Дѣйствительно пусть на брусокъ (фиг. 309) находящійся подъ растяженіемъ грузомъ P, падаетъ грузъ Q. Первоначальная длина бруска $AB = l$. Грузъ P вызываетъ статическую деформацію $BB_1 = \lambda$. При совмѣстномъ дѣйствіи, послѣ удара, грузовъ P и Q конецъ B опускается до положенія B_2. Полное удлиненіе $BB_2 = \lambda$. Скорость (общая) въ моментъ удара будетъ:



Фиг. 309.

$$v_0 = \frac{Q}{P+Q}\sqrt{2gh}$$

Поэтому ур-іе живыхъ силъ напишется въ видѣ

$$-\frac{Q}{2g(P+Q)}\left\{\frac{Q}{P+Q}\right\}^2 2gh = (P+Q)\lambda_1 - \frac{\omega l}{2E}(k_2^2 - k^2)$$

Здѣсь $\lambda_1 = \lambda_2 - \lambda$ путь совмѣстнаго движенія грузовъ P и Q, k_2 — напряженіе въ моментъ достиженія наибольшаго удлиненія λ_2, и k — статическое напряженіе, вызываемое грузомъ P. Производя сокращеніе, найдемъ:

$$k_2^2 - k^2 = \frac{2(P+Q)E\lambda_1}{\omega l} + \frac{2Q^2hE}{\omega l(P+Q)} = \frac{2E(P+Q)(\lambda_2-\lambda)}{\omega l} + \frac{2Q^2hE}{\omega l(P+Q)}$$

Принимая во вниманіе, что $1/_l E\lambda_2 = k_2$, $1/_l E\lambda = k$ и называя $Q:\omega = k_1$ — напряженіе которое вызывалъ бы грузъ Q, дѣйствуя статически, получимъ:

$$k_2 = k + k_1\left\{1 + \sqrt{1 + \frac{2Eh}{k_1 l}\cdot\frac{1}{1+P/Q}}\right\} \quad \ldots \quad (a)$$

Изъ выраженія (a) усматриваемъ, что напряженіе k_2 зависитъ отъ отношенія $P:Q$. Чѣмъ больше оно, т.е. чѣмъ больше вѣсъ статически дѣйствующаго груза по сравненію съ грузомъ живымъ (прилагаемымъ ударомъ) тѣмъ медленнѣе растетъ результирующее напряженіе k_2.

Полагая $h = 0$, т.е. если не имѣетъ мѣсто паденіе, а Q прикладывается къ бруску динамически, то:

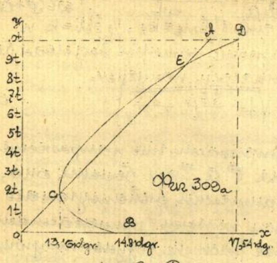
$$k_2 = k + 2k_1 \quad \ldots \quad (b)$$

Изложенное только что объясняетъ почему вліяніе толчковъ и сотрясеній отъ поѣзда замѣтнѣе при проходѣ мостовъ болѣе легкихъ.

Возьмемъ для примѣра желѣзный брусокъ съ поперечнымъ сѣченіемъ $\omega = 2000$ кв$^{m}/_{m}$, длиною $l = 5000^{m}/_{m}$. Падающій съ высоты $h = 10^{m}/_{m}$ грузъ $Q = 2000$ клгр. Вычисляя по формулѣ (a) напряженіе k_2 для различныхъ значеній P отъ 0 до 10т, получимъ таблицу:

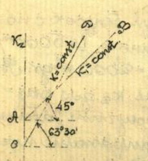
P	k_2 клг.	Приращенія k_2
0	14,8	1,62
0,5	13,98	0,82
1	13,52	0,36
2	13,16	0,00
3	13,24	0,08
4	13,58	0,42
5	14,06	0,90
6	14,64	1,48
7	15,30	2,14
8	16,00	2,84
9	16,74	3,58
10	17,54	4,38

Наименьшее напряженіе получимъ здѣсь для $P:Q = 1$ и по отношенію къ нему взяты приращенія k_2. На фиг. 309a кривая BCED даетъ измѣненія напряженій k_2 вмѣстѣ съ возрастаніемъ отношенія P отъ 0 до 10т. Прямая OA даетъ измѣненіе отношенія $P:Q$. Мы видимъ, что отъ 0 до 2 происходитъ убываніе k_2. Затѣмъ возрастаніе этой величины идетъ быстрѣе возрастанія отношенія $P:Q$ отъ точки E, а затѣмъ k_2 растетъ медленнѣе.



Фиг. 309а

Если построить ур-іе (b) на координатныхъ осяхъ k_2 и k_1 (k) (фиг. 310), то получимъ прямую AB при условіи, если $k_1 = const.$ и CD, если $k = const.$ Болѣе крутой подъемъ прямой CD (63°30') указываетъ, что возрастаніе напряженія k_2 вмѣстѣ съ увеличеніемъ отношенія Q : P идетъ гораздо быстрѣе, что видно и изъ ур-ія (a). Этотъ результатъ подтверждается и опытомъ Wöhler'а. Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что въ случаѣ приложенія къ бруску внѣшней силы Q, общее напряженіе можетъ быть выше, въ томъ случаѣ если былъ уже напряженъ. Само собою понятно, что это обстоятельство имѣетъ свой предѣлъ приложенія, а именно общее результирующее напряженіе не должно превосходить предѣла упругости. Далѣе слѣдуетъ обратить вниманіе на форму поперечнаго сѣченія бруска. Во-первыхъ имѣетъ существенное значеніе наличность рѣзкихъ переходовъ поперечныхъ сѣченій. Въ этомъ отношеніи весьма любопытны опыты произведенные еще Kirkaldy.



Фиг. 310

Изъ одного и того же куска стали были приготовлены три бруска сплошного кругового сѣченія, изображенные на фиг. 311. Брусокъ (II) имѣлъ выточку, діаметръ которой былъ d_1, равный діаметру бруска (III). Больший діаметръ бруска (II) равнялся діаметру бруска (I). Наблюдая над указан-

Фиг. 311.

ными брусками явленіе растяженія, Kirkaldy получилъ результаты, приведенные въ таблицѣ.

Бруски	Діаметръ	Напряженіе при разрывѣ кг на 1 кв. $^m/_m$	Удлиненіе при разрывѣ
I	$d = 25,4$	50,25	51%
II	$d_1 = 18,5$	69,15	8,2%
III	$d = 18,5$	50,20	49%

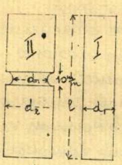
Изъ таблицы видно, что брусокъ II на 19 kдг. прочнѣе I и III, но за то онъ менѣе пластиченъ ($i_2 = 8,2\%$)

Теоретическое объясненіе этому явленію можно дать слѣдующее: выше указывалось, что при достиженіи растягивающей силой нѣкоторой величины въ одномъ изъ сѣченій бруска образуется перехватъ, который съ возрастаніемъ силы увеличивается, т. е. матеріалъ въ этомъ сѣченіи как бы течетъ; это теченіе частицъ возможно только при условіи, что всѣ частицы матеріала подвергаются дѣйствію одинаковыхъ напряженій. Так это и происходитъ въ I и III брускахъ. Въ брускѣ II напряженіе матеріала не можетъ быть постояннымъ для всѣхъ сѣченій по длинѣ. Въ сѣченіяхъ выточки напряженіе $k_1 = \frac{4P}{\pi d_1^2}$ въ остальныхъ же $k = \frac{4P}{\pi d^2}$, слѣд. $k_1 > k$. Поэтому теченіе матеріала должно происходить въ выточкѣ; но свободному перемѣщенію частицъ выточки, очевидно, будутъ препятствовать частицы матеріала, принадлежащія утолщенной части бруска (на чертежѣ заштрихованной), какъ не подверженныя еще напряженію, соотвѣтствующему явленію теченія. Поперечное сжатіе (при образованіи шейки) будетъ затруднено, а это влечетъ за собою повышеніе сопротивляемости.

Деформація i_2 въ свою очередь, должна быть меньше, а слѣд. матеріалъ является какъ бы менѣе пластиченъ. Не трудно предсказать, что изъ двухъ брусковъ II и III послѣдній долженъ слабѣе сопротивляться динамическому дѣйствію силы.

Для наглядности приведем примѣръ изъ опытовъ, произведенныхъ въ механической лабораторіи Харьковскаго Технологическаго Института.

Были взяты два бруска, желѣзо которыхъ характеризовалось данными: k_2 (сопротивленіе при разрывѣ) = 39 klgr. на m/m², k_1 (предѣлъ упругости) = 21 klgr.; E = 19800 klgr. на m/m². Бруски (фиг. 312) имѣли размѣры: l = 210 m/m [1]; d_1 = 15 m/m, d_2 = 21,2 m/m; высота выточки = 10 m/m.



Фиг. 312.

Какъ мы видѣли раньше, работа внутреннихъ силъ до предѣла упругости можетъ быть представлена выраженіемъ: $T = W\frac{k^2}{2E}$, гдѣ $W = \omega l$, т.е. объему бруска. Отсюда 1 кб. m/m матеріала можетъ произвести работу равную: $t = \frac{k^2}{2E}$.

В настоящемъ случаѣ надо различать два періода: до и за предѣломъ упругости:

1. До предѣла упругости. При указанныхъ размѣрахъ для 1го бруска:

$$T_1 = \frac{21^2 \frac{\pi}{4} 15^2 \cdot 210}{2 \cdot 19800} = 411,81 \text{ klgr. m/m.}$$

для 2го бруска:

$$T_2 = \left\{\frac{\pi \cdot 21,2^2}{4} \cdot 200 \left(\frac{21}{2}\right)^2 \frac{1}{2 \cdot 19800} + \frac{\pi \cdot 15^2}{4} 10 \cdot 21 \frac{1}{2 \cdot 19800}\right\} =$$

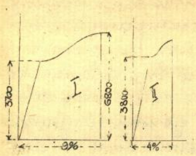
$$= \frac{21^2}{2 \cdot 19800}\left\{\frac{\pi \cdot 21,2^2}{4 \cdot 4} 200 + \frac{\pi \cdot 15^2}{4}\right\} = 214,53 \text{ klgr. m/m.}$$

ибо напряженіе в сѣченіи d_2 вдвое меньше, нежели в сѣченіи выточки. Итакъ, до предѣла упругости, брусокъ I можетъ выдержать почти вдвое большій ударъ.

2) За предѣломъ упругости пришлось пользоваться діаграммами. При этомъ, т.к. с началомъ тренія, в перехватѣ начинается, собственно говоря, разрушеніе, то площадь діаграммы измѣрялась лишь до ординаты соотвѣтствующей наибольшему грузу.

Непосредственное измѣреніе дало для брусковъ площади F_1 и F_2, переводя которыя по принятымъ масштабамъ в klgr. m/m, было получено:

1) За исключеніемъ головокъ.



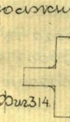
Фиг. 313.

для бруска Iго = 90700 klgr. m/m.
" —— " IIго = 2130 " — "

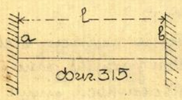
Так. обр. общее сопротивленіе Iго бруска до разрушенія въ 42,5 раза больше нежели для IIго, несмотря на то, что массы ихъ находятся в отношеніи

$$21 : 41 \cong 0,51$$

Описанное явленіе имѣетъ весьма большое значеніе с той точки зрѣнія, что нельзя при разсчетахъ довольствоваться лишь назначеніемъ безопаснаго напряженія. Дѣйствительно, присутствіе выточки дѣлаетъ матеріалъ какъ бы болѣе крѣпкимъ, но при этомъ менѣе пластичнымъ, т.е. дающимъ слишкомъ малыя деформаціи. Во вторыхъ самая форма поперечныхъ сѣченій точно также имѣетъ извѣстное вліяніе на сопротивляемость матеріала. Напр. для растяженія наиболѣе раціональны формы сѣченія с равномѣрнымъ распредѣленіемъ массъ по отношенію к центру тяжести сѣченія какъ кругъ, квадратъ и т.п. В удлиненныхъ формахъ, напр. треугольникъ, труднѣе получить равномѣрное распредѣленіе напряженій. Точно также для брусьевъ, подверженныхъ крученію в формахъ некруглаго сѣченія напряженія по периферіи измѣняются очень рѣзко отъ 0 в вершинахъ (квадратъ, прямоугольникъ) до maximum'а в точкахъ ближе всего расположенныхъ к оси. В углахъ входящихъ напряженіе достигаетъ громадныхъ величинъ, почему такіе рѣзкіе переходы линій не должны допускаться. В этихъ случаяхъ необходимы плавные переходы, какъ это, напр. имѣетъ мѣсто на фиг. 314 во входящихъ углахъ тавроваго сѣченія (пунктиромъ).


Фиг. 314.

Напряженія, вызываемыя измѣненіемъ температуры. На основаніи физических свойств тел изменять свои размеры при переходе от данной температуры к высшей или низшей, следует при разсчетах всегда принимать во внимание возможные колебания температуры. Пусть стержень ab (фиг. 315) находится между двумя неизменными и неподвижными плоскостями A и B; при данной температуре t_0 он плотно зажат между ними, но никакого долевого усилия (сжатия или растяжения) не испытывает.



Фиг. 315.

Пусть при всех прочих прежних условиях температура повысилась до t_1°. Очевидно, свободный стержень должен получить приращение длины равное $\lambda = l_1 - l = l[1+\alpha(t_1-t_0)] - l = \alpha(t_1-t_0)l_1$, если α — линейный коэффициент расширения при нагревании на 1°. Т.к. разстояние l между плоскостями A и B не может быть изменено, то и стержень ab получает сжатие $i = \frac{\lambda}{l} = \frac{\alpha}{l}(t_1-t_0)l$, чему соответствует возникновение напряжений сжатия

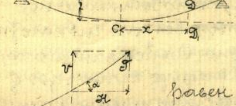
$$k = \alpha E(t_1-t_0)$$

Наблюдения показывают, что коэфф. α — величина переменная вместе с t. Напр., в пределах от 0° до 500°C она имеет следующия значения:

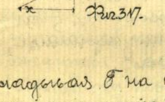
Материалы:	
Сварочное железо	$\alpha = 0{,}000011691 + 0{,}0000000047t$
Литое	$\alpha = 0{,}000011475 + 0{,}0000000053t$
Литая сталь	$\alpha = 0{,}000011181 + 0{,}00000000586t$
Чугун для маш. отливок	$\alpha = 0{,}000009794 + 0{,}00000000566t$
Медь	$\alpha = 0{,}00001607 + 0{,}00000000403t$
Бронза	$\alpha = 0{,}000017044 + 0{,}00000000434t$
Латунь	$\alpha = 0{,}000017487 + 0{,}00000000879t$
Алюминий	$\alpha = 0{,}000023536 + 0{,}00000000707t$

Пусть $t_0 = 0$ и $t_1 = 50^\circ C$; для литого железа напр., найдем: $k = (0{,}00001475 + 0{,}0000000053 \times 50)20000 . 50 = 11{,}74$ кгр. $^{m}/_{m^2}$ т.е. напряжение весьма солидное

Отсюда видно, что влияние температуры очень значительное и во избежание таких больших напряжений надо давать возможность свободного расширения или принимать меры к недопущению значительных деформаций. Само собою понятно, что при понижении температуры ниже нормальной t° дополнительные напряжения будут возникать в тех частях которым препятствуют сжиматься. В этом случае появляются напряжения сжатия. Колебания температуры могут лишь достигать 80° и более, напр. −40°C зимою и +40°C летом. Телеграфная проволока и, вообще, провода для передач подвергаются при понижении температуры значительным дополнительным напряжениям.



Фиг. 316



Фиг. 317.

Пусть (фиг. 316) между пунктами A и B, при AB = l, имеется подвешенная проволока с поперечным сечением ω, вес погонной единицы равен q кгр. В произвольной точке D имеется натяжение проволоки T, вызывающее напряжение материала $k = T:\omega$. Раскладывая T на слагающия вертикальную V и горизонтальную H, найдем (фиг. 317)

$$H = T\cos\alpha \quad \text{и} \quad V = T\sin\alpha$$

Если положить, что при малых провесах дуга CD мало отличается по длине от своего проложения CD_1, т.е., принять $\overline{CD_1} = CD$, то очевидно из условия равновесия, что $V = T\sin\alpha = xq$. След. $\operatorname{tg}\alpha = xq : T\cos\alpha$. Но с другой стороны $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$, а потому имеем:

$$y = \frac{1}{2H} q x^2,$$

т.е. кривая ACB есть парабола с параметром $H:q$. Сила H, очевидно, постоянна для любого сечения, что вытекает из условия отрезка CD, ибо в сѣченіи C дѣйствует растягивающее усиліе T_1, направленное горизонтально. Итак ур-іе кривой будет:

$$x^2 = 2\frac{T_1}{q}y$$

Стрѣла провѣса равна $f = \frac{ql^2}{8T_1}$

При заданных условіях опредѣляется напряженіе матеріала

$$k = \frac{T_1}{\omega} = \frac{ql^2}{8f\omega}$$

При пониженіи температуры, уменьшается длина дуги ACB, почему проволока подтягивается и слѣд. уменьшается стрѣла провѣса f и увеличивается k. Для полученія этой величины надо найти соотношеніе между длиною части параболы ACD и соотвѣтствующаго провѣса f.

При желаніи принять во вниманіе увеличеніе напряженій от изгиба, который, конечно, имѣет мѣсто при провѣсѣ всякаго гибкаго тѣла, сдѣлать это не трудно. Дѣйствительно, в любом сѣченіи D (фиг. 316) радіус кривизны ρ извѣстен, а потому извѣстно и напряженіе $k_b = \pm\frac{1}{2\rho}E\delta$. Здѣсь δ - діаметр проволоки. Наименьшее значеніе k_b будет имѣть у вершины, гдѣ ρ достигает своего minimum'a.

Дерево, камни.

До сих пор имѣлись в виду, главным образом металлы. Считаем не лишним сказать нѣсколько слов о других строительных матеріалах, имѣющих болѣе или менѣе значительное распространеніе, а именно о деревѣ и камнях.

Дерево по своему строенію принадлежит к числу матеріалов весьма неоднородных. Сопротивляемость внѣшним усиліям зависит от способа приложенія этих внѣшних сил. Так, представляя довольно значительную прочность растяженію в случаѣ если таковое производится

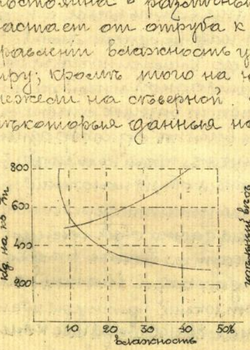
вдоль волокон, дерево имѣет ничтожное сопротивленіе растягивающим усиліям, дѣйствующим поперек. Обратное имѣет мѣсто для сил скалывающих. Но и, помимо того, механическія свойства дерева зависят от степени его влажности, от расположенія образца в стволѣ дерева, как в смыслѣ положенія этого образца в поперечном сѣченіи, так и от разстоянія сѣченія от уровня земли. Представляя матеріал удобный для многих сооруженій, дерево, т.е. нѣкоторыя породы его, напр. сосна, пихта, дуб подвергались изслѣдованію в лабораторіях Европы и Америки. Так как несомнѣнно на качества дерева оказывает вліяніе состав почвы и подпочвы, высота положенія над уровнем моря, степень густоты лѣса и др. климатическія условія, то, конечно, испытанія одной и той же породы, напрм. сосны, взятой из разных мѣст земного шара не могли дать вполнѣ однообразные результаты. Во всяком случаѣ, тѣм не менѣе, возможно установить нѣкоторыя общія положенія, которыя наблюдаются при испытаніи дерева.

В сооруженіях деревянныя части обыкновенно подвергаются изгибу и сжатію. Болѣе рѣдко встрѣчаются случаи когда, когда внѣшнія силы вызывают только растяженіе (длинныя штанги) или крученіе, (деревянные валы, водяные колеса и т.п.) Изслѣдованія показали, что вообще дерево сопротивляется усиліям растягивающим вдоль волокон лучше, нежели силам сжимающим. Напр. Tetmayer нашел (средніе цифры)

Матеріал	Растяженіе		Сжатіе	
	Модуль	Среднее времен. сопротивленіе	Модуль	Среднее времен. сопротивленіе
Пихта	12011	6,02	11090	2,76
Ель	11330	5,53	10020	2,93
Лиственница	12990	7,10	11400	3,21

В виду такой разности, обыкновенно при испытаніи дерева особое значеніе придают сопротивленію его сжатію; последнее обстоятельство между прочим весьма удобно, т. к. испытаніе брусков дерева на растяженіе не легко. Дерево трудно устанавливать в захватах без значительного смятія на поверхностях; если же боковое нажатіе будет невелико, то образец выползает из захватов.

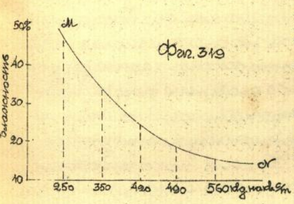
Выше упоминалось, что на механическія свойства дерева вліяет расположеніе образца в стволѣ дерева, как в смыслѣ разстоянія от комля, так и его направленіе от оси к периферіи. Весьма существенным фактором является степень влажности. Даже в свѣже срубленном деревѣ она не постоянна в различных мѣстах ствола и возрастает от отруба к комлю. В поперечном направленіи влажность убывает от периферіи к центру; кромѣ того на южной сторонѣ она больше нежели на сѣверной. На фиг. 318 показаны нѣкоторыя данныя над шотландской сосной (проф. Bauschinger). На оси абсцисс отложена влажность в процентах. Кривая CD показывает измѣненіе удѣльного вѣса вмѣстѣ с увеличеніем влажности. На той же фигурѣ кривая AB указывает временное сопротивленіе раздробленію этого дерева. Как видно оно увеличивается с убываніем влажности.



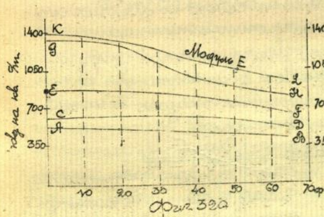
Фиг. 318.

Аналогичные результаты получил Jonson для американской сосны. Кривая NM на фиг. 319 точно также дает соотношеніе между степенью влажности и временным сопротивленіем раздробленію. Как видно из обѣих фигур, крѣпость дерева сильно падает вмѣстѣ с увеличеніем

влажности. При 10-15% влажности сопротивленія получаются весьма значительныя, хотя меньше, конечно, нежели дерево абсолютно сухое. Но т. к. в сооруженіях абсолютно сухое дерево не встрѣчается, то приходится имѣть в виду такую степень влажности, которая может считаться обычной. Наблюденія показывают, что дерево, постепенно сохнущее на воздухѣ, в концѣ концов, пріобрѣтает степень влажности довольно постоянную, а именно, около 15%. Само собою понятно, что если дерево попадает на долгое время в очень влажную атмосферу, то и собственная его влажность повысится.



Из своих опытов Jonson и др. изслѣдователи получили, что механическія качества дерева, вообще, ухудшаются от комля к отрубу. На фиг. 320 по оси абсцисс отложены футы по лѣвой оси ординат кгр. на $см^2$ для напряженій, а на правой — кгр. на $см^2$ для модуля E. Кривыя обозначают:



Фиг. 320

KL — модуль упругости E;

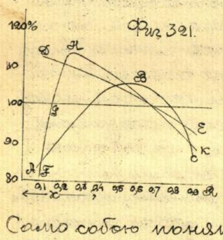
GH — временное сопротивленіе растяженію;

EF — времен. сопрот. по поперечн. скалыв.;

CD — предѣл упругости при изгибѣ;

AB — временное сопротивл. при сжатіи.

Как видно из фигуры, всѣ кривыя падают с уличенiем высоты положенiя образца от комля к вершинѣ. При этом особенно сильно замѣтно паденiе для кривой FH, тогда как сопротивленiе сжатiю измѣняется гораздо меньше. На фиг. 321 по оси абсцисс отложены части радiуса поперечнаго сѣченiя (в десятых долях). По оси ординат относительныя величины напряженiй в %%. Кривыя показывают зависимость напряженiй от разстоянiя от центра, а именно:



Фиг. 321.

ABC — кривая врем. сопр. растяж
DE " — " — " — " сжатiю
FHK — модуль упругости E.

Само собою понятно, что ординаты дают не абсолютное, а относительное значенiе и кривыя отнесены к средней линiи 100%, чтобы имѣть представленiе об измѣненiи коэффицiентов с величиною x. В общем наблюдается, что наиболѣе прочная часть матерiала приходится между ~ 0,2 – 0,5 R.

Не смотря на указанныя особенности дерева, оно тѣм не менѣе представляет собою во многих случаях весьма цѣнный строительный матерiал. Дѣйствительно, обладая значительной упругостью, оно в тоже время оказывает достаточную крѣпость![1] Чанка при изслѣдованiи южнаго Т. иросна нашел среднiя данныя из 12 опытов:

	Сжатiе	Изгиб	
Удѣльный вѣс (15% влаж.)	0,397	0,399	Отнесено к
Предѣл упругости	2.00 kg.	2.68	влажности в
Временное сопрот.	3.17 "	4.98	15%

1) Если принять во вниманiе только удѣльный вѣс дерева, то можно сказать, что по отношенiю к этому фактору дерево по крѣпкости мало отличается от желѣза. Дѣйствительно, врем. сопрот. желѣза около 45 kgr. на $^m/_m{}^2$, дерева (пихта) k_z = 3 kg. т. е. в 15 раз меньше, но зато удѣльный вѣс желѣза относительно такового же сосны как 7,8 : 0,4 ≅ 19,5.

Модуль упругости E 9910 | 8910 }
Удѣльная работа 0,00208 $\frac{kg}{mm}$ 6,91 $\frac{kg}{mm}$

Удѣльная работа (единичная) отнесена к предѣлу упругости. Полная работа при изгибѣ отнесена к объему бруска 100 × 100 × 1500 $^m/_m{}^3$ при предѣлѣ упругости. Дерево легко поддается скалывающим усилиям, если таковая направлена вдоль волокон и — растяженiю — поперек волокон, почему необходимо избѣгать такого распредѣленiя напряженiй.

Напр., прямые опыты над срѣзанiем вдоль волокон дали:

Сосна	0,2 до 0,29	kgr. на $^m/_m{}^2$
Ель	0,187 " 0,256	" — "
Дуб	0,525 " 0,675	" — "

Сопротивленiе дерева срѣзанiю поперек волокон гораздо больше, но в виду двойственности касательных сил, приходится разсчитывать на напряженiе вдоль волокон. Т. напр., при опредѣленiи вала на крученiе, касательныя напряженiя распредѣляются в пл-сти сѣченiя, т. е. поперек волокон, но вслѣдствiе двойственности этих напряженiй приходится принимать напряженiя, которыя развиваются в направленiи параллельное оси.

Естественные и искуственные камни.

Естественные камни, примѣняемые в строительном дѣлѣ главным образом: граниты, песчаники и известняки. Не смотря на такое краткое перечисленiе употребляемых пород, невозможно установить какiя либо опредѣленныя цифры, характеризующiя породу с точки зрѣнiя ея механических свойств. Дѣйствительно, общее названiе в родѣ, напр. песчаника, гранита еще очень мало выясняет данный матерiал, ибо сами по себѣ граниты, песчаники и т. д. весьма разнообразны в зависимости от геологическаго возраста, строенiя, степени однородности и т. п.

В сооруженiях камени б. части обычно подвергают дѣйствію только силъ сжимающихъ, ибо срѣзанію и растяженію каменныя породы сопротивляются значительно слабѣе, нежели сжатію. Поэтому деформаціи изгиба являются для камней неудобными. Напр. в одном из опытов над нѣкоторыми породами гранита Bauschinger нашел:

Времен. сопр. разрыву		0,325	до 0,445	kldgr $^{m}/_{m}$
"	" срѣзанію	0,93	" 1,25	" — "
"	" раздроблен.	10,2	" 10,3	"

Совершенно понятно, что при опредѣленіи механических свойств камней, в большинствѣ случаев ограничиваются испытаніем на сжатіе (до раздробленія). В виду неоднородности строенія камня, можно à priori сказать, что при сжатіи зависимость между деформаціями и напряженіем отклоняется от закона Гука, а выражается болѣе сложно; предѣл упругости лежит значительно выше предѣла пропорціональности и совпадает с временным сопротивленіем. Опредѣленіе модуля упругости становится условным. Нѣкоторые считают возможным находить его слѣд. путем. Пусть OA представляет кривую (фиг. 322), при чем по оси ординат откладываются напряженія, а по оси абсцисс — сокращенія длины λ. Проводим через начало координат касательную OC к кривой OA. В точкѣ E, для

Фиг. 322

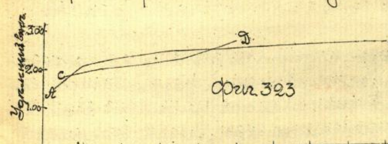
которой имѣем $OE = 0{,}001h$ (если h первоначальная высота образца) проводим ординату до пересѣченія с касательной в точкѣ B. Тогда:

$$1000 \cdot OD = 1000\,EB = E$$

Bauschinger опредѣлил модуль E из опытов на изгиб и получил значенія, практически совпадающія с полученными только что указанным путем. На основаніи наблюденій

можно сказать, что граниты обладают наибольшим и известняки наименьшим сопротивленіем, хотя существуют и среди известняков весьма крѣпкія породы. С другой стороны, наблюдают, что мелкозернистые камни обладают большим сопротивленіем по сравненію с крупнозернистыми; но и здѣсь также наблюдаются значительныя отступленія. До извѣстной степени для известняков и песчаников справедливо правило, что сопротивленіе раздробленію увеличивается с увеличеніем удѣльнаго вѣса, причем для известняков такое соотвѣтствіе наблюдается чаще.

Напр. на фиг. 323 AB показывает кривую измѣненій коэффиціента K_2, увеличеніе удѣльнаго вѣса. Кривая CD дает то-же для песчаников. Данныя получены при изслѣдованіи нѣкоторых французских пород.



Фиг. 323

В ниже приведенной таблицѣ даны результаты нѣкоторых русских пород, изслѣдованных в механической лабораторіи Института Путей Сообщенія, Варшавскаго Округа Путей Сообщенія и в механической лабораторіи Томскаго Технологическаго Института

Названіе пород	Удѣльный вѣс	Насыщеніе в %%	Временное сопрот. разрыву	Место испытаній
Гранит финлянд. кр.-зерн. розов.	2.62	0	22,10 kg/mm	
" — " — " — мел.-зерн. красн.	2.63	—	16,9 "	
" — " валаамск. " — " — " — "	2.60	—	6,27 "	
" — " — " — " средн.-зерн. — " —	2.50	—	20,55 до 25,07	С. Г. Бурре
" — " рогов.-обман. кр.-зерн. свѣтлый	2.62	0,166	19.43	
" — " біотит. ср.-зерн. красн.	2.62	0,053	16.81	
Гранит. от гнейс мелко зерн. крас.	2.62	0,236	27.39	

Амфиболитов. сланец черн.	2.97	0.035	30.65	Варюшово
Песчаник кварцитов. мл.-зерн. сѣр.	2.57	0.135	26.85	
" " ср.-зерн. красн.	2.53	0.758	18.687	
" " порист. кр.-зерн.	2.50	1.196	7.27	
Известняк	2.35	2.35	12.042	
Доломит кристалл. темн.-сѣрый	2.67	0.136	9.266	
Діабаз (сибирскій)	2.97	0.15	11.80	
Песчаник известков. м.-з. свѣтл.-сѣр.	2.024	9.30	1.80	Бомск—
	2.03	9.60	5.17	
Кварцит	2.6	0.433	17.148	
	2.6	0.349	17.228	
Известняков. песчаник	2.31	3.73	5.47	
	2.42	2.53	3.87	
Гранит біотитов. рогов. обманк.	2.57	0.3	10.06	

Каменная порода, подвергаясь дѣйствію атмосферы, может до извѣстной степени разрушаться, если какая либо составная часть измѣнитъ свой состав. Напр., под дѣйствием воды, могут выщелачиваться растворимые в ней элементы и так. обр., если можно так выразиться, состав самой породы измѣнится, степень однородности получается другая. Напр., в гранитах разлагается полевой шпат, слюда; камень, как говорят вывѣтривается и, как результат такого вывѣтриванія, естественно дѣлается болѣе слабым; сопротивленіе может упасть весьма значительно. Точное опредѣленіе степени разрушенія может быть опредѣлено лишь микроскопическим путем. В лабораторіях же при испытаніях обыкновенно подвергают камень искусственному вывѣтриванію, которое заключается в повторном замораживаніи. Каждый камень даже весьма плотный (граниты діабазы) обладают до извѣстной степени пористостью. Высушив образец камня при $t = 100°C$ и взвѣсив его в абсолютно сухом состояніи, камень погружают в дистиллированную воду (15°C) и держат до полнаго насыщенія. Разность вѣсов насыщеннаго и сухого (абсолютно) камня

даст возможность опредѣлить пористость. Само собою понятно, что вода, попадая в камень при замерзаніи, дѣйствует на него разрушительным образом. На этом обстоятельствѣ основано искусственное вывѣтриваніе. Насыщенный камень помѣщают в холодильник ($t = -15°C$) и послѣ 4х часов вынимают и кладут в дистиллированную воду ($t = +15°C$), гдѣ в теченіи 2х часов камень оттаивает. Такую операцію повторяют до 25 раз. В нѣкоторых случаях дѣйствіе искусственнаго вывѣтриванія заключается весьма скоро на трещинах скрашиваніе углов и кантов. Осыпающуюся часть взвѣшивают и опредѣляют относительную потерю. Измѣренія показывают, что отдѣленіе частиц получается весьма незначительное и главным образом обращают вниманіе на факт скрашиванія и наличность трещин, что легко замѣчается помощью увеличительнаго стекла. Yanson считает описанный метод неудовлетворительным и рекомендует другой метод, а именно сухой образец камня (обыкновенно в формѣ куба) кладут (предварительно подогрѣтый) в кипящій раствор глауберовой соли. Послѣ 30 мин. кипяченія камень подвѣшивают на 24 часа на воздухѣ. Соль выкристаллизовывается на поверхности, ее удаляют. Операція повторяется иногда недѣлю и больше. Затѣм камень очищают от соли в проточной водѣ и опредѣляют потерю вѣса. На фиг. 324 приведены сравнительныя цифры для испытаній разных пород камней параллельно двумя способами. По оси ординат отложены относительныя потери вѣсов. Кривая

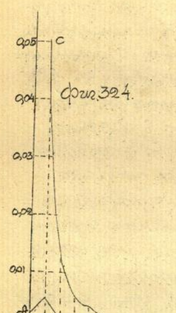
АВ соотвѣтствует замораживаніям

CD по способу кипяченія в Na_2SO_4

a - вывѣтренный уже песчаник

b - песчаник,

c – песчаник
d – мел.-зерн. известняк,
e – прес. кирпич.,
f – доломит
g – мелк.-зерн. гнейс
h – гранит



Фиг. 324.

Потеря при камнях более слабых при втором методѣ гораздо больше, отчего подвергаются опредѣлению с большей точностью.

Послѣ замораживанія камень опять подвергают раздробленію и сравнивая результаты с данными, полученными при испытании невымороженных образцов, наблюдают ослабленіе.

Для составленія более полного представленія слѣдует испытывать на раздробленіе и камни насыщенные водою. Опыт показывает, что обычно наблюдается нѣсколько меньшее сопротивленіе; конечно, это относится к породам обладающим более или менее замѣтной пористостью.

Наконец необходимо указать, что если в выработках камня наблюдается слоистость, то слѣдует подвергать камни раздробленію, подвергая их дѣйствію силы как поперек слоя, так и вдоль. Обычно замѣчается большая крѣпость при нагрузкѣ второго рода для сжатія, что видно из слѣдующей таблицы.

Камень	Удѣльный вѣс	Изгиб E	Временное сопротивленіе ⊥	Временное сопротивленіе ∥	Послѣ замораживанія ∥	Временное сопрот. растяжен.	Срѣзаніе ⊥	Срѣзаніе ∥
Гранит	2,05	2090	13,45	13,20	15,0	0,43	0,965	0,995
Песчаник	2,48	4490	5,7	5,82	4,75	0,408	1,03	0,505
Мрамор	2,23	—	7,77	5,18	8,6	0,324	0,515	0,378
Петр. песч.	2,2	612	6,32	5,45	5,54	0,14	0,358	0,212
Желѣзист.	2,2	637	5,34	5,88	4,2	0,238	0,448	0,198
Известняк	2,23	234	4,68	4,67	4,13	0,149	0,407	0,328

При срѣзаніи наблюдается, конечно, обратное. Данные для таблицы взяты из опытов Баушингера. Из искусственных камней наибольшее значеніе имѣет кирпич. Его механическія свойства зависят, конечно, от качества употребляемой для изготовленія глины, примѣси песку и способа обработки, т.е. формовки, прессованія, отжига.

Для кирпича, как вообще для камней, наиболѣе важным качеством является его сопротивленіе раздробленію. Цифра эта колеблется в весьма широких предѣлах. Хорошо обожженные кирпичи, машинной выдѣлки дают в сухом видѣ временное сопротивленіе иногда выше 5,00 klgr. на m/m² 1)

Так называемый „недопал" (недожог), да еще при ручной выдѣлкѣ имѣет сопротивленіе иногда ниже 0,50 klgr. на m/m². Как среднее значеніе принимают k = 1 klgr. на m/m². Сопротивленіе кирпича разрыву не велико, также как и срѣзанію, хотя послѣднее все таки выше и доходит до 0,8 klgr. на m/m². Дѣйствіе замораживанія на хорошо обожженный кирпич весьма ничтожно; конечно, при этом предполагается хорошо приготовленная масса.

Конец.

1) Мнѣ приходилось испытывать кирпич с напряженіем при раздробленіи в 7,5 klg. на m/m². При изслѣдованіи каменных матеріалов в Варшавском Округѣ Пут. Сооб. был кирпич клинкер (синій) с временным сопротивл. 17,574 klgr. m/m² при δ = 2,15, насыщеніе в 0,4%

Краткій указатель сочиненій по курсу сопротивленія матеріаловъ.

1. Кирпичевъ В. Сопротивленіе матеріаловъ
2. Худяковъ П. " "
3. Демьяновъ М. Курсъ сопротивленія "
4. Бълелюбскій Н. Сопротивленіе "
5. Madamet A. Résistance des materieux
6. Vierendeelle A. Cours Stabilité des Construction t. I
7. Bach C. Elasticität und Festigkeit.
8. Föppl A. Festigkeitslehre.
9. Tetmayer L. Elasticität und Festigkeitslehre.
10. Ewing The Stength of materials
11. Bowey H. Theory of Structures and Strength of materials
12. Jonson J. The materials of construction

Оглавленіе.